

# **Pascal Kaeser**

# **Matheuseries**

☀ Florilège pour mes collègues ☀

**2026**

Pascal Kaeser, Genève

# Table des matières

|                                                                                                                     |         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>Élémentaire, mais...</b>                                                                                         | Page 6  |
| Taux de réussite & taux d'échec                                                                                     | Page 7  |
| Arrondi dangereux                                                                                                   | Page 8  |
| La vitesse moyenne peut-elle être une moyenne des vitesses ?                                                        | Page 9  |
| Équations étonnamment équivalentes                                                                                  | Page 10 |
| Équations malmenées                                                                                                 | Page 11 |
| Équations simples, mais diaboliques...                                                                              | Page 12 |
| Systèmes à une inconnue                                                                                             | Page 13 |
| Un piège édifiant                                                                                                   | Page 15 |
| Logique sous-jacente à la résolution d'une inéquation                                                               | Page 16 |
| <br><b>Le bal des pourquoi</b>                                                                                      | Page 17 |
| Pourquoi une multiplication par 0 donne 0 ?                                                                         | Page 18 |
| Pourquoi la règle des signes ?                                                                                      | Page 18 |
| Pourquoi le carré d'un nombre réel<br>ne peut-il pas être strictement négatif ?                                     | Page 18 |
| Pourquoi faut-il inverser le sens d'une inégalité<br>quand on multiplie les deux membres<br>par un nombre négatif ? | Page 19 |
| Pourquoi faut-il inverser le sens d'une inégalité<br>quand on prend l'inverse<br>de chacun des membres positifs ?   | Page 19 |
| Pourquoi un nombre peut-il être plus grand<br>que son carré ?                                                       | Page 19 |
| Pourquoi peut-on déduire d'un produit nul<br>qu'au moins un des facteurs est nul ?                                  | Page 20 |
| Pourquoi ne peut-on pas diviser par 0<br>dans l'ensemble des réels ?                                                | Page 21 |
| Pourquoi n'y a-t-il pas de plus grand élément<br>dans l'intervalle $A = [1 ; 3[$ ?                                  | Page 22 |
| Pourquoi la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est-elle strictement<br>croissante ?                                         | Page 23 |
| Pourquoi la fonction $f(x) = x^2$ est-elle convexe ?                                                                | Page 24 |
| Pourquoi $\log(2)$ et $\ln(2)$ sont-ils irrationnels ?                                                              | Page 25 |
| Pourquoi $0! = 1$ ?                                                                                                 | Page 26 |

|                                                                                                   |         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>Éléments de l'ensemble des sujets</b>                                                          | Page 27 |
| Mémoires d'outre-tombe                                                                            | Page 28 |
| Une image pour un domaine de définition                                                           | Page 29 |
| L'importance du pas                                                                               | Page 30 |
| Une fonction qui n'est pas croissante                                                             | Page 31 |
| Une fonction qui n'est pas décroissante                                                           | Page 32 |
| Asymptote verticale ou non ?                                                                      | Page 33 |
| Asymptote horizontale ou non ?                                                                    | Page 34 |
| Une fausse parabole                                                                               | Page 35 |
| Une galerie d'asymptotes                                                                          | Page 36 |
| Une fonction formidable                                                                           | Page 40 |
| Un mot d'esprit de Woody Allen                                                                    | Page 41 |
| Parallélisme                                                                                      | Page 42 |
| Introduction formelle aux logarithmes                                                             | Page 43 |
| Deux courbes très proches<br>(l'une logarithmique et l'autre exponentielle)                       | Page 45 |
| Suites arithmétiques et géométriques : résumé algébrique                                          | Page 46 |
| Une application des suites arithmétiques à la chimie                                              | Page 47 |
| Le problème de l'induction                                                                        | Page 48 |
| Dénombrement des cas possibles pour une sélection<br>de $r$ éléments parmi $n$ éléments distincts | Page 54 |
| Généralisation des formules pour $P^n$ et pour $C_r^n$                                            | Page 55 |
| L'analyse combinatoire expliquée à ma poule                                                       | Page 56 |
| De combien de manières pouvons-nous placer<br>$n$ balles dans $k$ boîtes ?                        | Page 57 |
| Un jésuite s'amuse                                                                                | Page 58 |
| Analyse combinatoire des schémas de rimes                                                         | Page 59 |
| La question du manque de clarté des énoncés                                                       | Page 62 |
| Deux « visions » des probabilités                                                                 | Page 64 |
| Évaluation intuitive des probabilités                                                             | Page 65 |
| Moyenne et médiane des $n$ premiers termes<br>d'une suite arithmétique                            | Page 66 |
| « Interprétation graphique » de l'écart-type                                                      | Page 67 |
| L'écart-type et les disparités dans les extrêmes                                                  | Page 69 |
| Un échantillon biaisé de citations sur la statistique                                             | Page 70 |

|                                            |         |
|--------------------------------------------|---------|
| <b>Délices et délires des statistiques</b> | Page 71 |
|--------------------------------------------|---------|

|                                             |              |
|---------------------------------------------|--------------|
| <b>Problèmes qui sortent de l'ordinaire</b> | Page 80      |
| Algèbre                                     | Page 81      |
| Géométrie                                   | Page 83      |
| Exponentielles et logarithmes               | Page 86      |
| Suites arithmétiques et géométriques        | Page 94      |
| Analyse combinatoire                        | Page 95      |
| Probabilités et statistiques                | Page 112     |
| <br><b>Problèmes provocateurs</b>           | <br>Page 130 |
| Arithmétique                                | Page 131     |
| Équations                                   | Page 132     |
| Exponentielles et logarithmes               | Page 134     |
| Suites arithmétiques et géométriques        | Page 135     |
| Analyse combinatoire                        | Page 136     |
| Probabilités                                | Page 138     |
| <br><b>Divagations</b>                      | <br>Page 140 |
| Étude de 6                                  | Page 141     |
| Si je pose la moitié, je retiens quoi ?     | Page 141     |
| Un soulèvement de triangles                 | Page 142     |
| L'antistatistique                           | Page 142     |
| Problème de mathématique                    | Page 143     |
| Cadeau de Noël                              | Page 144     |
| Le temps des nombres qui en imposent        | Page 146     |
| Ces farceurs de philosophes                 | Page 147     |

|                                                                          |          |
|--------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Les mathématiques au service de la création littéraire</b>            | Page 151 |
| Arrangements simples                                                     | Page 152 |
| Arrangements avec répétitions                                            | Page 153 |
| Combinaisons simples                                                     | Page 155 |
| Combinaisons avec répétitions                                            | Page 157 |
| Permutations simples                                                     | Page 158 |
| Permutations avec éléments répétés                                       | Page 159 |
| Nombres autopermutants                                                   | Page 160 |
| Permutation en spirale (ou sextine)                                      | Page 161 |
| Permutation en lacet                                                     | Page 163 |
| Compositions d'un entier                                                 | Page 164 |
| Compositions d'un entier en deux parts                                   | Page 165 |
| Partitions d'un ensemble et nombres de Bell                              | Page 166 |
| Partitions d'un ensemble et nombres de Stirling de 2 <sup>e</sup> espèce | Page 167 |
| Système de triples de Steiner                                            | Page 169 |
| Roue-mémoire                                                             | Page 171 |
| Code cyclique                                                            | Page 172 |
| Matrice d'Hadamard                                                       | Page 173 |
| Carré gréco-latin                                                        | Page 174 |
| Le problème des huit reines                                              | Page 175 |
| Assemblage érotique                                                      | Page 176 |
| Pavage hexagonal                                                         | Page 178 |
| Les 8 trigrammes du Yi-king (arrangements avec répétitions)              | Page 180 |
| Géométrie cartésienne                                                    | Page 181 |
| Statistiques                                                             | Page 182 |
| Diviseurs                                                                | Page 183 |
| Cryptogramme I                                                           | Page 184 |
| Cryptogramme II                                                          | Page 185 |

|                  |          |
|------------------|----------|
| <b>Pédagogie</b> | Page 186 |
|------------------|----------|

|                                                                                                                                                   |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Comment améliorer vos performances intellectuelles et scolaires<br/>dans tous les domaines,<br/>et plus particulièrement en mathématiques?</b> | Page 205 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

**Élémentaire, mais...**

**Taux de réussite & taux d'échec**

« La Tribune de Genève » titre :

« En une année, le taux de réussite à l'ECGA a baissé de 5 % »

« 20 minutes » titre :

« En une année, le taux d'échec à l'ECGA a augmenté de 70 % »

Se peut-il que ces titres soient tous les deux justes ?

Oui.

Exemple**Année 2022**

Effectif total : 150

Nombre de réussites : 140

Nombre d'échecs : 10

**Année 2023**

Effectif total : 150

Nombre de réussites : 133

Nombre d'échecs : 17

Évolution du taux de réussite :

$$\frac{133-140}{140} = -5 \%$$

Évolution du taux d'échec :

$$\frac{17-10}{10} = 70 \%$$

**Arrondi dangereux**

- a) Calculer la valeur exacte de la solution  $x$  de l'équation :

$$8'000x + 11 = 65'010$$

- b) Sans arrondir la valeur de  $x$  trouvée en a), calculer une valeur approchée à la deuxième décimale de :

$$2^{\frac{0.1}{x-8.11}}$$

- c) En arrondissant à la deuxième décimale la valeur de  $x$  trouvée en a), calculer :

$$2^{\frac{0.1}{x-8.11}}$$

- d) Calculer l'erreur relative commise en c) à cause de l'arrondi.

**Solutions**

a)  $x = \frac{65'010 - 11}{8'000} = 8.124875$

b) 105.62

c) 1'024

d)  $\frac{1'024 - 105.62}{105.62} \approx 870\%$

**La vitesse moyenne peut-elle être une moyenne des vitesses ?**

Considérons une distance  $d$  parcourue  $n$  fois, à des vitesses moyennes  $v_1, v_2, \dots, v_n$

Notons  $v$  la vitesse moyenne sur le trajet de longueur  $nd$ .

Nous avons : 
$$\frac{1}{v} = \frac{\sum \frac{d}{v_j}}{nd} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{v_j}$$

Ainsi :  $v$  est la moyenne harmonique des vitesses.

## Équations étonnamment équivalentes

- Vérifier que les deux équations suivantes sont équivalentes :

$$\frac{9+4x}{2}=12x+27 \qquad (9+4x)\cdot 2=12x+27$$

Elles ont toutes deux pour unique solution :  $x=-\frac{9}{4}$

- Vérifier que les deux équations suivantes sont équivalentes :

$$\frac{4+3x}{2}=9x+12 \qquad (4+3x)\cdot 2=9x+12$$

Elles ont toutes deux pour unique solution :  $x=-\frac{4}{3}$

- Vérifier que les deux équations suivantes sont équivalentes :

$$\frac{1+3x}{2}=15x+5 \qquad (1+3x)\cdot 2=15x+5$$

Elles ont toutes deux pour unique solution :  $x=-\frac{1}{3}$

- Vérifier que les deux équations suivantes **ne sont pas** équivalentes :

$$\frac{3+2x}{2}=5x+8 \qquad (3+2x)\cdot 2=5x+8$$

La 1<sup>re</sup> a pour solution  $x=-\frac{13}{8}$  et la 2<sup>e</sup>  $x=-2$

Remarque : le calcul algébrique permet de montrer qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que les deux équations suivantes soient équivalentes :

$$\frac{a+bx}{2}=cx+d \qquad (a+bx)\cdot 2=cx+d$$

est :

$$ac=bd$$

## Équations malmenées

**Thème 1** Résoudre  $\sqrt{x+1}=\sqrt{x}$   
 Enlevons les racines, nous obtenons :  
 $x+1=x$   
 Soustrayons  $x$ , nous obtenons :  
 $1=0$   
 Cette égalité est fausse,  
 donc l'équation  $\sqrt{x+1}=\sqrt{x}$  n'a pas de solution.

**Thème 2** Résoudre  $(x+1)^2=x^2$   
 Enlevons les carrés, nous obtenons :  
 $x+1=x$   
 Soustrayons  $x$ , nous obtenons :  
 $1=0$   
 Cette égalité est fausse,  
 donc l'équation  $(x+1)^2=x^2$  n'a pas de solution.  
 Euh... mais  $-0.5$  est une solution de  $(x+1)^2=x^2$   
 (Vérifiez-le !)

**Il y a donc quelque chose qui cloche dans la démarche... Quoi ?**

**Thème 3** Devons-nous en tirer la conclusion que nous pouvons enlever les racines dans une équation de la forme  $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ , mais que nous ne pouvons pas enlever les carrés dans une équation de la forme  $A^2=B^2$  ? Voyons, voyons...

Résoudre  $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}$   
 Enlevons les racines, nous obtenons :  
 $x-2=1-x$

Cette équation est équivalente à :  
 $2x=3$

La solution est donc  $1.5$

Euh... mais  $1.5$  n'est pas une solution de  $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}$   
 (Vérifiez-le !)

**Il y a donc quelque chose qui cloche dans la démarche... Quoi ?**

*« Rien ne sert de penser, il faut réfléchir avant. »*

Pierre Dac

## Équations simples, mais diaboliques...

Résoudre :

- |    |                                     |                   |
|----|-------------------------------------|-------------------|
| a) | $\sqrt{x} = \sqrt{5}$               | $S = \{5\}$       |
| b) | $x^2 = 5^2$                         | $S = \{-5 ; 5\}$  |
| c) | $\sqrt{x^2} = \sqrt{5^2}$           | $S = \{-5 ; 5\}$  |
| d) | $(\sqrt{x})^2 = (\sqrt{5})^2$       | $S = \{5\}$       |
| e) | $(\sqrt[3]{x})^2 = (\sqrt[3]{5})^2$ | $S = \{-5 ; 5\}$  |
| f) | $10^x = 10^5$                       | $S = \{5\}$       |
| g) | $10^{(x^2)} = 10^{(5^2)}$           | $S = \{-5 ; 5\}$  |
| h) | $(10^x)^2 = (10^5)^2$               | $S = \{5\}$       |
| i) | $2 \cdot \log(x) = 2 \cdot \log(5)$ | $S = \{5\}$       |
| j) | $\log(x^2) = \log(5^2)$             | $S = \{-5 ; 5\}$  |
| k) | $(\log(x))^2 = (\log(5))^2$         | $S = \{0.2 ; 5\}$ |

### Remarques

1. Les équations i) et j) ne sont pas équivalentes en dépit de la formule  $\log(u^v) = v \cdot \log(u)$  , car celle-ci n'est valable que pour  $u > 0$ .
2. Une fonction  $f$  est dite injective quand, pour tout nombre  $a$  situé dans son domaine de définition, l'équation  $f(x) = f(a)$  possède pour unique solution  $x = a$  .

Les fonctions  $\sqrt{x}$  ,  $\sqrt[3]{x}$  ,  $10^x$  ,  $e^x$  ,  $\log(x)$  ,  $\ln(x)$  sont injectives.  
 Les fonctions  $x^2$  ,  $x^4$  ,  $\sqrt[3]{x^2}$  ,  $\sin(x)$  ne sont pas injectives.

## Systèmes à une inconnue

Soient  $P(x)$  et  $Q(x)$  qui peuvent être chacune une équation, une inéquation ou plus généralement une condition à une seule variable réelle  $x$ .

Résoudre le système formé par  $P(x)$  et  $Q(x)$  consiste à exprimer de la manière la plus explicite possible (énumération de valeurs, intervalles) l'ensemble :

$$S_{P(x)} \cap S_{Q(x)}$$

$$\text{où } S_{P(x)} = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\} \text{ et } S_{Q(x)} = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x)\}$$

### Exemples

$$(1) \quad \begin{cases} P(x): & x(5-x)(2x+3)=0 \\ Q(x): & x(5x-2)(3x-15)=0 \end{cases}$$

$$S_{P(x)} = \{0; 5; -1.5\}$$

$$S_{Q(x)} = \{0; 0.4; 5\}$$

$$S_{P(x)} \cap S_{Q(x)} = \{0; 5\}$$

$$(2) \quad \begin{cases} P(x): & (x-2)(x-3)(x-4)=0 \\ Q(x): & x \neq 3 \end{cases}$$

$$S_{P(x)} = \{2; 3; 4\}$$

$$S_{Q(x)} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$S_{P(x)} \cap S_{Q(x)} = \{2; 4\}$$

$$(3) \quad \begin{cases} P(x): & 2x-1 \geq 0 \\ Q(x): & -10x+40 > 0 \end{cases}$$

$$S_{P(x)} = [0.5; +\infty[$$

$$S_{Q(x)} = ]-\infty; 4[$$

$$S_{P(x)} \cap S_{Q(x)} = [0.5; 4[$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x): \quad x-5 < 0 \\ Q(x): \quad (x+1)(x-3)(x-6)(2x-10)=0 \end{array} \right\}$$

$$S_{P(x)} = ]-\infty; 5[$$

$$S_{Q(x)} = \{-1; 3; 6; 5\}$$

$$S_{P(x)} \cap S_{Q(x)} = \{-1; 3\}$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x): \quad 2x-4 \geq 0 \\ Q(x): \quad (x-2)(x-3) \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$S_{P(x)} = [2; +\infty[$$

$$S_{Q(x)} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$$

$$S_{P(x)} \cap S_{Q(x)} = [2; +\infty[ \setminus \{3\}$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x): \quad 2x-4 \geq 0 \\ Q(x): \quad x = x+1 \end{array} \right\}$$

$$S_{P(x)} = [2; +\infty[$$

$$S_{Q(x)} = \emptyset$$

$$S_{P(x)} \cap S_{Q(x)} = \emptyset$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x): \quad (x+4)(x-3) > 0 \\ Q(x): \quad 2x-10 \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$S_{P(x)} = ]-\infty; -4[ \cup ]3; +\infty[$$

$$S_{Q(x)} = ]-\infty; 5]$$

$$S_{P(x)} \cap S_{Q(x)} = ]-\infty; -4[ \cup ]3; 5]$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x): \quad x \text{ est un entier divisible par } 3 \\ Q(x): \quad 966 \leq 2x-5 < 997 \end{array} \right\}$$

$$S_{P(x)} = \{\dots; -9; -6; -3; 0; 3; 6; 9; \dots\}$$

$$S_{Q(x)} = [485.5; 501[$$

$$S_{P(x)} \cap S_{Q(x)} = \{486; 489; 492; 495; 498\}$$

**Un piège édifiant**

Le domaine de définition de l'équation  $x = 1 - \frac{x}{x}$  est  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Sur son domaine, cette équation est équivalente à  $x = 0$

0 étant hors du domaine, l'équation n'a pas de solution.

## Logique sous-jacente à la résolution d'une inéquation

Résoudre l'inéquation  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

### Solution

Pour que  $\frac{1}{x}$  soit défini, il est nécessaire que :

$x \neq 0$  (énoncé 1)

Si  $x > 0$ , le produit en croix donne  $x \geq 2$ . Ainsi :

Si  $x > 0$ , alors  $x \geq 2$  (énoncé 2)

Si  $x < 0$ , le produit en croix donne  $x \leq 2$ . Ainsi :

Si  $x < 0$ , alors  $x \leq 2$  (énoncé 3)

En somme, nous avons obtenu :

(énoncé 1) et (énoncé 2) et (énoncé 3) :

(  $x \neq 0$  ) et (Si  $x > 0$ , alors  $x \geq 2$  ) et (Si  $x < 0$ , alors  $x \leq 2$  )

Or un énoncé de la forme (Si P, alors Q) est logiquement équivalent à (non P ou Q).  
Nous pouvons donc récrire la solution :

(  $x \neq 0$  ) et (  $x \leq 0$  ou  $x \geq 2$  ) et (  $x \geq 0$  ou  $x \leq 2$  )

Par distributivité, nous obtenons :

(  $x \neq 0$  ) et  
[ (  $x \leq 0$  et  $x \geq 0$  ) ou (  $x \leq 0$  et  $x \leq 2$  ) ou (  $x \geq 2$  et  $x \geq 0$  ) ou (  $x \geq 2$  et  $x \leq 2$  ) ]

En simplifiant :

(  $x \neq 0$  ) et  
[  $x = 0$  ou  $x \leq 0$  ou  $x \geq 2$  ou  $x = 2$  ]

En simplifiant encore :

(  $x \neq 0$  ) et  
[  $x \leq 0$  ou  $x \geq 2$  ]

Par distributivité :

(  $x \neq 0$  et  $x \leq 0$  ) ou (  $x \neq 0$  et  $x \geq 2$  )

En simplifiant :

$x < 0$  ou  $x \geq 2$

# **Le bal des pourquoi**

### Pourquoi une multiplication par 0 donne 0 ?

C'est une conséquence de la distributivité  
(de la multiplication par rapport à l'addition).

$$0 = xy - xy = (x + 0)y - xy = xy + 0y - xy = 0y$$

### Pourquoi la règle des signes ?

Les différents cas se déduisent de la distributivité  
(de la multiplication par rapport à l'addition).

$$-xy = 0 - xy = x \cdot 0 - xy = x(y + (-y)) - xy = xy + x(-y) - xy = x(-y)$$

De même :

$$-xy = (-x)y$$

Enfin :

$$\begin{aligned} xy &= 0 + xy = (-x) \cdot 0 + xy = (-x)(y + (-y)) + xy = (-x)y + (-x)(-y) + xy \\ &= -xy + (-x)(-y) + xy = (-x)(-y) \end{aligned}$$

### Pourquoi le carré d'un nombre réel ne peut-il pas être strictement négatif ?

$$x^2 = x \cdot x$$

Si  $x=0$  , alors  $x^2 = x \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$

Si  $x > 0$  , alors  $x^2 = x \cdot x > 0$  , car  $(+)(+)$  donne  $(+)$

Si  $x < 0$  , alors  $x^2 = x \cdot x > 0$  , car  $(-)(-)$  donne  $(+)$

### Conséquences

Une équation comme  $x^2 = -1$  n'a pas de solution réelle.

Et, puisque la racine carrée d'un nombre réel  $A$  est par définition la solution positive de l'équation  $x^2 = A$  ,  $\sqrt{-1}$  n'est pas un nombre réel.

### **Pourquoi faut-il inverser le sens d'une inégalité quand on multiplie les deux membres par un nombre négatif ?**

Soit  $c > 0$

$$x < y \text{ ssi } x - y < 0 \text{ ssi } -y < -x \text{ ssi } -x > -y \text{ ssi } c \cdot (-x) > c \cdot (-y) \text{ ssi } (-c)x > (-c)y$$

### **Pourquoi faut-il inverser le sens d'une inégalité quand on prend l'inverse de chacun des membres positifs ?**

Si  $a > b > 0$ , alors  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

En effet :

Comme  $a > 0$ , divisons par  $a$  l'inégalité  $a > b$

Nous obtenons :  $1 > \frac{b}{a}$

Comme  $b > 0$ , divisons par  $b$  l'inégalité  $1 > \frac{b}{a}$

Nous obtenons :  $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$  qui est équivalente à  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

### **Pourquoi un nombre peut-il être plus grand que son carré ?**

$$\begin{aligned} x > x^2 & \text{ ssi } x - x^2 > 0 \text{ ssi } x(1-x) > 0 \\ & \text{ssi } (x > 0 \text{ et } 1-x > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } 1-x < 0) \\ & \text{ssi } (x > 0 \text{ et } 1 > x) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } 1 < x) \\ & \text{ssi } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

## Pourquoi peut-on déduire d'un produit nul qu'au moins un des facteurs est nul ?

$$AB=0 \text{ ssi } (A=0) \text{ ou } (B=0) \quad (\text{Proposition 1})$$

En effet :

$$\text{Si } (A=0) \text{ ou } (B=0), \text{ alors bien sûr } AB=0 \quad (\text{Proposition 2})$$

Montrons la réciproque, à savoir :

$$\text{Si } AB=0, \text{ alors } (A=0) \text{ ou } (B=0) \quad (\text{Proposition 3})$$

Nous avons pour cela besoin de deux théorèmes de logique propositionnelle.

Soient P, Q, R et S des propositions.

### Théorème 1 (contraposition)

(Si P, alors Q) est équivalent à (Si non-Q, alors non-P)

### Théorème 2 (une des lois de Morgan)

non-(R ou S) est équivalent à (non-R et non-S)

En appliquant ces deux théorèmes à la Proposition 3, nous obtenons que celle-ci est équivalente à :

$$\text{Si } (A \neq 0) \text{ et } (B \neq 0), \text{ alors } AB \neq 0 \quad (\text{Proposition 3bis})$$

Nous pouvons montrer cette Proposition 3bis grâce à la règle des signes.

En effet :

Si  $(A \neq 0)$  et  $(B \neq 0)$ , alors nous sommes dans un des 4 cas suivants :

$$A > 0 \text{ et } B > 0, \text{ d'où } AB > 0$$

$$A > 0 \text{ et } B < 0, \text{ d'où } AB < 0$$

$$A < 0 \text{ et } B > 0, \text{ d'où } AB < 0$$

$$A < 0 \text{ et } B < 0, \text{ d'où } AB > 0$$

Dans chacun de ces cas  $AB \neq 0$ , ce qui achève la démonstration.

### Conséquence

Les solutions d'une équation comme  $(x-2)(2x+7)=0$  s'obtiennent ainsi :

$$(x-2)(2x+7)=0 \text{ ssi } x-2=0 \text{ ou } 2x+7=0 \text{ ssi } x=2 \text{ ou } x=-3.5$$

**Pourquoi ne peut-on pas diviser par 0 dans l'ensemble des réels ?**

Par définition,  $a$  peut-être divisé par  $b$  ssi il existe un unique nombre réel  $c$  tel que  $a = cb$

Ce nombre est alors  $c = \frac{a}{b}$

Posons  $b=0$  et distinguons deux cas :

Cas 1 :  $a$  est différent de 0

L'égalité  $a = cb$  devient  $a = c \cdot 0$

Ce n'est pas possible, puisque nous obtenons une contradiction entre  $a$  est différent de 0 et  $c \cdot 0 = 0$

Cas 2 :  $a=0$

L'égalité  $a = cb$  devient  $0 = c \cdot 0$

Mais tout nombre réel  $c$  vérifie cette égalité.

Or, dans la définition de la division, nous imposons l'unicité de  $c$

Cette unicité n'étant pas réalisée, nous rejetons la possibilité de diviser 0 par 0

Remarque

Par contre 0 peut être divisé par n'importe quel nombre réel non nul, et le résultat est 0

En effet :

Pour  $b \neq 0$ , la seule valeur de  $c$  telle que  $0 = cb$  est  $c=0$

**Pourquoi n'y a-t-il pas de plus grand élément dans l'intervalle  $A = [1 ; 3[$  ?**

Partons de l'hypothèse qu'il existe un plus grand élément  $M$  dans  $A$ .

Considérons le nombre  $Q = \frac{M+3}{2}$

Primo :

$$M < 3 \text{ donc } Q < \frac{3+3}{2} \text{ donc } Q < 3$$

Secundo :

L'inégalité  $Q > M$  est équivalente à  $\frac{M+3}{2} > M$  qui est équivalente à  $M+3 > 2M$  qui est équivalente à  $3 > M$  qui est vraie par définition.

Ainsi nous avons  $M < Q < 3$

Donc  $Q$  est un élément de  $A$  strictement supérieur à  $M$ .

Cela contredit l'hypothèse initiale.

L'hypothèse initiale est donc fausse.

Par conséquent, il n'existe pas de plus grand élément dans  $A$ .

**Pourquoi la fonction  $f(x)=\sqrt{x}$  est-elle strictement croissante?**

Soient :  $a, h \in \mathbb{R}$  avec  $a \geq 0$  et  $h > 0$

Il s'agit de montrer que  $f(a+h) - f(a) > 0$

$$f(a+h) - f(a) = \sqrt{a+h} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{h}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} > 0$$

## Pourquoi la fonction $f(x)=x^2$ est-elle convexe ?

Une fonction est dite convexe si, pour toute paire de points de cette fonction, la droite contenant ces deux points passe au-dessus de la courbe.

Cela peut être formalisé ainsi :

Soient :  $a, h, k \in \mathbb{R}$  , avec  $h > 0$  et  $h \geq k \geq 0$

$d(x) = px + q$  fonction affine contenant les points  
 $(a; f(a))$  et  $(a+h; f(a+h))$

On a donc :  $p = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  et  $q = f(a) - pa$

Il s'agit de montrer que  $d(a+k) - f(a+k) \geq 0$

$$\begin{aligned} d(a+k) - f(a+k) &= p(a+k) + q - f(a+k) = pa + pk + f(a) - pa - f(a+k) \\ &= pk + f(a) - f(a+k) = pk + a^2 - (a+k)^2 = pk - 2ka - k^2 = k(p - 2a - k) \\ &= k\left(\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} - 2a - k\right) = k\left(\frac{2ah + h^2}{h} - 2a - k\right) = k(2a + h - 2a - k) \\ &= k(h - k) \geq 0 \end{aligned}$$

## Pourquoi $\log(2)$ et $\ln(2)$ sont-ils irrationnels?

Par l'absurde, supposons  $\log(2)$  rationnel.

Alors il existe  $p$  et  $q$  entiers  $\geq 1$  tels que

$$\log(2) = \frac{p}{q}$$

Faisons quelques transformations :

$$\begin{aligned} 10^{\frac{p}{q}} &= 2 \\ 10^p &= 2^q \\ 2^p 5^p &= 2^q \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition de tout entier  $> 1$  en produit de nombres premiers, cela implique:

$$p = q = 0$$

en contradiction avec l'hypothèse initiale.

De même, supposons  $\ln(2)$  rationnel.

Alors il existe  $p$  et  $q$  entiers  $\geq 1$  tels que

$$\ln(2) = \frac{p}{q}$$

Faisons quelques transformations :

$$\begin{aligned} e^{\frac{p}{q}} &= 2 \\ e^p &= 2^q \\ e^p - 2^q &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $e$  est solution de l'équation  $x^p - 2^q = 0$

Donc  $e$  est un nombre algébrique,

en contradiction avec la transcendance de  $e$ , démontrée par Hermite en 1873.

**Pourquoi  $0! = 1$  ?**

C'est la meilleure convention, pour de multiples raisons. Voici une manière élégante de la justifier.

Imaginons qu'il y ait  **$m$  personnes** dans une **Salle 1** et  **$n$  personnes** dans une **Salle 2**. Dans chaque salle, nous voulons aligner les personnes. Combien y a-t-il de possibilités de réaliser ces deux alignements ?

Réponse :  $m!n!$

Mais s'il n'y a aucune personne dans la Salle 2, c-à-d si  $n = 0$ , le nombre total d'alignements se réduit au nombre d'alignements des personnes de la Salle 1, c-à-d à  $m!$

Nous avons alors

$$m!0! = m!$$

et donc

$$0! = 1$$

# **Éléments de l'ensemble des sujets**

## Mémoires d'outre-tombe

Un petit extrait des « *Mémoires d'outre-tombe* », du vicomte François-René de Chateaubriand, pour motiver (ou démotiver) nos élèves :

« Des qualités que ma première éducation avait laissées dormir s'éveillèrent au collège. Mon aptitude au travail était remarquable, ma mémoire extraordinaire. Je fis des progrès rapides en mathématiques où j'apportai une clarté de conception qui étonnait l'abbé Leprince. Je montrai en même temps un goût décidé pour les langues. Le rudiment, supplice des écoliers, ne me coûta rien à apprendre ; j'attendais l'heure des leçons de latin avec une sorte d'impatience, comme un délassement de mes chiffres et de mes figures de géométrie. En moins d'un an, je devins fort cinquième. Par une singularité, ma phrase latine se transformait si naturellement en pentamètre que l'abbé Égault m'appelait l'Élégiaque, nom qui me pensa rester parmi mes camarades.

Quant à ma mémoire, en voici deux traits. J'appris par cœur mes tables de logarithmes : c'est-à-dire qu'un nombre étant donné dans la proportion géométrique, je trouvais de mémoire son exposant dans la proportion arithmétique, et vice versâ. »

## Une image pour un domaine de définition

J'ai trouvé une chouette comparaison pour expliquer à mes élèves le domaine de définition.

Par exemple, le domaine de définition de  $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$  est  $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

Qu'est-ce ça veut dire ?

Je présente la chose au moyen d'une comparaison.

Si je renvoie les deux élèves Romus et Romulus, qui rendent la leçon impossible, les élèves qui restent en classe forment le domaine de définition de la leçon.

De la même manière, si je « renvoie », ou plutôt si j'exclus les deux valeurs 2 et 3 qui rendent le calcul de  $f(x)$  impossible, les valeurs qui restent forment le domaine de définition de cette fonction.

Le domaine de définition, dans le cas de la classe, est l'ensemble des élèves avec lesquels la leçon peut se dérouler calmement ; et, dans le cas de la fonction, l'ensemble des valeurs réelles qui donnent des images sages comme des images.

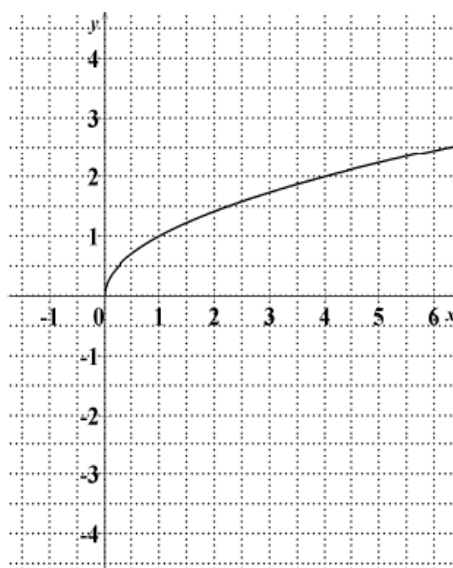
## L'importance du pas

Soit la fonction  $H(x) = \sqrt{x} + 0.25x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

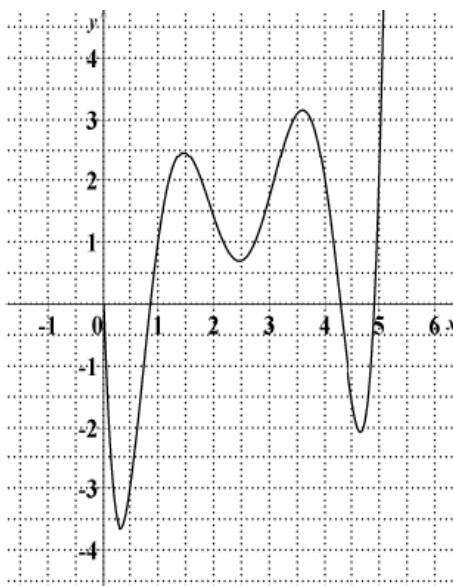
Tabulons cette fonction pour  $x$  variant de 0 à 5, avec un pas de 1 :

| $x$    | 0 | 1 | 2   | 3   | 4 | 5   |
|--------|---|---|-----|-----|---|-----|
| $H(x)$ | 0 | 1 | 1.4 | 1.7 | 2 | 2.2 |

En reliant les points, nous trouvons une courbe fausse, celle de  $y = \sqrt{x}$



La courbe juste est :



## Moralité

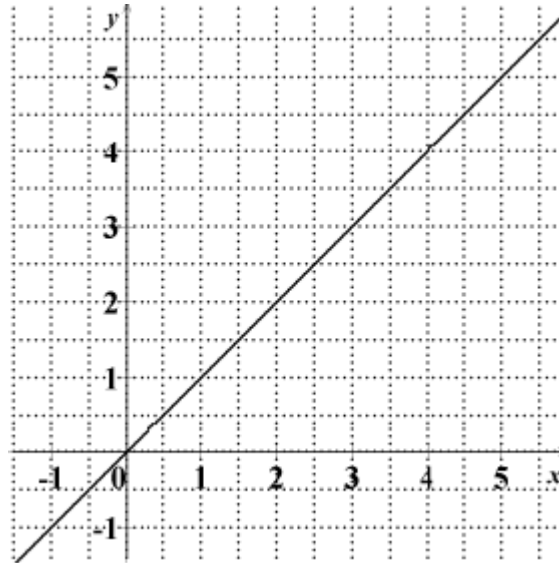
Il est dangereux de relier les points d'une fonction que nous connaissons mal.

## Une fonction qui n'est pas croissante

Considérons la fonction définie par :

$$f(x) = x - 2\varepsilon(1 - \operatorname{sgn}((x-3)^2 - \varepsilon^2)) \quad , \text{ où } \varepsilon = 10^{-20}$$

Voici une représentation graphique de cette fonction :



Cette fonction semble croissante sur l'intervalle  $[0 ; 5]$ .

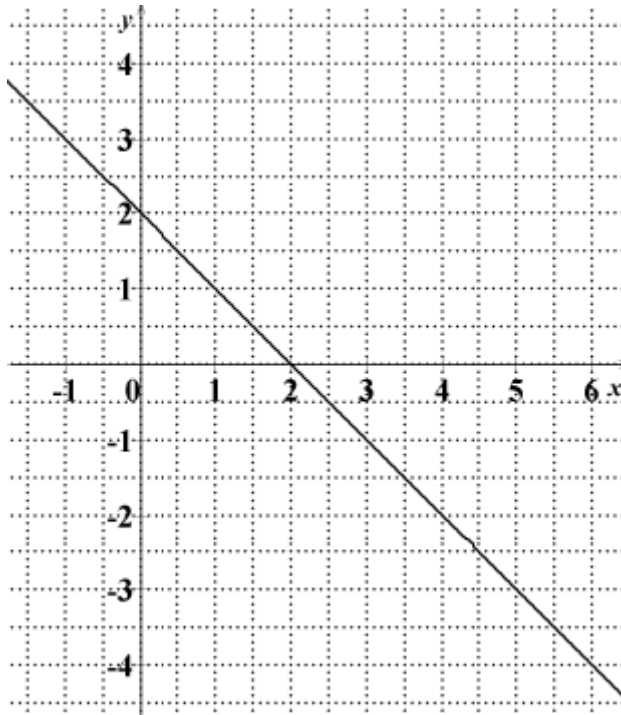
Mais l'est-elle vraiment ?

Non, car :  $f(3) = 3 - 4\varepsilon$  est plus petit que  $f(3 - 2\varepsilon) = 3 - 2\varepsilon$

Explication : La fonction  $f$  est identique à la droite d'équation  $y = x$ , sauf sur l'intervalle  $[3 - 10^{-20} ; 3 + 10^{-20}]$

## Une fonction qui n'est pas décroissante

La fonction  $f(x)=2-x+10^{-30}\cdot x^2$  est quasiment identique à la droite  $g(x)=2-x$  sur un intervalle d'une taille immense, centré autour de l'origine.



Cette représentation graphique pourrait nous donner à penser que  $f$  est décroissante.

Or ce n'est pas le cas, puisque  $f$  est une fonction quadratique. Elle doit remonter quand  $x$  devient très grand.

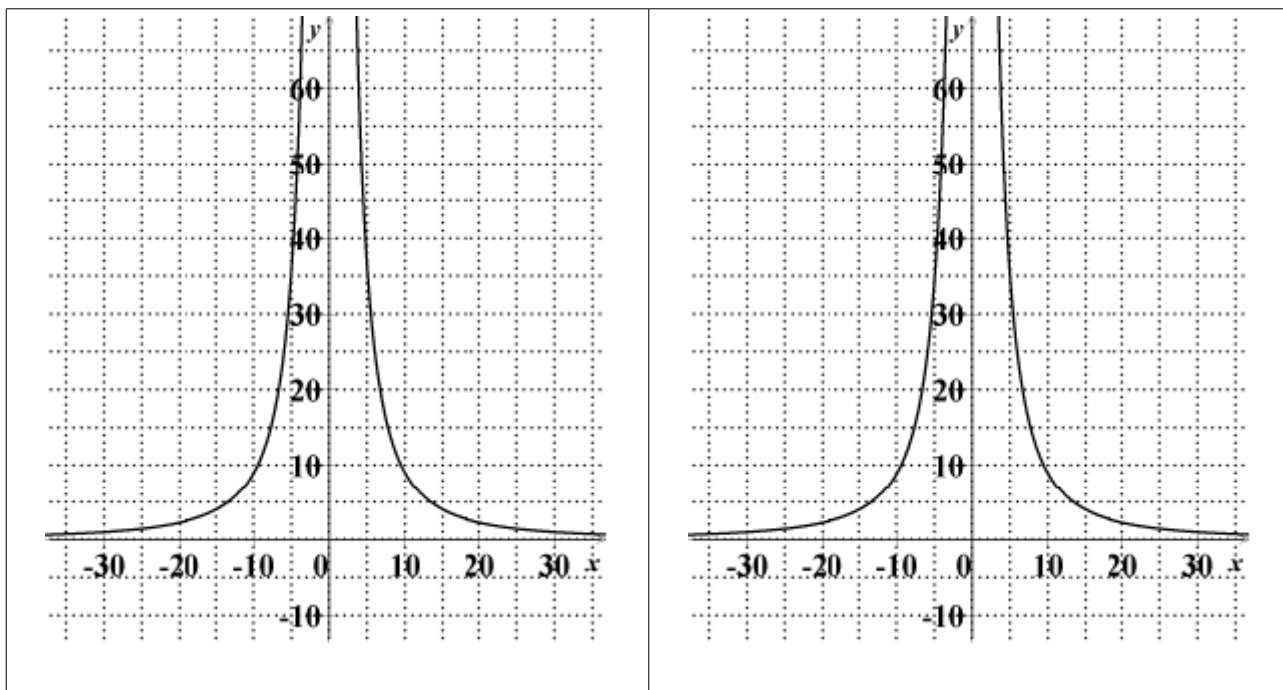
Nous avons par exemple :

$$f(10^{30})=2$$

$$f(1.7\cdot 10^{30})=1.19\cdot 10^{30}+2$$

### Asymptote verticale ou non ?

Les graphes des fonctions  $f(x) = \frac{900}{x^2}$  et  $g(x) = \frac{900}{x^2 + 1}$  se ressemblent :

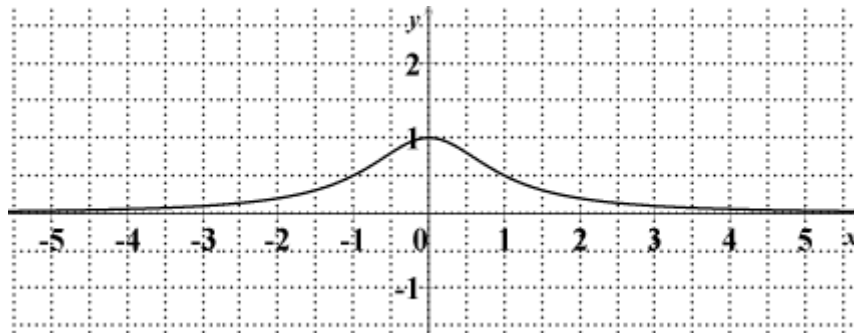


Ont-elles toutes deux une asymptote verticale  $x=0$  ?  
*f* oui, mais *g* non.

Il est facile de vérifier que *g* possède un sommet en  $(0 ; 900)$   
 $g(0)=900$  et,  $\forall x \in \mathbb{R} \ g(x) \leq 900$

**Asymptote horizontale ou non ?**

Les fonctions  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  et  $g(x) = \frac{1}{x^2+1} + 10^{-60} \cdot x$  sont quasiment identiques sur un intervalle d'une taille immense, centré autour de l'origine.

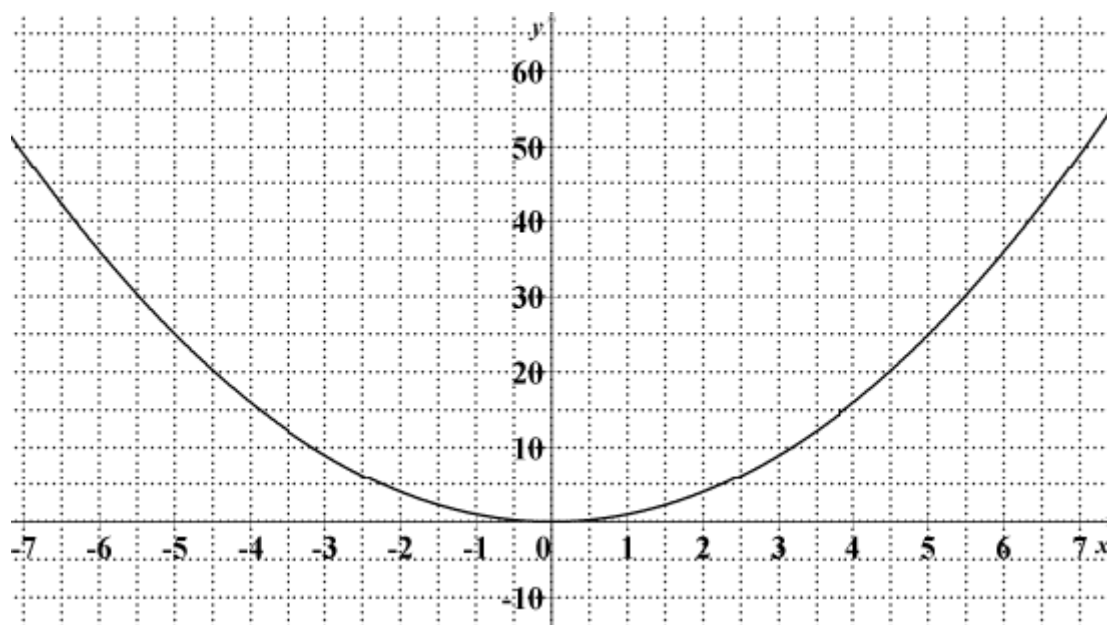


On peut penser qu'elles ont toutes deux une asymptote horizontale  $y=0$

C'est bien le cas de  $f$ , mais non de  $g$ .

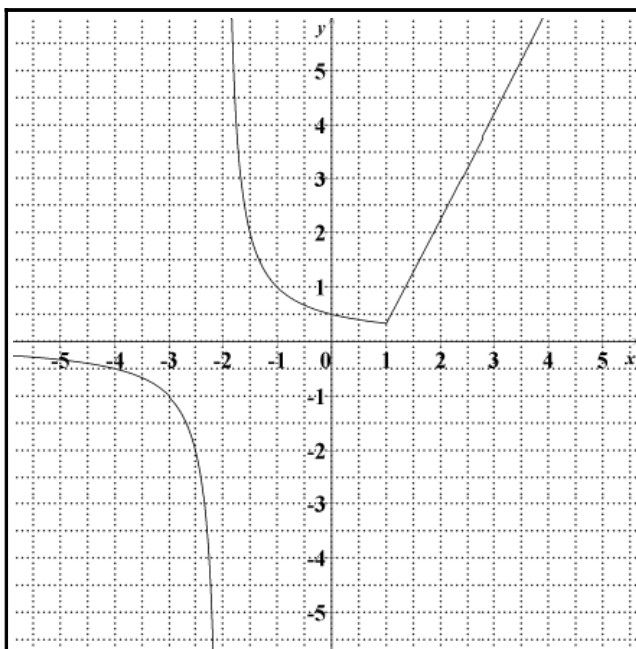
## Une fausse parabole

Le graphe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2(1+10^{-30})}{1+10^{-30} \cdot x^2}$  aux environs de l'origine ressemble à celui de la fonction  $g(x) = x^2$



Et pourtant,  $f$  est bornée supérieurement et possède une asymptote horizontale  $y = 10^{30}x + 1$ , contrairement à  $g$ .

## Une galerie d'asymptotes

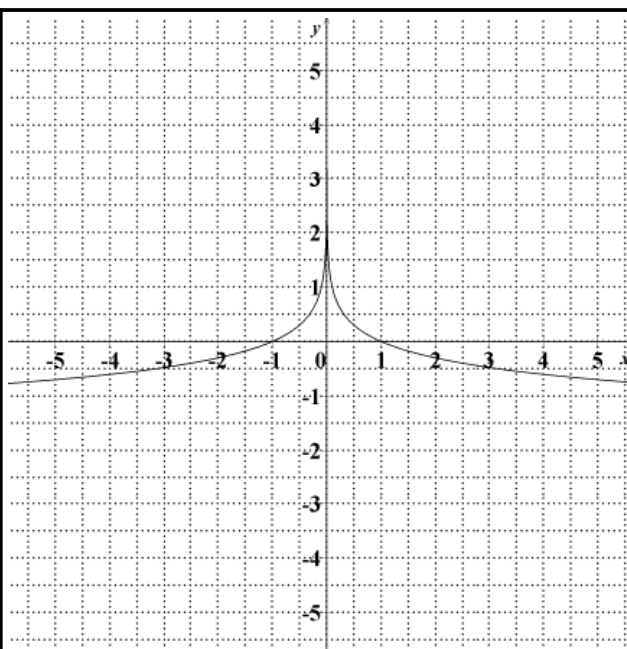


$$f_1(x) = x - 1 + |x - 1| + \frac{1}{x + 2}$$

AV :  $x = -2$

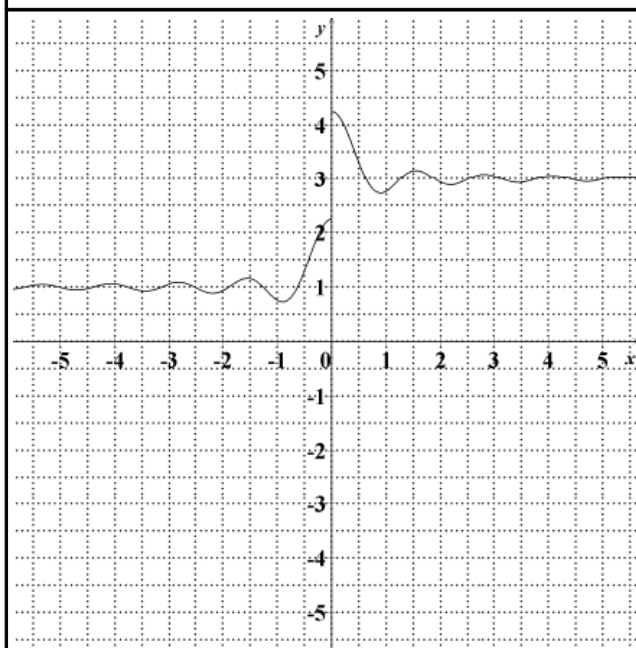
AH à gauche :  $y = 0$

AO à droite :  $y = 2x - 2$



$$f_2(x) = -\log(|x|)$$

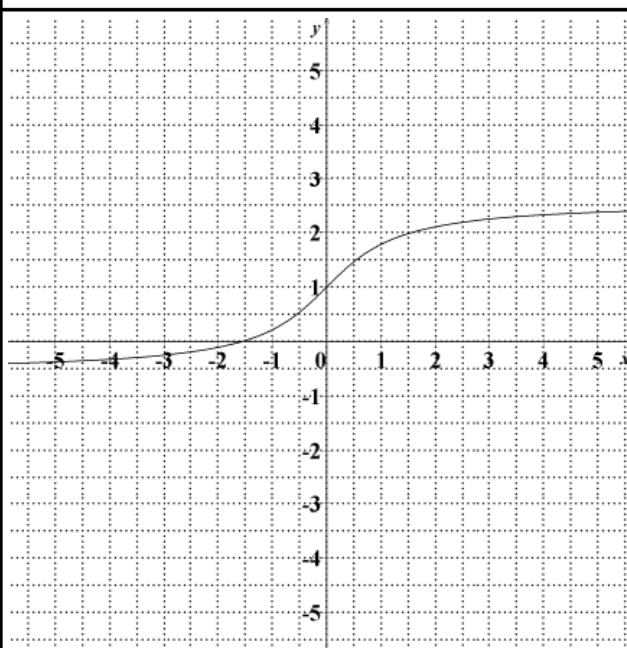
AV :  $x = 0$



$$f_3(x) = 2 + \frac{|x|}{x} + \frac{\sin(5x)}{4x}$$

AH à gauche :  $y = 1$

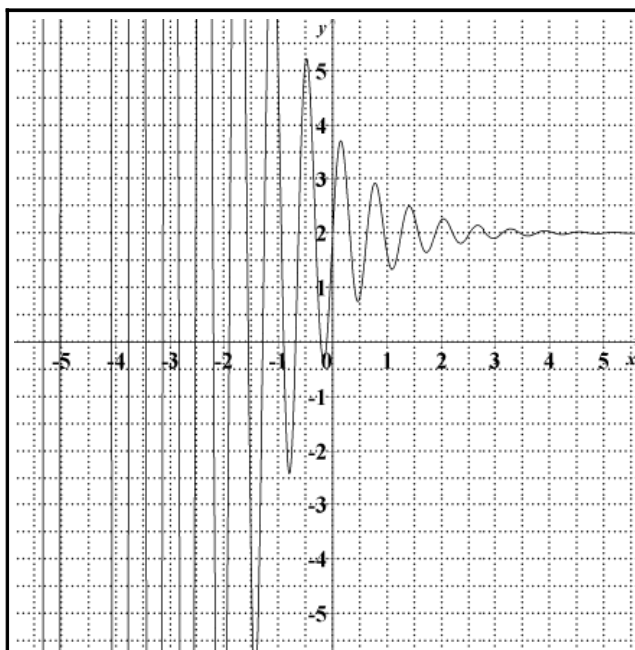
AH à droite :  $y = 3$



$$f_4(x) = \arctan(x) + 1$$

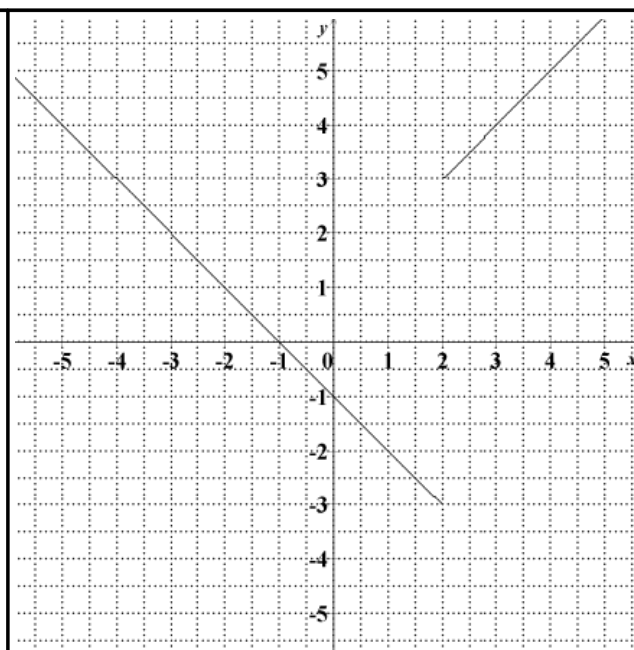
AH à gauche :  $y = -\frac{\pi}{2} + 1$

AH à droite :  $y = \frac{\pi}{2} + 1$



$$f_5(x) = 2 \sin(10x) e^{-x} + 2$$

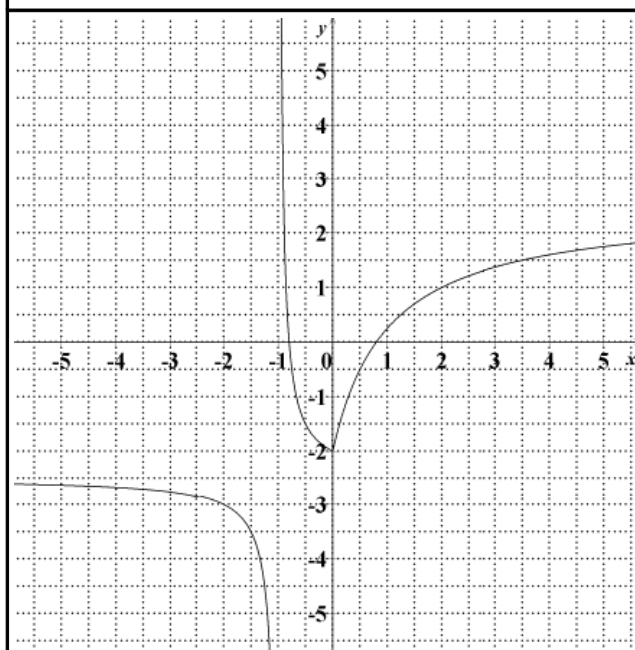
AH à droite :  $y=2$



$$f_6(x) = \frac{|x-2|}{x-2} (x+1)$$

AO à gauche :  $y = -x - 1$

AO à droite :  $y = x + 1$

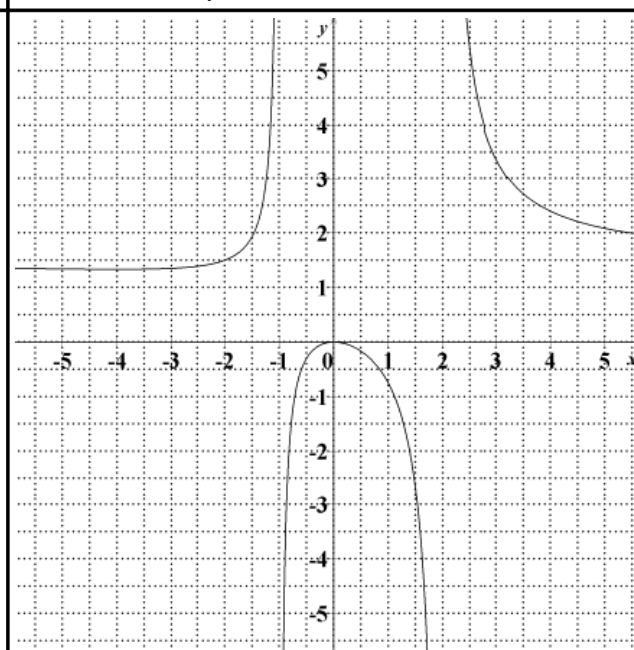


$$f_7(x) = \frac{2.5|x|-2}{x+1}$$

AV :  $x = -1$

AH à gauche :  $y = -2.5$

AH à droite :  $y = 2.5$

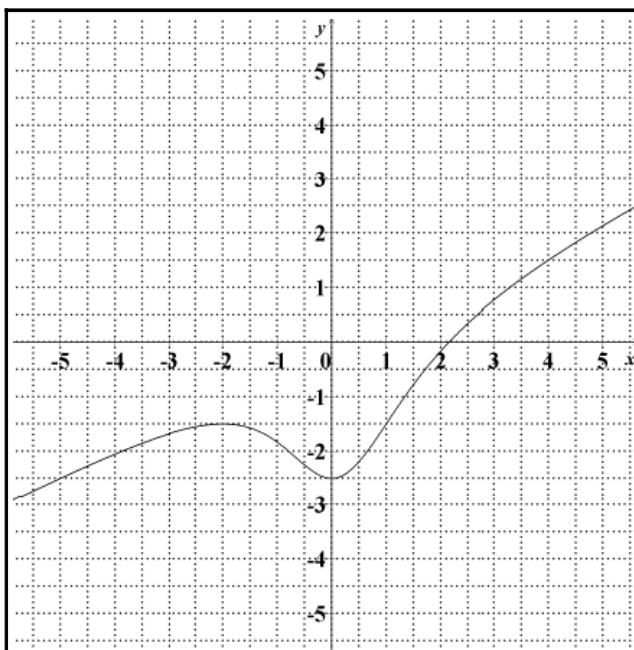


$$f_8(x) = \frac{1.5x^2}{(x+1)(x-2)}$$

AV :  $x = -1$

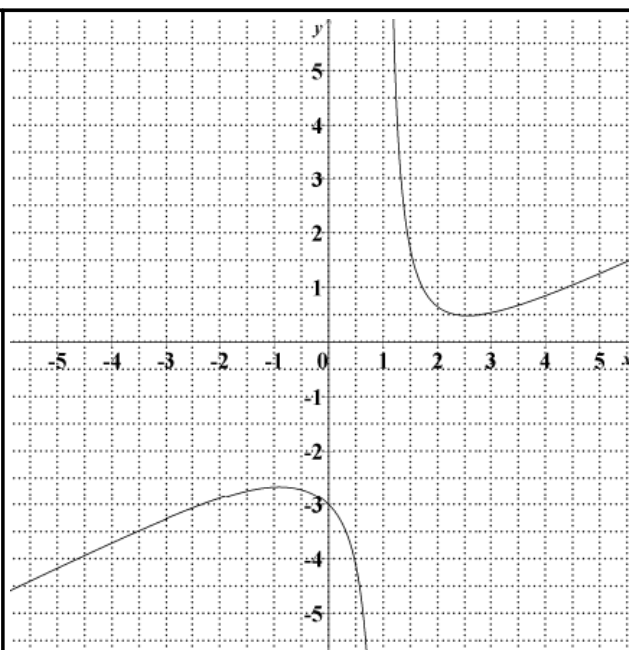
AV :  $x = 2$

AH :  $y = 1.5$



$$f_9(x) = \frac{0.5x^3 - 5}{x^2 + 1}$$

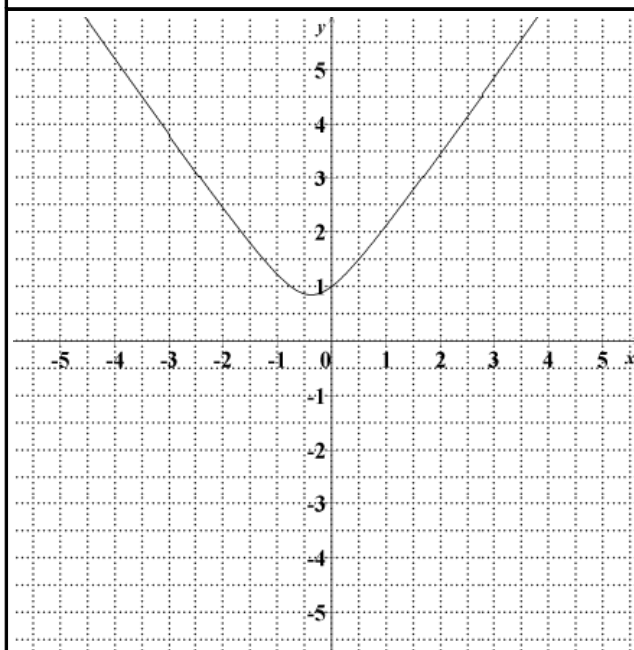
AO :  $y = 0.5x$



$$f_{10}(x) = \frac{\sqrt{0.25x^4 + 0.5x^2 + 1} - 2}{x - 1}$$

AV :  $x = 1$

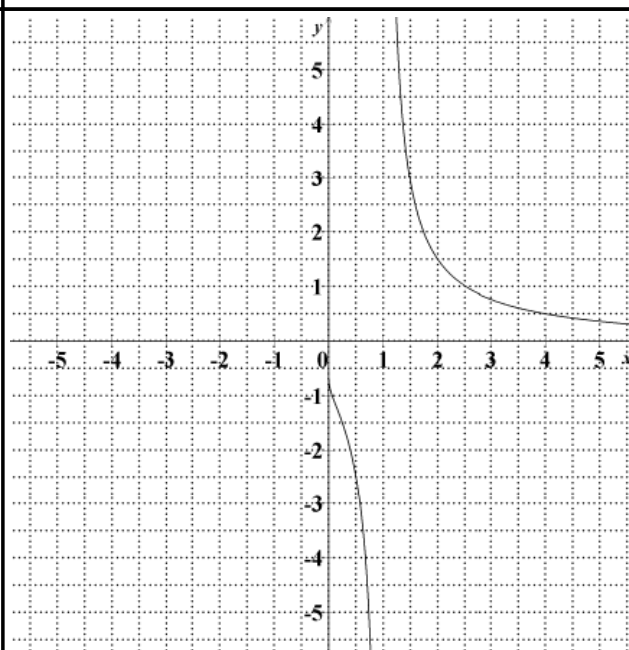
AO :  $y = 0.5x - 1.5$



$$f_{11}(x) = \sqrt{2x^2 + 1.5x + 1}$$

AO à gauche :  $y = -\sqrt{2}\left(x + \frac{3}{8}\right)$

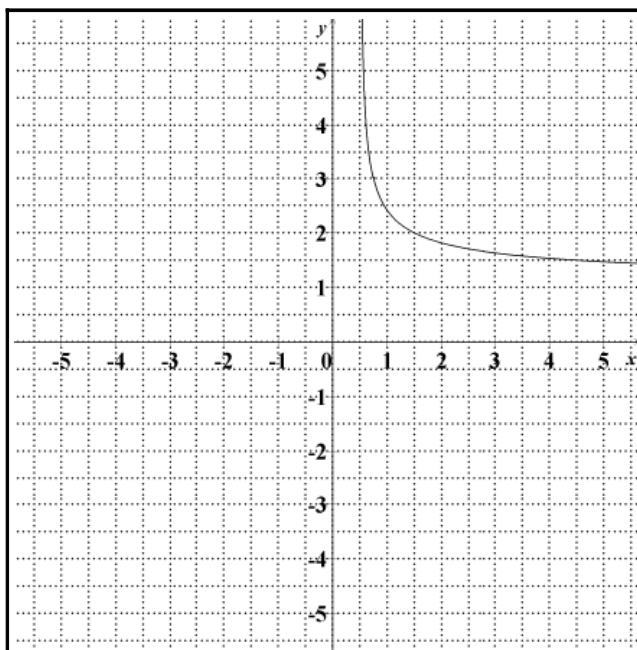
AO à droite :  $y = \sqrt{2}\left(x + \frac{3}{8}\right)$



$$f_{12}(x) = \frac{1}{\log_4(x)} - \frac{1}{2}$$

AV :  $x = 1$

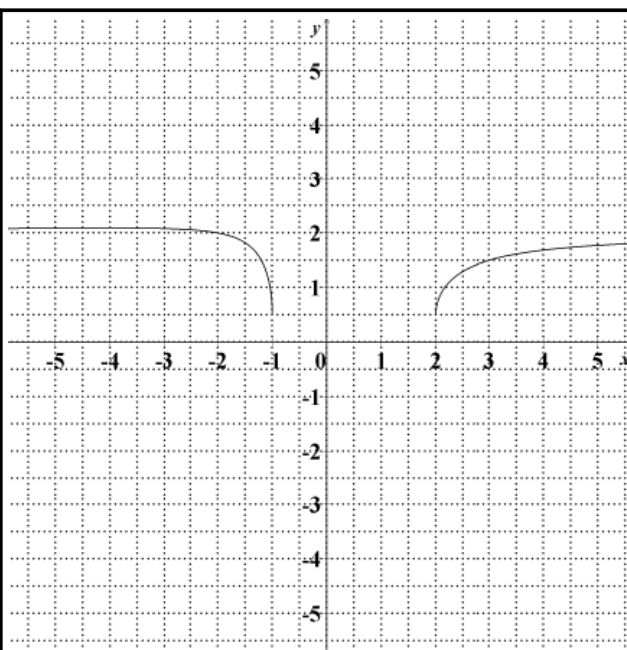
AH à droite :  $y = -0.5$



$$f_{13}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-0.5}} + 1$$

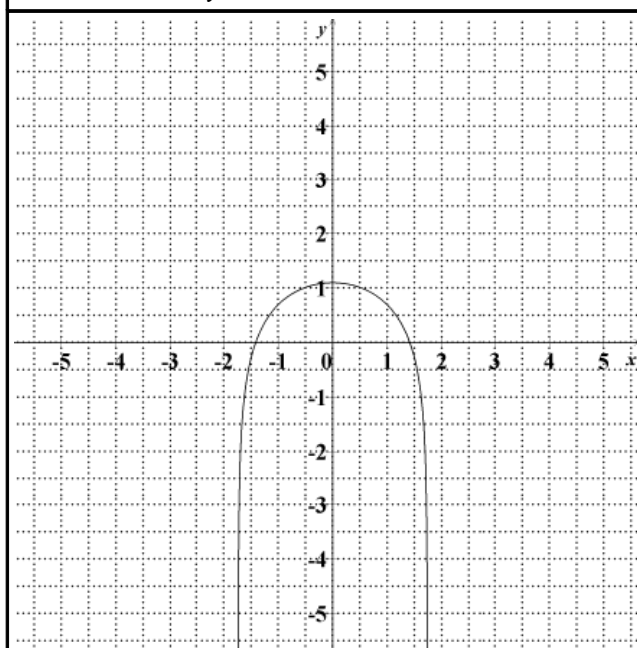
AV :  $x = 0.5$

AH à droite :  $y = 1$



$$f_{14}(x) = \frac{\sqrt{2.25(x+1)(x-2)}}{|x|} + 0.5$$

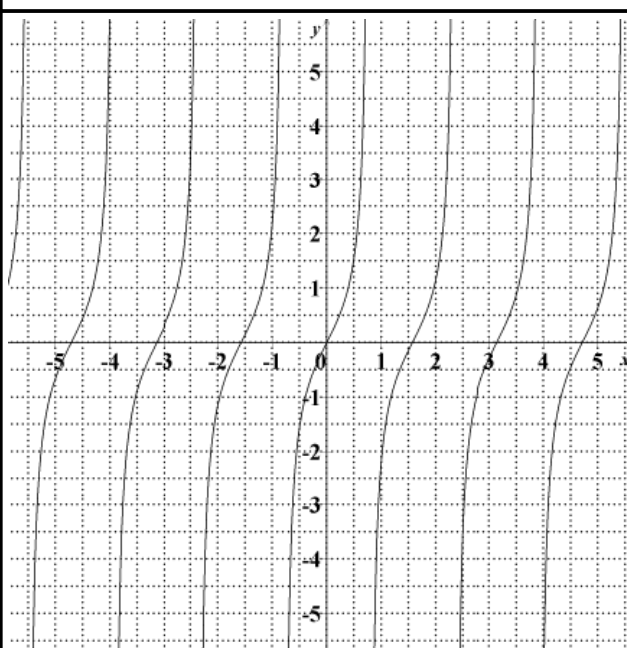
AH :  $y = 2$



$$f_{15}(x) = \ln(3-x^2)$$

AV :  $x = -\sqrt{3}$

AV :  $x = \sqrt{3}$



$$f_{16}(x) = \tan(2x)$$

AV :  $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

## Une fonction formidable

Il existe une fonction qui possède toutes les propriétés suivantes :

Elle est croissante sur  $\mathbb{R}$  et décroissante sur  $\mathbb{R}$  .

Elle est convexe sur  $\mathbb{R}$  et concave sur  $\mathbb{R}$  .

Elle est bornée supérieurement et inférieurement.

Tous ses points donnent des maxima globaux et locaux, des minima globaux et locaux, des points d'inflexion.

L'ordonnée à l'origine est 0.

Le noyau est  $\mathbb{R}$  .

L'ensemble des images est  $\{0\}$ .

Elle est paire et impaire.

Elle est invariante par translation horizontale, par symétrie axiale selon tout axe perpendiculaire à  $Ox$ , par rotation de  $180^\circ$  selon tout centre situé sur l'axe  $Ox$ .

Elle a une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .

Elle est continûment dérivable et égale à sa dérivée.

Elle est linéaire.

Sa matrice est (0).

J'en passe et des meilleures...

Bref, c'est une fonction qui gagne à être connue...  
et pourtant elle est complètement nulle...

## Un mot d'esprit de Woody Allen

Ce mot d'esprit de Woody Allen « L'éternité, c'est long, surtout vers la fin » est non seulement drôle, mais il correspond à une vision mathématique de l'infini.

Par exemple, la limite  $L$  de  $f(t)$  pour  $t \rightarrow \infty$  est modélisée par la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \mid \forall t > A, \mid f(t) - L \mid < \varepsilon$$

Autrement dit, pour connaître le dernier mot  $L$  avec une marge d'erreur  $\varepsilon$ , il faut aller au-delà de  $A$  (qui devient de plus en plus grand à mesure qu'on prend des  $\varepsilon$  de plus en plus petits), donc c'est vers la fin de l'axe  $\mathbb{R}_+$  que l'éternité se dessine. Plus on veut se rapprocher de l'éternité, plus  $A$  s'éloigne de 0, et donc plus le voyage est long. Et pour chaque valeur de  $A$  atteinte, il reste un temps infini ensuite.

**Parallélisme**

$$a \cdot 3 + a \cdot 2 = (a + a + a) + (a + a) \\ = a + a + a + a + a = a \cdot 5$$

Généralisation :  $a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n)$

Si  $m = 0$  , alors  $a \cdot 0 + a \cdot n = a \cdot n$  , donc

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot 5 - a \cdot 2 = (a + a + a + a + a) - (a + a) \\ = a + a + a = a \cdot 3$$

Généralisation :  $a \cdot m - a \cdot n = a \cdot (m - n)$

Si  $m = 0$  , alors  $-a \cdot n = a \cdot (-n)$

$$(a \cdot 3) \cdot 2 = a \cdot 3 + a \cdot 3 = a \cdot 6$$

Généralisation :  $(a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$

Si  $m = \frac{1}{n}$  , alors  $(a \cdot \frac{1}{n}) \cdot n = a$  ,  
donc  $a \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{n}$

L'équation en  $a$  :  $a \cdot m = b$  donne :  
$$a = \frac{b}{m} = b \cdot \frac{1}{m}$$

L'équation en  $m$  :  $a \cdot m = b$  donne :  
$$m = \frac{b}{a}$$

$$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \\ = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

Généralisation :  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Si  $m = 0$  , alors  $a^0 \cdot a^n = a^n$  , donc

$$a^0 = 1$$

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Généralisation :  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Si  $m = 0$  , alors  $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6$$

Généralisation :  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Si  $m = \frac{1}{n}$  , alors  $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$  ,  
donc  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

L'équation en  $a$  :  $a^m = b$  donne :  
$$a = \sqrt[m]{b} = b^{\frac{1}{m}}$$

L'équation en  $m$  :  $a^m = b$  donne :  
$$m = \log_a(b)$$

## Introduction formelle aux logarithmes

Supposons qu'il existe une bijection continue  $f : ]0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \forall u, v \in ]0; \infty[ \quad f(uv) = f(u) + f(v) \\ (2) \quad & \exists a \in ]0; \infty[ \setminus \{1\} \quad f(a) = 1 \end{aligned}$$

Démontrons quelques propriétés de cette fonction.

$$f(v) = f(1v) = f(1) + f(v) \quad , \text{ d'où } f(1) = f(v) - f(v) = 0$$

$$(3) \quad f(1) = 0$$

$$0 = f(1) = f(uu^{-1}) = f(u) + f(u^{-1}) \quad , \text{ d'où } f(u^{-1}) = -f(u)$$

$$(4) \quad f(u^{-1}) = -f(u)$$

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = f(uv^{-1}) = f(u) + f(v^{-1}) = f(u) - f(v)$$

$$(5) \quad f\left(\frac{u}{v}\right) = f(u) - f(v)$$

$$\begin{aligned} f(u^2) &= f(u) + f(u) = 2f(u), \quad f(u^3) = f(u^2) + f(u) = 3f(u), \text{ etc.} \\ f(u^{-2}) &= f(u^{-1}) + f(u^{-1}) = -2f(u), \quad f(u^{-3}) = f(u^{-2}) + f(u^{-1}) = -3f(u), \text{ etc.} \end{aligned}$$

$$(6) \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad f(u^z) = z f(u)$$

$$f(u) = f\left(u^{\frac{q}{q}}\right) = f\left(\left(u^{\frac{1}{q}}\right)^q\right) = q f\left(u^{\frac{1}{q}}\right) \quad , \text{ d'où } f\left(u^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q} f(u)$$

$$(7) \quad \forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad f\left(u^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q} f(u)$$

$$f\left(u^{\frac{p}{q}}\right) = f\left(\left(u^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p f\left(u^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q} f(u)$$

$$(8) \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad f(u^r) = r f(u)$$

Par continuité (est-ce une condition suffisante?), on peut étendre (8) aux nombres réels.

$$(9) \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad f(r) = r f(1)$$

Par bijectivité :  $\forall y \in \mathbb{R} \exists ! x \in ]0; \infty[$  tel que  $f(x) = y$

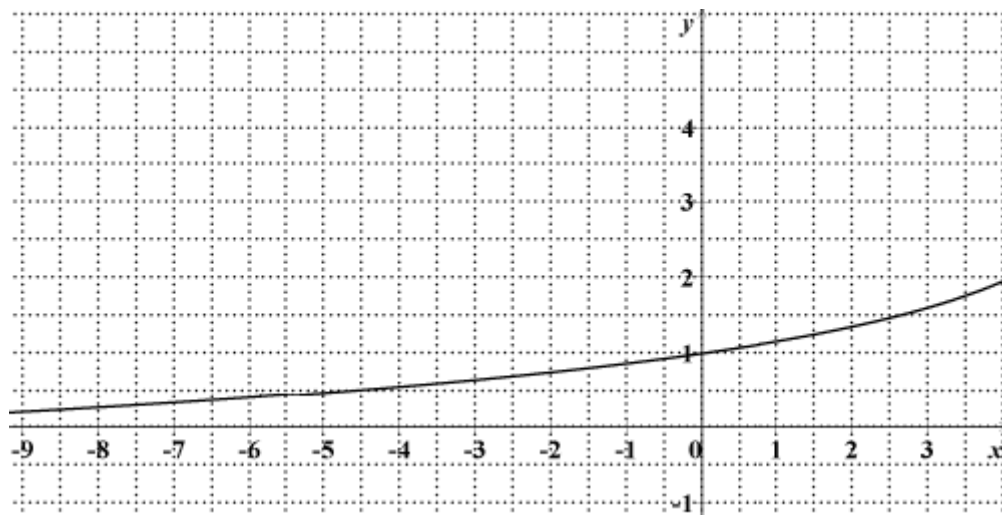
$$f\left(\frac{x}{a^y}\right) = f(x) - f(a^y) = f(x) - y f(a) = f(x) - y = 0 = f(1)$$

Donc par injectivité :  $\frac{x}{a^y} = 1$  d'où  $x = a^y$

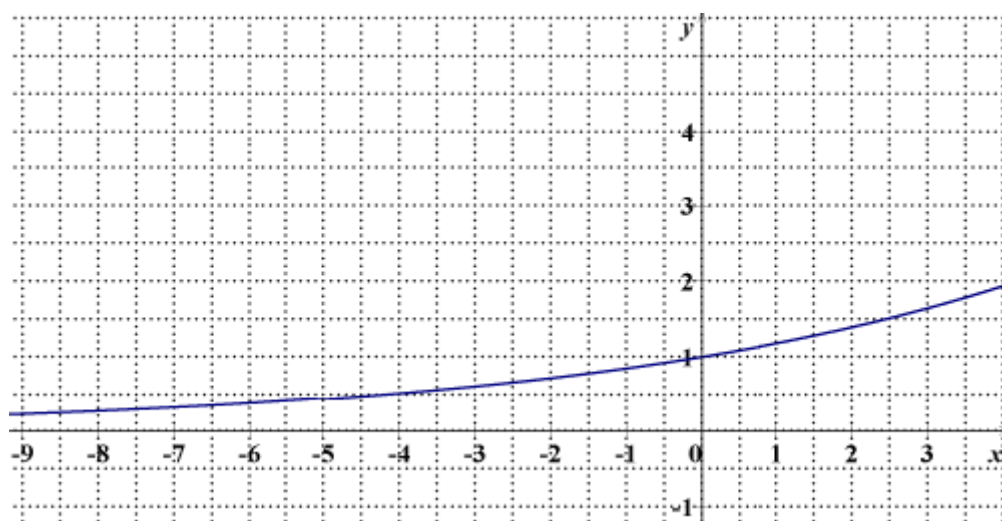
(10) **f est la réciproque de l'exponentielle de base a**

**Deux courbes très proches (l'une logarithmique et l'autre exponentielle)**

Graphe de  $y = 2.55 - 2\log(6-x)$  :



Graphe de  $y = 1.18^x$  :



## Suites arithmétiques et géométriques : résumé algébrique

### Suites arithmétiques

Terme général :

$$U_n = U_1 + r(n-1) = (U_1 - r) + r n$$

Raison :

$$r = U_2 - U_1 = U_{p+1} - U_p = \frac{U_q - U_p}{q - p} \quad (\text{où } q > p)$$

Premier terme :

$$U_1 = U_p - r(p-1)$$

Rang d'un terme  $T$  :

$$n = 1 + \frac{T - U_1}{r} = \frac{T - (U_1 - r)}{r}$$

Somme des  $n$  premiers termes :

$$\sum_{p=1}^n U_p = \frac{n(U_1 + U_n)}{2} = n U_1 + r \frac{n(n-1)}{2}$$

\*

### Suites géométriques

Terme général :

$$U_n = U_1 r^{n-1} = \left(\frac{U_1}{r}\right) r^n$$

Raison :

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_{p+1}}{U_p} = \sqrt[q-p]{\frac{U_q}{U_p}} \quad (\text{où } q > p)$$

Premier terme :

$$U_1 = \frac{U_p}{r^{p-1}}$$

Rang d'un terme  $T$  :

$$n = 1 + \log_r\left(\frac{T}{U_1}\right) = \log_r\left(\frac{r T}{U_1}\right)$$

Somme des  $n$  premiers termes :

$$\sum_{p=1}^n U_p = \frac{U_1 - r U_n}{1 - r} = U_1 \left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$$

## Une application des suites arithmétiques à la chimie

Dans un atome, le nombre d'orbitales dont le premier nombre quantique vaut  $N$  est égal à

$$\sum_{L=0}^{L=N-1} 2L+1 = N^2$$

(où  $L$  représente le deuxième nombre quantique et  $2L+1$  le nombre de possibilités pour le troisième nombre quantique).

Et le nombre total d'orbitales dont le premier nombre quantique est au plus égal à  $N$  donne :

$$\sum_{K=1}^{K=N} K^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

## Le problème de l'induction

Pour chacune des suites ci-dessous, quel est le dixième terme ?

- |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| a) | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| b) | 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| c) | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 |

Vous avez probablement répondu :

- a) 10
- b) 20
- c) 34

Pourquoi pas ? Mais aurions-nous pu répondre :

- a) 74
- b) 37
- c) 100

Tout à fait ! Voulez-vous des formules qui correspondent à ces réponses ? En voici :

- a)  $n + \frac{64}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$
- b)  $2n + \frac{17}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$
- c)  $3n + 4 + \frac{66}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$

De même, si je veux une formule vérifiant les conditions suivantes :

$$U_n = n^2 \quad \text{pour } n \text{ variant de } 1 \text{ à } 999 \quad \text{et} \quad U_{1000} = 1'000'273 ,$$

$$\text{je peux choisir : } U_n = n^2 + \frac{273}{999!} \prod_{p=1}^{999} (n-p)$$

\*

Voulons-nous une formule qui donne

les termes d'une suite arithmétique jusqu'au rang 999'999'999,

puis les termes d'une suite géométrique à partir du rang 1'000'000'000 ?

C'est possible.

$$\text{La suite : } V_n = 0.5 \left[ \left( 1 - \frac{\sqrt{(n-10^9+0.5)^2}}{n-10^9+0.5} \right) (2n-1) + \left( 1 + \frac{\sqrt{(n-10^9+0.5)^2}}{n-10^9+0.5} \right) 10^{-n \cdot 10^{-8}} \right] \text{ donne :}$$

$$2n-1 \quad \text{pour } n \text{ variant de } 1 \text{ à } 999'999'999 \quad \text{et} \quad 10^{-n \cdot 10^{-8}} \quad \text{pour } n \geq 1'000'000'000$$

Bref, elle donne les nombres impairs :

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \quad 21 \quad 23 \quad \text{etc.}$$

$$\text{jusqu'à } V_{999'999'999} = 1'999'999'997 ,$$

puis elle passe brusquement à :

$$V_{1'000'000'000} = 0.000'000'000'1$$

\*

Est-il toujours possible de trouver une formule qui corresponde aux  $m$  premiers termes d'une suite, quelle que soit la valeur de  $m$  et quels que soient ces termes ? La réponse est oui.

Une formule de Newton (dite d'interpolation polynomiale) permet de le faire. Examinons cette formule sur un exemple.

À partir d'une suite dont nous connaissons les six premiers termes, construisons les différences, puis les différences de différences, puis les différences de différences de différences, etc.

| $U_1$ | $U_2$ | $U_3$ | $U_4$ | $U_5$ | $U_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 11    | 21    | 55    | 125   | 243   | 421   |
|       | 10    | 34    | 70    | 118   | 178   |
|       |       | 24    | 36    | 48    | 60    |
|       |       |       | 12    | 12    | 12    |
|       |       |       |       | 0     | 0     |
|       |       |       |       |       | 0     |

Posons :  $\alpha_0 = U_1 = 11$   
 $\alpha_1 = 1^{\text{er}}$  nombre de la 1<sup>re</sup> ligne de différences = 10  
 $\alpha_2 = 1^{\text{er}}$  nombre de la 2<sup>e</sup> ligne de différences = 24  
 $\alpha_3 = 1^{\text{er}}$  nombre de la 3<sup>e</sup> ligne de différences = 12  
 etc.

La formule :

$$U_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}(n-1) + \frac{\alpha_2}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{\alpha_3}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) + \dots \quad (\text{avec } n \geq 1)$$

donne tous les termes du tableau.

Dans cet exemple, cette formule devient :

$$U_n = 11 + 10(n-1) + \frac{24}{2}(n-1)(n-2) + \frac{12}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = 2n^3 - 4n + 13$$

Si, maintenant, nous voulons prolonger la suite par un septième terme quelconque  $U_7 = T$ , nous pouvons prendre la formule suivante :

$$U_n = 2n^3 - 4n + 13 + \frac{(T-671)}{6!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$$

où 671 est la valeur de  $2n^3 - 4n + 13$  pour  $n = 7$ .

Cela signifie que, si nous connaissons les  $m$  premiers termes d'une suite, il est possible de la prolonger n'importe comment et nous disposons d'une infinité de formules polynomiales pour le faire.

À un autre niveau, celui de l'épistémologie, nous pouvons dire que, pour rendre compte en science d'un nombre fini de données, il existe une infinité de modèles possibles.

C'est le problème de l'induction, étudié par des philosophes comme Sextus Empiricus, David Hume, Nelson Goodman, Karl Popper, Willard Van Orman Quine, etc.

\*

À la question : « Quel terme prolonge la suite 2, 4, 6, 8, 10, ... ? », il est important de comprendre que 12 n'est pas la bonne réponse, tant que nous n'avons aucune information sur la nature de la suite.

Pour cela, l'histoire de la dinde de Russell est exemplaire. Une dinde est toute joyeuse, car elle constate que sa ration de nourriture augmente chaque jour. Dans sa conscience de dinde, elle se dit (je traduis en français pour ceux qui ne connaissent pas la langue dinde) : « L'expérience me confirme une loi générale : ma quantité de nourriture augmente chaque jour. Donc, demain, je recevrai davantage de nourriture qu'aujourd'hui. » Eh bien non ! car le lendemain, c'est Noël et la dinde est tuée pour être mangée...

Trouver un terme général possible pour une suite dont les cinq premiers termes sont :  
2, 4, 6, 8, 10

Voici de nombreuses réponses intéressantes.

Suite presque partout nulle :

$$u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=1 \\ 4 & \text{si } n=2 \\ 6 & \text{si } n=3 \\ 8 & \text{si } n=4 \\ 10 & \text{si } n=5 \\ 0 & \text{si } n>5 \end{cases}$$

Suite périodique :

$$u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{5} \\ 4 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{5} \\ 6 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{5} \\ 8 & \text{si } n \equiv 4 \pmod{5} \\ 10 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

Suite polynomiale, par exemple :

$$u_n = 2n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

Suite exponentielle, par exemple :

$$u_n = \left(\frac{-16}{135}\right) \cdot 2^{n-1} + \left(\frac{31}{8}\right) \cdot 3^{n-1} + \left(\frac{-23}{9}\right) \cdot 5^{n-1} + \left(\frac{17}{20}\right) \cdot 7^{n-1} + \left(\frac{-11}{216}\right) \cdot 11^{n-1}$$

\*

La réalité scolaire fait que vous serez peut-être amenés dans un examen à devoir résoudre des tâches telles que :

Soit la suite  $U_n$  dont les 5 premiers termes sont :

7                      10                      13                      16                      19

Trouver le terme général de cette suite.

Il y a une infinité de réponses possibles. Mais, dans le cadre scolaire, il est attendu de vous une exploration restreinte à des types classiques de suites.

Ainsi, dans la suite ci-dessus, le but est :

de constater que la différence de deux termes consécutifs vaut 3 ; d'en induire que  $U_n$  est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 7 ; de livrer la formule :  $U_n = 7 + 3 \cdot (n - 1) = 3n + 4$

**Dénombrement des cas possibles  
pour une sélection de  $r$  éléments parmi  $n$  éléments distincts**

|                                                                                                                                      | Sélection ordonnée<br>(Permutations USA)<br>(Arrangements FR) |                                   | Sélection non<br>ordonnée<br>(Combinaisons)       | Sélection ni<br>totalement<br>ordonnée ni<br>totalement<br>non ordonnée |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Les éléments de la<br>sélection sont<br>distincts<br>( $r \leq n$ ).                                                                 | $A_r^n$<br>ou<br>$P_r^n$<br>$= \frac{n!}{(n-r)!}$             | si $r = n$<br><br>$P^n$<br>$= n!$ | simples<br><br>$C_r^n$<br>$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$ | ?                                                                       |
| Les éléments de la<br>sélection ne sont pas<br>nécessairement<br>distincts ; chacun<br>peut être librement<br>répété.                | $\overline{A}_r^n$<br>ou<br>$\overline{P}_r^n$<br>$= n^r$     |                                   | $\overline{C}_r^n$<br>$= C_r^{n+r-1}$             | ?                                                                       |
| Les éléments de la<br>sélection ne sont pas<br>nécessairement<br>distincts, mais les<br>répétitions possibles<br>ne sont pas libres. | ?                                                             |                                   | ?                                                 | ?                                                                       |

## Généralisation des formules pour $P^n$ et pour $C_r^n$

Soit une partition de l'entier  $n$  en  $k$  entiers :  $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$

La formule :  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

(qui donne  $P^n$  si tous les  $n_j$  valent 1, pour  $j$  entier variant de 1 à  $k$ ,  
et qui donne  $C_r^n$  si  $k=2$  et  $n_1=r$  )

peut être interprétée d'au moins deux manières :

a) elle dénombre les permutations de  $n$  éléments, dont un est présent  $n_1$  fois, un autre  $n_2$  fois, etc., le dernier étant présent  $n_k$  fois.

b) elle dénombre des listes de combinaisons simples, où le premier élément de la liste est une combinaison de  $n_1$  éléments distincts choisis dans un ensemble de  $n$  éléments distincts, où le second élément de la liste est une combinaison de  $n_2$  éléments distincts choisis parmi les  $n - n_1$  éléments qui n'ont pas été choisis avant, etc. Autrement dit :

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = C_{n_1}^n \cdot C_{n_2}^{n-n_1} \cdot C_{n_3}^{n-n_1-n_2} \dots C_{n_k}^{n_k}$$

## L'analyse combinatoire expliquée à ma poule

Pour tout  $k$  entier  $> 0$ , notons  $\llbracket 1 ; k \rrbracket$  l'ensemble des entiers consécutifs de 1 à  $k$ .

Soient  $p$  et  $n$  des entiers  $> 0$ .

$\overline{A}_p^n = n^p$  est le nombre d'applications de  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$

$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$  est le nombre d'applications injectives de  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$

$P^n = A_n^n = n!$  est le nombre d'applications bijectives de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$

$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  est le nombre d'applications strictement croissantes  
de  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$

$\overline{C}_p^n = C_p^{n+p-1}$  est le nombre d'applications croissantes de  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$

$p! S(n, p) = \sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} C_j^p j^n$  est le nombre d'applications surjectives  
de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$   
(les  $S(n, p)$  sont les nombres de Stirling  
de seconde espèce)

## De combien de manières pouvons-nous placer $n$ balles dans $k$ boîtes ?

### Notations

$$[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$A_n^k = (k)_n = \frac{k!}{(k-n)!} \quad \text{si } n \leq k \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon}$$

$$\text{Coefficients binomiaux : } \binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!} \quad \text{si } n \leq k \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon}$$

$$\text{Coefficients multinomiaux : si } n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \quad (\text{avec des entiers naturels}), \text{ alors } \binom{n}{\lambda_1, \dots, \lambda_k} = \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_k!}$$

$S(n, k)$  = nombres de Stirling de seconde espèce

$B(n)$  = nombres de Bell

$p(n, k) = p_k(n)$  = nombre de partitions de l'entier  $n$  en  $k$  parts

$p(n)$  = nombre de partitions de l'entier  $n$

| balles par boîte :                                        | pas de restrictions                                                                                                        | au plus une                                                                 | au moins une                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| balles distinguables<br>et boîtes distinguables :         | $k^n$<br>arrangements avec<br>répétitions                                                                                  | $A_n^k$<br>arrangements simples<br><br>cas particulier :<br>$n!$ si $n = k$ | $k! S(n, k)$<br>partitions de $[n]$<br>en $k$ parties ordonnées<br><br>cas particulier :<br>$n!$ si $n = k$ |
| balles distinguables<br>et boîtes non distinguables :     | $\sum_{i=1}^k S(n, i)$<br>partitions de $[n]$<br>en au plus $k$ parties<br><br>cas particulier :<br>$B(n)$ si $n = k$      | 0 si $n > k$<br>1 si $n \leq k$                                             | $S(n, k)$<br>partitions de $[n]$<br>en $k$ parties                                                          |
| balles non distinguables<br>et boîtes distinguables :     | $\binom{k}{n} = \binom{n+k-1}{n}$<br>combinaisons avec<br>répétitions                                                      | $\binom{k}{n}$<br>combinaisons simples                                      | $\binom{n-1}{k-1}$<br>compositions de l'entier $n$<br>en $k$ parts                                          |
| balles non distinguables<br>et boîtes non distinguables : | $\sum_{i=1}^k p(n, i)$<br>partitions de l'entier $n$<br>en au plus $k$ parts<br><br>cas particulier :<br>$p(n)$ si $n = k$ | 0 si $n > k$<br>1 si $n \leq k$                                             | $p(n, k)$<br>partitions de l'entier $n$<br>en $k$ parts                                                     |

Et avec un nombre imposé de balles dans chaque boîte :

|                                                   |                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| balles distinguables<br>et boîtes distinguables : | $\binom{n}{\lambda_1, \dots, \lambda_k}$<br>si $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ et si la boîte numéro $i$ reçoit $\lambda_i$ balles |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Ajoutons encore que la somme sur  $k$  des partitions de  $[n]$  en  $k$  parties ordonnées donne les nombres de Fubini :

$$\sum_{k=1}^n k! S(n, k) = F_n$$

## Un jésuite s'amuse

Un hétérogramme est un mot formé de lettres différentes. Au 17<sup>e</sup> siècle, le savant jésuite suisse Paul Guldin calcule le nombre d'hétérogrammes possibles avec un alphabet de 23 lettres. Il s'agit de sommer des arrangements simples :

$$\sum_{k=1}^{23} A_k^{23} = \sum_{k=1}^{23} \frac{23!}{(23-k)!} = \sum_{j=0}^{22} \frac{23!}{j!} = 23! \sum_{j=0}^{22} \frac{1}{j!} \approx 23! e \approx 7 \cdot 10^{22}$$

Guldin étudie en détail combien de livres il faudrait pour écrire tous ces mots et combien de bibliothèques pour contenir tous ces livres. Il démontre qu'avec des constructions cubiques de 432 pieds de côté, la surface terrestre ne suffirait pas. Clavius, Mersenne et Leibniz ont envisagé des problèmes du même genre.

## Analyse combinatoire des schémas de rimes

Notons :

$S(n, k)$  = le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal  $n$  en  $k$  sous-ensembles non-vides.

$b(n, k)$  = le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal  $n$  en  $k$  sous-ensembles, chacun de cardinal strictement supérieur à 1.

Les  $S(n, k)$  (appelés *Nombres de Stirling de 2<sup>e</sup> espèce*) et les  $b(n, k)$  (appelés *Nombres associés de Stirling de 2<sup>e</sup> espèce*) dénombrent les schémas de rimes qu'on peut appliquer à une strophe de  $n$  vers, si l'on impose exactement  $k$  rimes, en admettant (quand on emploie  $S(n, k)$ ) et en excluant (quand on emploie  $b(n, k)$ ) les vers blancs parmi ces  $k$  rimes. Pour mémoire, un vers blanc est un vers qui ne rime avec aucun autre.

*Par exemple*

AABACBA est un schéma à 3 rimes (A, B, C) appliqué à une strophe de 7 vers, avec un vers blanc : C

AABBCCA est un schéma à 3 rimes (A, B, C) appliqué à une strophe de 7 vers, sans vers blanc.

Dénombrons les schémas de rimes qu'on peut appliquer à une strophe de 7 vers

- a) si l'on admet les vers blancs et si l'on impose exactement 2 rimes ;
- b) si l'on exclut les vers blancs et si l'on impose exactement 2 rimes ;
- c) si l'on admet les vers blancs et si l'on impose exactement 3 rimes ;
- d) si l'on exclut les vers blancs et si l'on impose exactement 3 rimes.

*Réponses*

- a)  $S(7, 2) = 2^6 - 1 = 63$
- b)  $b(7, 2) = S(7, 2) - 7 = 56$
- c)  $S(7, 3) = \frac{1}{2}(3^6 + 1) - 2^6 = 301$
- d)  $b(7, 3) = 105$

*Cas particuliers*

$b(4, 2)=3$  dénombre les schémas à 2 rimes (sans vers blancs) qu'on peut appliquer à un quatrain :

|      |                  |
|------|------------------|
| AABB | rimes plates     |
| ABAB | rimes croisées   |
| ABBA | rimes embrassées |

$b(5, 2)=S(5, 2)-5=2^4-1-5=10$  dénombre les schémas à 2 rimes (sans vers blancs) qu'on peut appliquer à une strophe de 5 syllabes (voir plus loin, dans la partie *Mathématiques au service de la création littéraire*, un poème construit de manière à illustrer ces 10 possibilités).

*En route vers le plus large*

Quand on somme sur  $k$  les  $S(n, k)$  (respectivement les  $b(n, k)$ ), on obtient les *Nombres de Bell* (respectivement les *Nombres associés de Bell*), qui dénombrent tous les schémas de rimes, en admettant (respectivement en excluant), qu'on peut appliquer à une strophe de  $n$  vers.

*Par exemple*

Pour  $n=3$ , les schémas (avec possiblement des vers blancs) sont les 5 suivants : ABC, AAA, AAB, ABA, ABB.

Et, sans vers blancs, il n'y en a qu'un seul : AAA

*Culture japonaise*

Dans un article du *Scientific American*, Martin Gardner signale que les 52 schémas de rimes (en admettant les vers blancs) qu'on peut appliquer à une strophe de 5 vers ont été représentés par des diagrammes dans un classique de la littérature japonaise, *Les Contes de Gengi*, écrit vers l'an mil par Lady Murasaki.

*En route vers le plus restreint*

Le problème du dénombrement des schémas de rimes est plus simple quand on fixe à la fois le nombre de rimes et le nombre d'occurrences de chacune.

*Par exemple*

Dénombrons les schémas de rimes qu'on peut appliquer à une strophe de 10 vers, si l'on impose 4 rimes distinctes : 3 d'entre elles ayant 2 occurrences, et 1 ayant 4 occurrences (comme dans ABBCDDADCD).

*Réponse*

$$\frac{\left( \frac{10!}{2!2!2!4!} \right)}{3!} = 3150$$

*Itinéraires plus complexes*

Il est possible de chercher à dénombrer des schémas de rimes en fixant des conditions variées. Un article que j'ai publié dans le numéro 40 de *Quadrature* propose une formule pour dénombrer les schémas irréductibles.

Le schéma ABABCDC est réductible, parce qu'il peut être décomposé en ABAB et CDC, où les deux parts n'ont aucune rime en commun.

Le schéma AABACBC est irréductible.

## La question du manque de clarté des énoncés

En analyse combinatoire, il arrive assez fréquemment – que ce soit dans des cours, des livres ou même des examens – que des énoncés manquent de clarté, en général par volonté d’être bref. Voici un exemple d’énoncé peu clair :

*On lance trois dés. Combien y a-t-il de résultats possibles ?*

Le manque de précision nous contraint à faire des hypothèses. Voici trois réponses possibles selon les hypothèses que nous adoptons.

### Première réponse :

Si nous supposons que seuls les numéros nous intéressent (peu nous importe de savoir quel dé livre quel numéro), nous prenons la décision de dénombrer des sacs de 3 nombres, comme  $\{\{3 ; 3 ; 5\}\}$ . Nous avons affaire à des combinaisons avec répétitions (de 3 parmi 6). Il y en a 56.

### Deuxième réponse :

Si nous supposons que nous devons distinguer les 3 dés (notons-les A, B, C) et qu’il nous importe de savoir quel dé livre quel numéro, nous prenons la décision de dénombrer des ensembles de couples, comme  $\{A2 ; B4 ; C4\}$ . Nous avons affaire à des arrangements avec répétitions (de 3 parmi 6). Il y en a 216.

### Troisième réponse :

Si nous supposons que nous devons non seulement distinguer les 3 dés (A, B, C), mais aussi distinguer l’ordre de ces 3 dés (par exemple selon la distance de chaque dé à un point fixe, avec l’hypothèse supplémentaire que deux dés ne peuvent pas être exactement à la même distance), nous prenons la décision de dénombrer des listes de couples, comme  $[B3 ; A4 ; C3]$ . Nous avons affaire à une composition d’arrangements avec répétitions (de 3 parmi 6) et de permutations (de 3). Il y en a 1'296.

Autre exemple

*D'une urne contenant 20 boules numérotées de 1 à 20,  
on tire successivement (sans remise) 3 boules.  
Combien y a-t-il de possibilités ?*

Est-il évident qu'il convient de dénombrer des arrangements et non pas des combinaisons ? Il me semble que non. L'énoncé ne précise pas si les possibilités que nous souhaitons considérer sont des listes ordonnées ou des ensembles non ordonnés. Prenons le cas de la loterie à numéros. C'est un jeu qui se déroule selon une procédure de tirage ordonné (sans remise) de boules numérotées; mais, en fin de compte, on s'intéresse à des combinaisons et non pas à des arrangements. Cet exemple (ou celui des mains au poker) me donne à penser qu'une procédure de tirage ne suffit pas nécessairement à déterminer si l'ordre compte ou non. Attribuer ou non de l'importance à l'ordre dépend de la « règle du jeu » que nous voulons fixer.

Encore un exemple

*Une salle de classe comporte 24 pupitres, disposés en 4 rangées de 6.  
Dans le cours MA2-09, il y a 15 élèves.  
Le professeur décide de choisir 6 élèves pour remplir le premier rang.  
Combien a-t-il de possibilités ?*

Il se peut que le professeur n'accorde de l'importance qu'au fait que le premier rang soit plein, sans se soucier de l'ordre dans lequel les élèves soient assis. Dans ce cas, la réponse est  $C_6^{15}$ . Il se peut que le professeur accorde aussi de l'importance à la disposition des élèves dans cette rangée. Dans ce cas, la réponse est  $A_6^{15}$ .

Et un dernier

*Dans un ensemble de 10 personnes, on veut en choisir 3 pour une mission.  
Combien y a-t-il de possibilités ?*

Si les personnes ne doivent pas remplir des fonctions différentes :  $C_3^{10}$

Si un chef de mission doit être désigné, mais que les deux autres personnes ne doivent pas remplir de fonctions particulières :  $3 \cdot C_3^{10}$

Si les 3 personnes doivent remplir 3 fonctions différentes :  $A_3^{10}$

Si les 3 personnes doivent remplir 3 fonctions différentes, mais que ces fonctions seront attribuées ultérieurement et que, dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à des ensembles de 3 :  $C_3^{10}$

**Deux « visions » des probabilités.**

- ♠ Une vision purement mathématique, ensembliste, pose des notions a priori et fait l'impasse sur les aspects temporels, sur la manière concrète d'établir des probabilités élémentaires.
- ♦ Une vision « fréquentiste » fixe les probabilités élémentaires comme des valeurs limites de fréquences observées. Ainsi Buffon, au 18<sup>e</sup> siècle, a lancé une pièce de monnaie 4'040 fois. La fréquence des F était de 50.69 %. Pearson, au début du 20<sup>e</sup> siècle, a obtenu une fréquence des F de 50.05 % en lançant une pièce 24'000 fois.

Ces deux visions soulèvent des questions philosophiques. Des désaccords persistent. Certains paradoxes semblent venir d'un conflit entre une notion « réaliste » de probabilité, où le monde physique joue un rôle, et une notion « idéaliste » ou « formaliste » de probabilité, où le monde physique est ignoré. Il n'est pas simple de définir le « sens » de la probabilité en mécanique quantique. Que pourrait signifier l'expression « hasard pur » ? Question difficile...

## Évaluation intuitive des probabilités

De nombreuses expériences de psychologie cognitive, notamment celles de Tversky et Kahneman qui valurent au second le prix Nobel d'économie en 2002, montrent que la plupart des gens évaluent des probabilités de manière erronée dans bien des situations. Quelques résultats classiques :

- ♥ Majoritairement, les gens pensent qu'à longueur égale, certaines séquences de « Pile » et de « Face » sont plus probables que d'autres.
- ♦ Les faibles probabilités sont souvent surestimées et les fortes sous-estimées.
- ♣ Souvent les gens surestiment les probabilités des événements qui leur sont favorables et sous-estiment celles des événements qui leur sont défavorables.
- ♠ Souvent les gens surestiment un risque dans les jours qui suivent une catastrophe ayant marqué les esprits.
- ♥ Souvent les gens sous-estiment par exemple leur risque d'avoir un accident de la route s'ils n'en ont jamais eu.
- ♣ Majoritairement, les gens surestiment les probabilités de la forme  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \text{etc})$  et sous-estiment celles de la forme  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \text{etc})$

♣♠ En 1979, les USA étaient en crise à la suite d'une prise d'otages à l'ambassade américaine de Téhéran. Une opération commando (Eagle Claw) en 5 étapes fut conçue par plusieurs administrations (CIA, Navy, Air Force, etc.). Cette opération fut autorisée par le président Jimmy Carter. Pourquoi ? Parce que les responsables de chaque étape avaient jugé que la partie qu'ils dirigeaient avait des chances raisonnables de réussite. L'opération échoua. Après coup, Philip Rozenzweig demanda aux responsables d'évaluer la probabilité de réussite de leur étape. Ils donnèrent des estimations comprises entre 70 % et 90 %. Si on prend une moyenne de 80 % et qu'on fait l'hypothèse, certes un peu abusive, de l'indépendance des 5 étapes, la probabilité de réussite de l'opération était de  $0.8^5 = 31.8\%$ , ce qui n'est pas très élevé. Un expert donna des évaluations plus pessimistes. Il attribua aux 5 étapes des probabilités de réussite de respectivement : 75 %, 60 %, 70 %, 65 % et 55 %. La probabilité composée de la réussite de l'opération vaut alors 11 %. S'il avait été en possession de tels chiffres, Jimmy Carter aurait-il donné le feu vert ?

♣♥ En 1999, un tribunal condamna Sally Clark à la prison à vie. L'accusation soutenait que cette femme avait commis un double meurtre de nourrissons. Son argumentation reposait sur un emploi d'abusif de la formule  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$  dans une situation médicale rare. Rappelons que cette formule n'est vraie que si  $A_1$  et  $A_2$  sont indépendants. Or ce n'était pas le cas... En 2003, la condamnation fut annulée suite au réexamen du dossier.

## Moyenne et médiane des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique

### Théorème

Pour une suite arithmétique, la moyenne des  $n$  premiers termes est égale à la médiane.

### Preuve

Soit une suite arithmétique  $U$  de premier terme  $a$  et de raison  $r$

Le terme général vaut  $U_n = a + (n-1)r$

La moyenne des  $n$  premiers termes vaut  $\frac{U_1 + U_n}{2} = \frac{a + a + (n-1)r}{2} = a + \left(\frac{n-1}{2}\right)r$

Si  $n$  est impair, la médiane est  $U_{\frac{n+1}{2}} = a + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)r = a + \left(\frac{n-1}{2}\right)r$

Si  $n$  est pair, la médiane est  $\frac{U_{\frac{n}{2}} + U_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{a + \left(\frac{n}{2} - 1\right)r + a + \left(\frac{n}{2}\right)r}{2} = a + \left(\frac{n-1}{2}\right)r$

### Application

Soit un jeu de 52 cartes. Si on attribue aux cartes les valeurs suivantes :

As = 1, Deux = 2, Trois = 3, ....., Dix = 10, Valet = 11, Dame = 12, Roi = 13

La valeur moyenne est égale à la médiane, c'est-à-dire à  $14/2 = 7$

La somme des valeurs des 52 cartes donne donc 52 fois 7, soit 364.

## « Interprétation graphique » de l'écart-type

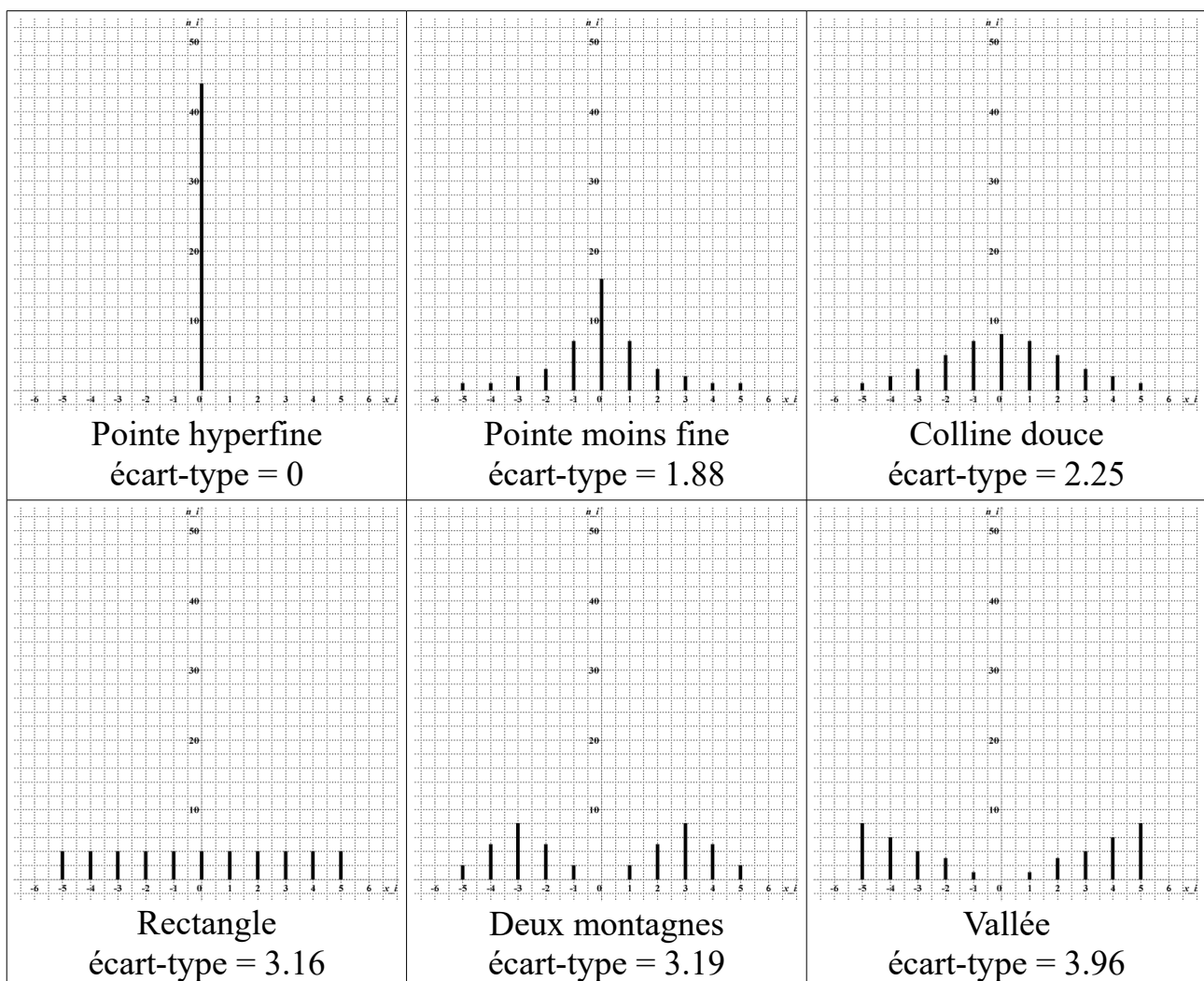
Considérons un même caractère, étudié sur plusieurs populations.  
Supposons que ces populations présentent la même moyenne pour ce caractère.

Alors l'écart-type est  
une mesure comparative de dispersion de ce caractère autour de la moyenne.

L'écart-type est d'autant plus grand que le caractère est d'autant plus dispersé autour de la moyenne. Qu'est-ce que ça veut dire ? C'est une chose difficile à exprimer. En un premier temps, il est tentant de formuler une « vérité approximative » : dans de nombreuses situations, un caractère est d'autant plus dispersé autour de la moyenne que son diagramme en bâtons s'éloigne d'un aspect « pointu vers le haut ».

### Exemple 1

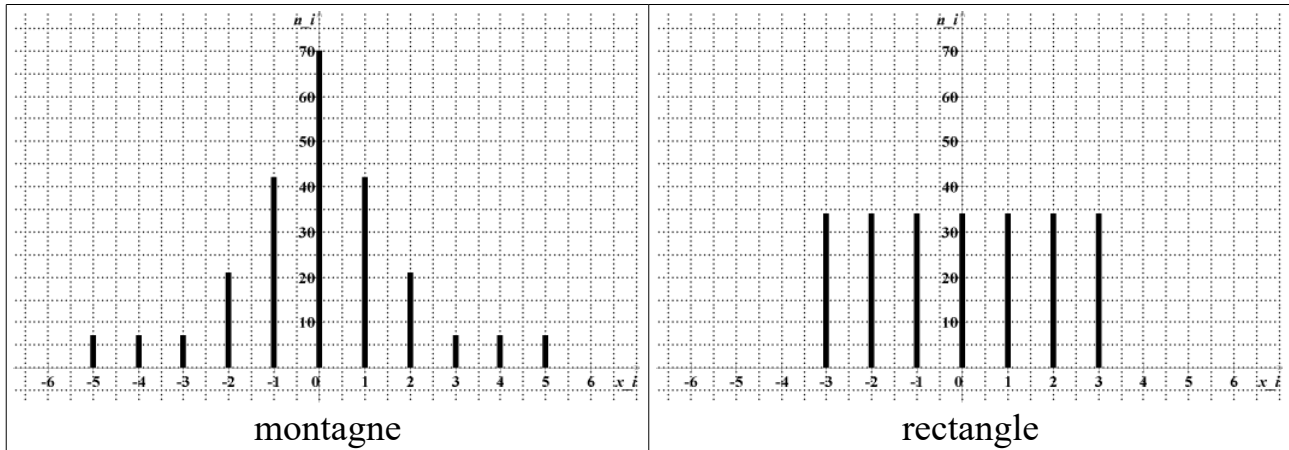
Ces 6 diagrammes présentent tous un effectif total de 44 et une moyenne de 0.  
Mais l'écart-type varie.



Mais les choses ne sont pas toujours aussi simples...

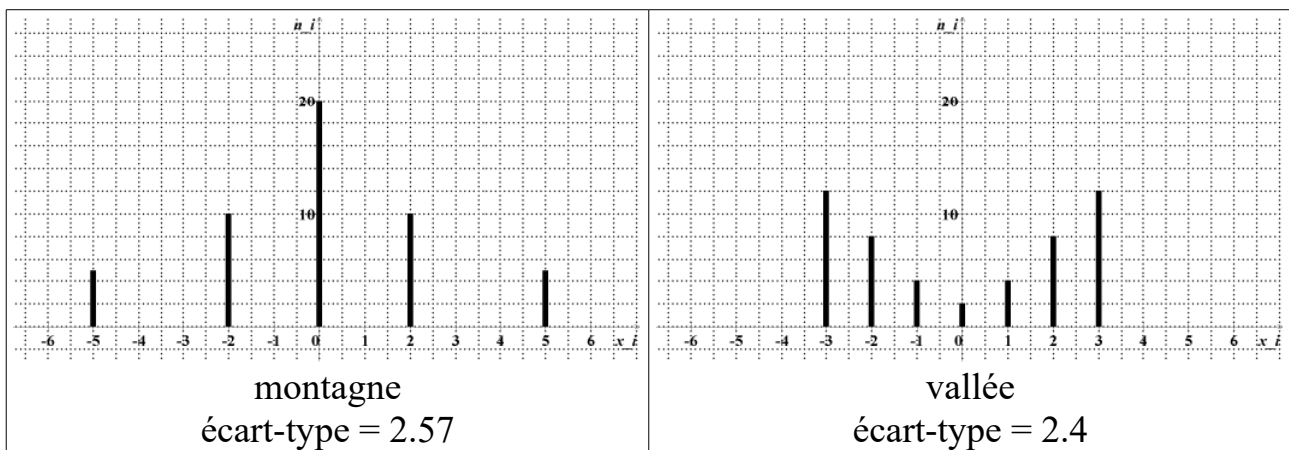
### Exemple 2

Ces diagrammes présentent tous deux un effectif total de 238, une moyenne de 0 et un écart-type de 2. Pourtant leur forme est très différente.



### Exemple 3

Ces diagrammes présentent tous deux un effectif total de 50 et une moyenne de 0. Pourtant l'écart-type de la « montagne » est plus grand que celui de la vallée.



\*

La notion d'écart-type est définie par une formule assez complexe ; son « interprétation » graphique ne se laisse pas exprimer de manière simple et précise.

## L'écart-type et les disparités dans les extrêmes

**Professeur A** : – Chaque année, notre école décerne 1000 diplômes. L'année dernière, la note moyenne était de 4.2 ; cette année, nous sommes parvenus à 4.4. Formidable ! Le niveau monte !

**Professeur B** : – Il n'y a pas de quoi se réjouir ! Comme nous le savons tous, seuls vont survivre les diplômés ayant une note d'au moins 5. Or, il y a un an, l'écart-type était de 0.8 ; donc le 5 était à une distance d'un écart-type de la moyenne. Cette année, l'écart-type est de 0.3 ; donc le 5 est situé à deux écarts-type de la moyenne. Les distributions étant gaussiennes, le nombre de diplômés qui vont survivre a été divisé par 7...

**Professeur C** : – Bon sang, mais c'est bien sûr ! Et ce phénomène peut expliquer bien des choses... Les hommes et les femmes ont le même QI moyen, mais les écarts-type diffèrent, de sorte qu'il y a 3 fois plus d'hommes que de femmes dans la tranche des QI d'au moins 160.

**Professeur D** : – Certains savants se demandent si la suprématie des Noirs en athlétisme de haut niveau ne serait pas aussi plutôt une question d'écart-type que de moyenne.

**Professeur E** : – Reste à comprendre le pourquoi de ces différences d'écart-type...

## Un échantillon biaisé de citations sur la statistique

*Dans les situations critiques, quand on parle avec un calibre bien en pogne, personne ne conteste plus. Y a des statistiques là-dessus.*

Michel Audiard

*Les statistiques, c'est comme le bikini. Ce qu'elles révèlent est suggestif. Ce qu'elles dissimulent est essentiel.*

Aaron Levenstein

*Je ne crois aux statistiques que lorsque je les ai moi-même falsifiées.*

Winston Churchill

*On peut tout démontrer avec des statistiques et surtout l'existence de statisticiens.*

George Bernard Shaw

*Mettez un pied dans le four et l'autre dans un seau d'eau glacée. D'après les statisticiens, vous devriez vous sentir très à l'aise en moyenne.*

Bobby Bragan

*La statistique est une science moderne et positive. Elle met en lumière les faits les plus obscurs. Ainsi, dernièrement, grâce à des recherches laborieuses, nous sommes arrivés à connaître le nombre exact de veuves qui ont passé le Pont-Neuf pendant le cours de l'année 1860 : il y en avait 13'453... dont une douteuse.*

Eugène Labiche

*Alors que l'homme, dans son individualité, demeure insondable, dans une collectivité, il se fait certitude mathématique. On ne peut jamais prédire ce qu'un homme va faire, mais on peut dire avec précision ce qu'un nombre moyen fera. Les individus diffèrent, mais les moyennes restent constantes.*

Conan Doyle

\*

# **Délices et délires des statistiques**

Un professeur de Harvard, Michal Kosinski, a conçu une intelligence artificielle qui a analysé les visages de plus d'un million d'Américains, de Britanniques et de Canadiens à partir de photos. En isolant 2048 vecteurs faciaux, ce système peut déterminer avec un taux de réussite de 72% si la personne dont le visage a été analysé vote politiquement à gauche ou à droite. À titre de comparaison, le taux de réussite d'un être humain pour effectuer la même tâche est de 55%. Donc non seulement l'intelligence artificielle est plus efficace, mais – et c'est ça le plus étonnant – il y a un lien statistique entre le visage et la sensibilité politique. Peut-être que l'intelligence artificielle va pouvoir lire d'autres choses sur le visage, comme la propension au crime, l'orientation sexuelle, l'intelligence mathématique, le talent artistique, etc. Les cabinets de recrutement disposeront d'un outil supplémentaire pour sélectionner les candidats à un poste. Lors des procès, le procureur pourra s'appuyer sur l'intelligence artificielle pour dire que l'accusé a une tête de criminel. D'ailleurs, des études semblent montrer que le visage de l'accusé joue un rôle dans le verdict. Les accusés ayant un gros nez, des sourcils épais, une mâchoire large seraient plus facilement condamnés (peut-être parce que ces traits masculins sont sculptés par la testostérone, hormone de l'agressivité et de l'égoïsme). Bref, des expressions comme « une tête de voyou », « une face d'abruti », « une gueule de pédé » recevront la caution de la technologie... Merveilleux !

\*

Il y a vraiment des sites internet qui prennent les gens pour des cons... Sur le site d'une TV canadienne, je lis que Thomas Jefferson avait un Q.I. de 153.8. Admirons la précision au dixième ! C'est d'autant plus remarquable que Jefferson est mort en 1826 et que le premier test de Q.I. apparaît au 20<sup>e</sup> siècle... J'imagine que cette valeur de 153.8 est obtenue en faisant la moyenne des évaluations fournies par des « experts » qui se sont penchés sur la biographie de Thomas Jefferson. C'est quand un même un procédé pour le moins hasardeux...

\*

Lourdes, la ville des miracles, est-elle sexiste ? Les guérisons miraculeuses concernent des femmes à 82% et des hommes à 18%. Intéressant...

\*

Article paru dans « Le Courrier » (octobre 2022) : « 80% des élèves disent avoir été discriminé-es ». Probablement un effet du matraquage de certains mots et de certaines idées. Dans les années 60, quand des camarades de classe m’embêtaient, je ne rentrais pas à la maison en disant à mes parents : « On me discrimine ! ». Je disais simplement : « Jean-Louis m’a embêté ! » ou « Adriano m’a embêté ! ». Et c’est une bonne chose que des gamins livrent bataille, du moment que ça se passe « à la loyale », un contre un, de forces à peu près égales. Se bagarrer fait partie d’une bonne éducation.

\*

Est-il nécessaire d’avoir un cerveau pour penser ? D’après une étude Ifop réalisée en 2023, on peut dire que 46% des Américains et 24% des Français pensent que ce n’est pas nécessaire, puisque ces pourcentages sont ceux des personnes qui déclarent croire aux fantômes. Or un fantôme est par définition un être non biologique (donc dépourvu de cerveau) qui peut communiquer avec les humains (ce qui suppose une forme de pensée). En fait, les proportions d’Américains et de Français qui pensent qu’il n’est pas nécessaire d’avoir un cerveau pour penser sont plus élevées que ça, car cette idée est implicite chez les esprits religieux qui accordent foi à une vie éternelle non biologique après la mort.

\*

En 2010, un sondage SOFRES montrait que 46% des Français pensent que les caractères s’expliquent par les signes astrologiques et 58% des Français pensent que l’astrologie est une science. L’école échoue, dans une large mesure, à développer l’esprit critique. Cela me fait penser à un article de Mircea Eliade sur le siècle des lumières. En commentant des études publiées dans les années 20 et 30, il souligne que la superstition, la fraude et la mystification paraissent mieux définir le siècle des lumières que le rationalisme. Aussi bien *l’Encyclopédie* de Diderot et d’Alembert que *la Cyclopaedia* de Chambers ou que *l’Universal Lexicon* de Zedler sont bourrées de superstitions et de mystifications. Selon Eliade, le siècle de la lucidité et de l’esprit critique est le 17<sup>e</sup>, alors qu’il y a au 18<sup>e</sup> une volonté de mystère sectaire, ésotérique, occulte qui conduit tout droit au charlatanisme et à l’hystérie. Quant au Moyen Âge, il se caractérise par une riche fantaisie symbolique, un mystère plus profond qui réside dans l’existence même du monde et qui donna les romans de chevalerie, les légendes eschatologiques, les drames mystiques.

\*

En étudiant de manière statistique le vocabulaire de millions de livres (en tous genres) et des articles du New-York Times, des sociologues ont trouvé que le vocabulaire de l'émotion et de l'intuition a reculé de 1850 à 1975, au profit de celui de la logique et de la raison ; mais la tendance s'est complètement inversée depuis.

Comme l'avait écrit Jean Romain à la fin du 20<sup>e</sup> siècle, nous sommes dans une période de « dérive émotionnelle ». Et ce phénomène, né dans les années « New Age », semble s'accroître avec les réseaux sociaux.

Un des mots à la mode est « le ressenti ». Les jeunes évoquent leur « ressenti » pour dire qu'ils se sentent blessés par des propos d'enseignants. Les « discriminés » évoquent aussi leur « ressenti ». Et de récentes lois vont dans ce sens, puisque les lois contre le harcèlement disent que « le ressenti de la victime doit avoir la priorité sur les intentions du présumé coupable ».

Il me semble qu'il manque un élément important à cette étude. Il aurait fallu aussi se pencher sur l'évolution du vocabulaire de la morale et des jugements de valeur. J'ai l'impression, peut-être fautive, que l'usage de ce vocabulaire est en augmentation en France depuis une vingtaine d'années. Surtout quand il s'agit de « condamner ».

Peut-être que cette tendance s'inscrit dans une tendance plus large qui consiste à suivre la pente de la facilité. En effet, porter des jugements moraux, c'est facile, c'est au niveau de n'importe qui, ça ne demande ni savoir vaste, ni profond pouvoir d'analyse. Pour reprendre une formule désabusée de Céline (à propos de l'amour), on pourrait dire que le jugement moral, c'est l'infini à la portée du caniche...

\*

Un sondage SOFRES réalisé en 2010 sur un échantillon représentatif de 1000 Français (où chacun pouvait donner 5 réponses) portait sur les valeurs morales. La 1<sup>re</sup> question était : « Quelles sont les valeurs les plus importantes au quotidien ? »

Réponses :

1. Politesse 62%
  2. Sincérité 50%
  3. Écoute 48%
  4. Sens des responsabilités 44%
  5. Gentillesse 41%
  6. Humour 39%
  7. Patience 32%
  8. Sens de l'effort 28%
- Etc.

La 2<sup>ème</sup> question était : « Quelles sont les valeurs qui manquent le plus au quotidien ? » Réponses :

1. Politesse 62%
  2. Écoute 47%
  3. Patience 42%
  4. Sincérité 42%
  5. Gentillesse 32%
  6. Sens de l'effort 31%
  7. Sens des responsabilité 29%
  8. Humour 26%
- Etc.

Ce qui est frappant, c'est que pour beaucoup de ces valeurs, le pourcentage est proche dans les deux listes. Cela donne à penser que, statistiquement, les valeurs considérées comme les plus importantes au quotidien sont aussi perçues comme celles qui manquent le plus.

Il me semble que c'est souvent au gré des circonstances et de ses états d'âme qu'une personne va se montrer polie ou non, sincère ou non, drôle ou non, patiente ou non, etc. Alors, que représentent ces valeurs morales ? S'agit-il simplement d'indicateurs statistiques des fantasmes actuels de société idéale ?

Si on compare ces valeurs françaises d'aujourd'hui avec celles du « Mos majorum » de la Rome antique, on est frappé par l'abîme qui les sépare. Fides, pietas, majestas, virtus, gravitas, constantia, frugalitas. Sans doute, ces valeurs n'étaient pas souvent respectées au quotidien (l'histoire romaine montre autant d'horreurs que l'histoire de n'importe quelle civilisation), mais au moins il s'en dégagait une certaine poésie. Ce qui manque le plus au discours moral de la France moderne, c'est précisément la dimension poétique. On est dans une morale de midinette qui lit « Psychologie magazine » et « Philosophie magazine »...

Jean-Didier Vincent raconte qu'un couple a tenté l'expérience d'élever ensemble un bébé humain et un bébé singe. Ces parents espéraient que le bébé chimpanzé tendrait vers un comportement plus humain en imitant le bébé humain. C'est l'inverse qui se produisit : le bébé humain développa un comportement simiesque. Il semblerait que la tendance à l'imitation soit chez l'humain plus puissante que chez le singe. On le voit dans les classes : quand un élève sérieux est assis à côté d'un élève au cerveau de ouistiti, c'est l'élève sérieux qui se transforme en ouistiti. Ça me fait penser à un dialogue dans un épisode de Dr House. Le Dr House s'interroge sur un taux de saturation d'oxygène légèrement anormal chez une patiente. Le Dr Foreman déclare : « Bah, son taux ne diffère que de 1 % du seuil de normalité, pas de quoi s'inquiéter ! » Et le Dr House réplique : « 1 % de différence dans son ADN et cette fille est un dauphin ! »

\*

Un épisode du Dr House s'intitule « Le rasoir d'Occam ». Dans cet épisode, le Dr House envisage l'hypothèse qu'un patient souffre simultanément de deux maladies indépendantes. Le Dr Foreman, lui, préfère l'hypothèse d'une seule maladie rare et rappelle alors le principe du rasoir d'Occam : si plusieurs théories expliquent les mêmes symptômes, il faut privilégier la plus simple. Or une seule maladie est une explication plus simple que deux maladies indépendantes. Le Dr House rétorque : « Pourquoi une serait plus simple que deux ? C'est moins élevé, plus isolé... mais est-ce plus simple ? Chacune des conditions indépendantes que je postule correspond à environ une chance sur mille. Cela signifie qu'il y a une chance sur un million que les deux aient lieu en même temps. Chase pense qu'il y a une chance sur dix millions qu'il s'agisse d'une infection cardiaque, ce qui fait que mon idée est dix fois meilleure que la vôtre. »

C'est intéressant à double titre :

1. Comment définir la « simplicité » d'une explication ?
2. Pouvons-nous donner une version moins « simple » du rasoir d'Occam, une version qui prendrait en compte une dimension probabiliste ?

Beaucoup de scientifiques ont un préjugé en faveur du rasoir d'Occam. Il s'agit bien d'un préjugé...

Le rasoir d'Occam a aussi des adversaires.

Dans « Le Politique », Platon a l'air de plaider contre le principe de parcimonie.

La question de la définition de la simplicité n'est pas simple.

La question d'incorporer les probabilités a été étudiée par Solomonoff, mais je ne comprends pas bien sa théorie.

\*

L'approche sociologique conditionne à penser en termes de statistiques, à voir les phénomènes humains à travers le filtre de la quantité, à mesurer l'importance d'un phénomène par un pourcentage. À l'inverse, le dandysme d'un Baudelaire, l'individualisme d'un Montherlant consistent à cultiver la singularité, à ne vouloir ressembler à personne, à échapper aux catégories sociologiques.

\*

De nombreuses études montrent que, dans beaucoup de domaines valorisés positivement, presque tout le monde se croit au-dessus de la moyenne. Or nous vivons dans une société démocratique où, contrairement à ce qu'affirmaient Baudelaire, Flaubert, Nietzsche, Berdaiev, Guenon et d'autres fortes têtes, l'avis de la majorité ne peut être que l'expression de la compétence. Donc il est urgent de modifier la définition de la moyenne, de telle manière que tout le monde soit effectivement au-dessus de la moyenne. Ce sera beaucoup plus facile d'enseigner les statistiques avec cette nouvelle moyenne. En plus, le taux de réussite aux examens sera de 100%, puisque tout le monde sera au-dessus de la moyenne. On n'en est pas loin. Il y a quelques années, Luc Ferry avait choqué les progressistes en disant une vérité, à savoir qu'aujourd'hui, pour ne pas avoir le bac, il fallait presque demander de ne pas l'obtenir.

\*

En sciences sociales, les chercheurs, pour donner un caractère scientifique à leurs travaux, privilégient l'outil statistique. Mais cet outil biaise la démarche en l'orientant vers des buts comme :

- former des catégories validées par l'analyse factorielle ;
- forger des notions qui permettent d'avoir les notions de moyenne et de positions éloignées de la moyenne.

On en arrive ainsi à élaborer de multiples questionnaires qui vont permettre de coller de nombreuses étiquettes sur chaque personne. Et ces étiquettes ont beaucoup de succès dans les médias, car elles fournissent au citoyen lambda un moyen simple d'apprendre à se connaître (ou plutôt d'en avoir l'illusion). Plein de gens tombent dans le panneau, s'auto-testent, s'auto-diagnostiquent hypersensibles, hyperactifs, etc. Pourtant, un questionnaire comme celui d'Aron sur l'hypersensibilité devrait laisser perplexe... Par exemple, quand je lis : « Avez-vous une vie intérieure riche et complexe ? », je me pose deux questions :

- 1) qui va répondre « non » ?
- 2) parmi ceux qui répondent « oui », la raison de cette réponse ne varie-t-elle pas énormément d'une personne à l'autre ?

La psychologie américaine, avec son obsession des questionnaires et des statistiques, m'énerve. C'est par définition une psychologie de la médiocrité, de la standardisation, des cacatégories.

\*

Un peu de patapsychologie...

Supposons qu'un « bon modèle » pour décrire le psychisme des êtres humains soit formé de seize « traits » définis par des variables aléatoires normales indépendantes. Pour chacun de ces traits, disons qu'une valeur distante d'au plus un écart-type de la moyenne est une « position centrée » et qu'une valeur distante d'au moins deux écarts-types de la moyenne est une « position extrême ». Notons qu'une valeur dont la distance à la moyenne est entre un et deux écarts-types n'est considérée ni comme centrée ni comme extrême. Nous pouvons parler de « position intermédiaire ».

Selon ce modèle, calculons quelques proportions.

Quelle est la proportion d'êtres humains ayant au moins une position extrême ? Le calcul donne entre 52% et 53%.

Quelle est la proportion d'êtres humains n'ayant que des positions centrées ? Le calcul donne environ 0,2%.

Quelle est la proportion d'êtres humains ayant au moins cinq positions (5 sur 16 représente 31,25%) qui ne sont pas centrées ? Le calcul donne environ 61%.

Bref, dans un tel modèle, un être humain sur deux a au moins une position extrême, un être humain sur cinq cents n'a que des positions centrées et trois êtres humains sur cinq n'ont pas de position centrée en ce qui concerne au moins 30% des traits qui composent leur psychisme.

\*

Une étude, réalisée par un chercheur français qui a dû beaucoup s'amuser, prouve qu'il existe une corrélation positive marquée entre le tour de poitrine d'une auto-stoppeuse et le nombre de voitures (conduites par des mâles) qui s'arrêtent pour la prendre. Si, de surcroît, l'auto-stoppeuse est blonde et vêtue de rouge, la probabilité qu'un conducteur embarque la pouliche augmente. C'est beau la science... ! Et il y a des gens qui sont payés pour faire des études pareilles, qui décrochent des doctorats avec de tels travaux... J'ai raté ma carrière, j'aurais dû devenir chercheur en psychologie sociale... Boulot rigolo, où il est facile de publier n'importe quoi...

\*

Des études de psychologie expérimentale ont montré le phénomène suivant : quand des hommes et des femmes sont en interaction, les performances cognitives des hommes baissent, tandis qu'elles restent inchangées chez les femmes. Une explication de ce phénomène pourrait être une force considérable des pensées sexuelles chez les mâles, qui envahiraient leur esprit et ne laisseraient pas beaucoup de place pour des opérations plus intelligentes. Un corollaire de ce phénomène est que les jeunes hommes devraient statistiquement moins bien réussir que les jeunes filles dans les écoles mixtes. C'est effectivement ce qu'on observe au niveau secondaire. Ainsi, la mixité à l'école est une source d'inégalité des chances. Une école pour qui l'égalité est une valeur capitale devrait pratiquer une ségrégation des sexes... Et si l'école ne veut pas renoncer à la mixité, il faudrait impérativement déplacer les examens. En été, avec les tenues légères que portent les filles, les capacités cognitives des garçons doivent être presque annihilées...

\*

En parcourant un livre publié en 1975, qui étudie les stéréotypes « ethniques » et « masculins/féminins » dans la bande dessinée franco-belge, je me rends compte qu'un biais cognitif très fréquent aujourd'hui chez les intellectuels de gauche l'était déjà il y a 50 ans. Ce biais consiste à considérer que l'usage de tels stéréotypes serait une forme de racisme et de sexisme. C'est très discutable pour plusieurs raisons. Primo, l'art (littérature, cinéma, bd, peinture) joue depuis toujours avec les stéréotypes ; la mythologie aussi. Secundo, les stéréotypes sont le produit d'un fonctionnement normal du cerveau : faire des statistiques en observant les êtres humains. Tertio, la plupart des stéréotypes sont statistiquement vrais, y compris des stéréotypes qui dérangent beaucoup certains anti-racistes et anti-sexistes (voir les travaux de Lee Jussim).

Supposons par exemple qu'une population P soit statistiquement moins digne de confiance qu'une population Q. Un banquier qui préfère choisir ses employés dans la population Q ne fait pas preuve de racisme envers la population P. Il agit rationnellement en tenant compte des probabilités. De même, dans une ville où la majorité des délinquants ont la peau verte, la police ne fait pas preuve de racisme en contrôlant davantage les hommes verts que les autres, elle agit en accord avec les probabilités.

Cette dimension de rationalité statistique et probabiliste des stéréotypes est souvent passée sous silence dans ce qu'on lit à peu près partout. Y compris chez les autorités politiques, législatives, éducatives. Il semble y avoir un dogme largement partagé : les stéréotypes doivent être avant tout condamnés moralement et judiciairement, il n'est pas bienvenu d'essayer de les analyser par-delà le bien et le mal. Pourtant, dans d'autres domaines, la rationalité statistique et probabiliste est encouragée : diagnostic médical, pharmacologie, intelligence artificielle...

# **Problèmes qui sortent de l'ordinaire**

**Algèbre**

**C**es deux phrases disent-elles la vérité ?

Écrire le système qu'elles énoncent et en donner la solution.

Trois fois le nombre de lettres de cette phrase plus quatre fois celui de la suivante font six cent cinquante.

Trois fois le nombre de lettres de cette phrase plus quatre fois celui de la précédente font six cent quarante-cinq.

\*

**C**es phrases disent-elles la vérité ?

Le nombre de lettres de cette phrase est une des solutions de l'équation :  $x$  au carré moins deux cent cinquante-trois fois  $x$  plus seize mille est égal à zéro. Le nombre de lettres de cette phrase est l'autre des solutions de l'équation :  $x$  au carré moins deux cent cinquante-trois fois  $x$  plus seize mille est égal à zéro.

\*

Le volume expiratoire maximal par seconde est le volume d'air expiré pendant la première seconde d'une expiration dite « forcée », suite à une inspiration profonde. On le note *VEMS* en français et *FEV1* en anglais. Pour savoir si une personne a un bon fonctionnement pulmonaire, on compare le *VEMS* mesuré avec un *VEMS* standard. Ce *VEMS* standard a été déterminé par des études statistiques. Il dépend du sexe, de l'âge  $A$  (en années), de la taille  $h$  (en cm) et, du moins jusqu'en 2012, de l'origine ethnique. Une formule trouvée dans un manuel de médecine édité en 2009 donne :

Hommes :  $VEMS = R \times 1.08 \times (0.043 \times h - 0.029 \times A - 2.49)$

Femmes :  $VEMS = R \times 1.08 \times (0.0395 \times h - 0.025 \times A - 2.6)$

où  $R$  est un paramètre qui vaut 1 pour une personne caucasienne, 0.87 pour une personne noire et 0.93 pour une personne asiatique.

Considérons un *VEMS* standard de 3 litres.

- a) Trouver la taille  $h$  qui correspond à un homme noir de 50 ans.
- b) Trouver la taille  $h$  qui correspond à une femme asiatique de 50 ans.

\*

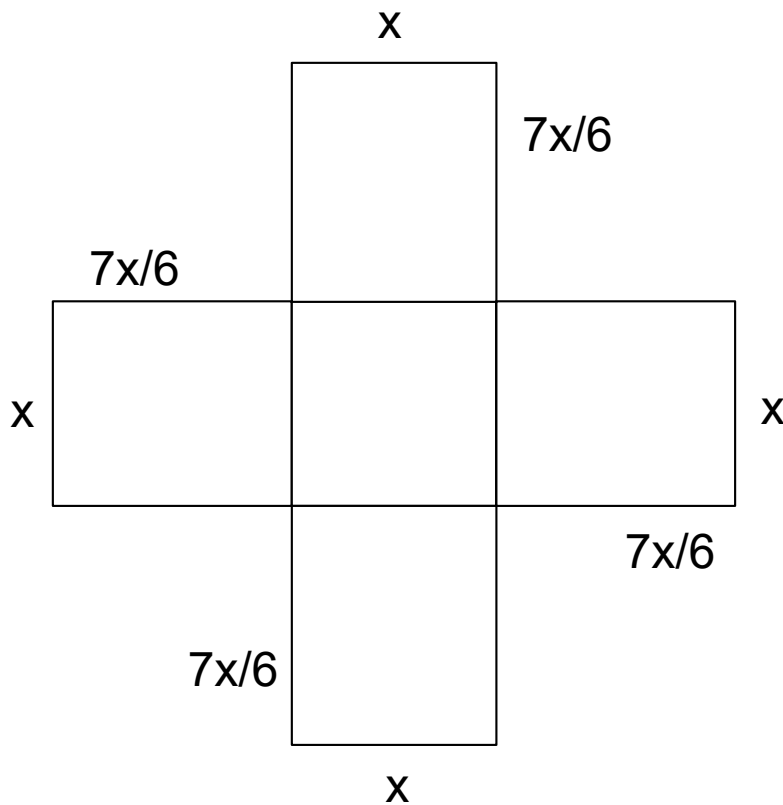
Ali, citoyen iranien, meurt en laissant une fortune de 91 milliards de rials iraniens. Ses héritiers sont au nombre de neuf : cinq fils et quatre filles. En Iran, le droit de succession est basé sur la quatrième sourate du Coran. Dans ce livre sacré, il est dit que Dieu ordonne que chaque fils hérite une part double de chaque fille. Calculer la part reçue par chaque fille et la part reçue par chaque fils.

[Ces informations sur le Coran et le droit iranien sont véridiques.]

\*

## Géométrie

Contrairement à ce que beaucoup de gens croient, la croix suisse n'est pas formée de 5 carrés. Il y a bien au centre un carré de côté  $x$ . Par contre, les quatre bras sont « étirés vers l'extérieur ». Chaque bras forme un rectangle dont les dimensions sont  $x$  et  $\frac{7}{6}x$



Calculer le rapport  $\frac{\text{périmètre}^2}{\text{aire}}$

\*

La surface d'une sphère mesure  $4\pi r^2$ , où  $r$  est le rayon. Calculer le rapport  $\frac{\text{surface}}{\text{volume}}$  pour une sphère. Et calculer aussi ce rapport pour un cube de côté  $2r$ .

Le rapport  $\frac{\text{surface}}{\text{volume}}$  joue un grand rôle en biologie.

Ce rapport est plus grand chez les petits animaux que chez les grands. Cela signifie, pour les animaux à sang chaud, que les petits doivent manger plus de nourriture par unité de volume que les grands, afin de compenser la perte de chaleur, qui est proportionnelle à la surface. Ainsi, la musaraigne étrusque doit quotidiennement absorber l'équivalent de sa masse en nourriture, alors que l'éléphant se contente de seulement 5 % de sa masse. Par contre, l'éléphant est exposé à des problèmes de surchauffe.

Le rapport  $\frac{\text{surface}}{\text{volume}}$  explique aussi pourquoi, à poids égaux, un sac de grosses patates donne moins d'épluchures qu'un sac de petites.

\*

Considérons un triangle dont les côtés sont en progression géométrique, avec une raison supérieure à 1. Montrer que ce triangle est rectangle si et seulement si la raison est égale à la racine carrée du nombre d'or.

\*

Un losange peut-il être un trapèze rectangle ?

*Solution*

Oui. Le carré est à la fois un losange et un trapèze rectangle.

\*

**Q**uelles sont les solutions dans l'intervalle  $[12.3^\circ ; 12.4^\circ]$  de l'équation  $\sin(2500x) = 0.5$  ?

*Solution*

Obtenons d'abord les solutions générales :

$$2500x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ \text{ou} \\ 150^\circ + l \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \quad \text{d'où :}$$

$$x = \begin{cases} 0.012^\circ + k \cdot 0.144^\circ \\ \text{ou} \\ 0.06^\circ + l \cdot 0.144^\circ \end{cases}$$

Nous sommes conduits aux inéquations :

|                                                                                                                                           |                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $12.3 \leq 0.012 + k \cdot 0.144 \leq 12.4$<br>$85.\bar{3} \leq k \leq 86.02\bar{7}$<br>$k = 86$<br>$x = 0.012 + 86 \cdot 0.144 = 12.396$ | $12.3 \leq 0.06 + l \cdot 0.144 \leq 12.4$<br>$85 \leq l \leq 85.69\bar{4}$<br>$l = 85$<br>$x = 0.06 + 85 \cdot 0.144 = 12.3$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Les réponses sont :  $12.3^\circ$  et  $12.396^\circ$

\*

**R**éprésenter graphiquement l'ensemble des points  $(x ; y)$  vérifiant l'équation :

$$(x-2)(x-3)(y-4)(y-5)=0$$

\*

## Exponentielles et logarithmes

Comment évolue la concentration d'un médicament dans le plasma sanguin d'un malade ? Question difficile qui est au coeur d'une discipline nommée *pharmacocinétique*. La réponse dépend du type de médicament, de son mode d'administration, des mécanismes qui s'activent pour l'éliminer. Plusieurs modèles mathématiques existent. Le plus simple est le modèle dit *monocompartimental*. On l'applique lorsqu'un médicament est administré par intraveineuse et que l'élimination est principalement assurée par les reins (le foie, la vésicule biliaire, les intestins, les poumons, la peau, etc. peuvent aussi participer à l'élimination d'un médicament). Selon ce modèle, la concentration plasmatique d'un médicament atteint tout de suite une valeur maximale  $C_0$  au moment de l'injection, puis décroît selon la loi :

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-kt}$$

où  $k$  est la constante d'élimination du médicament,  $t$  le temps en heures et  $C(t)$  la concentration au temps  $t$ .

Considérons une injection d'Aténolol avec les données suivantes :

$$k = 0.11 \quad \text{et} \quad C_0 = 0.6 \quad \text{mg/l}$$

- a) Calculer la concentration au bout de 2 heures.
- b) Calculer la demi-vie de ce médicament (temps pour lequel  $\frac{C(t)}{C_0} = \frac{1}{2}$  ).
- c) Déterminer en % le rapport  $\frac{C(t)}{C_0}$  au bout de 5 demi-vies.

\*

# D'Atropos à l'atropine

## Atropos

Les Moires ou Parques sont trois déesses du polythéisme gréco-latin. Images de la destinée, elles filent, dévident et coupent le fil de la vie des hommes. Ce sont Clotho qui file, Lachésis qui dévide, et Atropos qui coupe le fil de la vie.

*« Ce sont les sœurs symbolisant la Destinée, les Moires, ou Parques ou Nornes, dont la troisième s'appelle Atropos, l'Inexorable. »*  
(Sigmund Freud, Le thème des trois coffrets)

*« Oui, je lui ferai voir par d'infailibles marques  
Qu'un véritable amour brave la main des Parques »*  
(Corneille, Horace, acte IV, scène5)

*« Qu'Atropos et Tellus prennent, tassent les os  
Des voyageurs au cœur barbare ! »*  
(Ovide, Les amours, élégie XVI)

*« On abattit un pin pour son antiquité,  
Vieux Palais d'un hibou, triste et sombre retraite  
De l'oiseau qu'Atropos prend pour son interprète. »*  
(Jean de La Fontaine, Les Souris et le Chat-Huant, Fables, Livre XI)

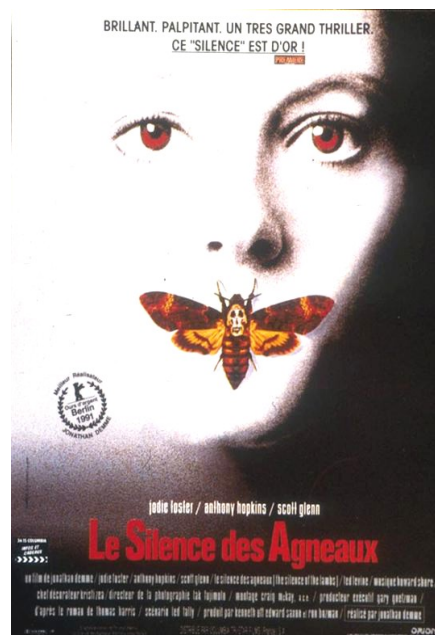
## Atropa belladonna

La belladone est une plante à baies noires toxiques. Une dizaine de ces baies peuvent provoquer la mort d'un adulte. Son nom générique, *Atropa*, donné par Linné, correspond à celui de la Moire Atropos. *Belladonna* vient de l'italien *bella donna*, c'est-à-dire « belle dame ». À la Renaissance, les Italiennes élégantes instillaient dans leurs yeux du jus de belladone pour faire briller leur regard, en augmentant la pression de l'œil, et en dilatant la pupille. Cette mydriase rendait les femmes plus attirantes. La famille Borgia employait la belladone comme poison.

On l'appelle aussi notamment : cerise de juif, cerise du diable, guigne de côte, mandragore baccifère, morelle perverse.

## Acherontia atropos

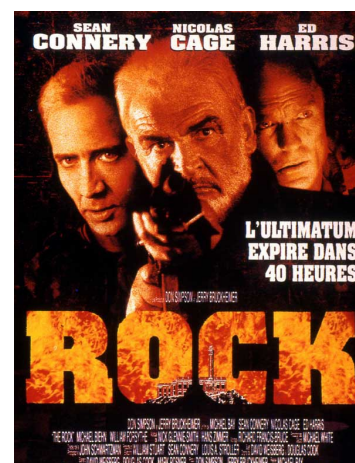
Sur les feuilles de l'*Atropa belladonna*, il est possible de voir des chenilles de l'*Acherontia atropos*, ou Sphinx Tête de mort, un impressionnant papillon capable de produire un cri grâce à une petite lame située à l'entrée du pharynx. Ce cri ressemble au couinement d'une souris. Il est audible jusqu'à 40 m. Le terme *Acherontia* fait référence à l'Achéron de la mythologie grecque, l'un des fleuves des Enfers. Et nous retrouvons la Moire Atropos au second rang du nom de ce papillon.



Ce lépidoptère inspira une nouvelle à Edgar Allan Poe : « Le Sphinx »

## Atropine

L'atropine est un alcaloïde présent dans plusieurs plantes. En 1809, le chimiste français Vauquelin en isole une forme impure à partir de l'*Atropa belladonna*. En 1822, Rudolph Brandes, un pharmacien allemand, nomme cette molécule active « atropine », en référence à la larve d'*Acherontia atropos*, le Sphinx tête de mort. L'atropine est un poison violent qui peut passer par de nombreux effets désagréables avant de conduire à la mort par paralysie cardio-respiratoire. On l'utilise en médecine à diverses fins. Comme collyre pour dilater les pupilles, comme antispasmodique, comme accélérateur de la fréquence cardiaque, comme antidote à l'inhalation de certains gaz toxiques, notamment ceux utilisés comme armes chimiques. Ainsi, dans le film **The Rock**, les forces spéciales devant reprendre Alcatraz sont équipées de seringues d'atropine. Le héros, Stanley Goodspeed, est contraint de s'injecter de l'atropine directement dans le cœur, pour survivre à une exposition au gaz VX, employé par des terroristes.



Problème

L'antidote à une exposition à un gaz toxique tel que le VX ou le sarin est une injection d'une dose de 1 milligramme d'atropine. La quantité d'atropine dans le sang suit une loi de décroissance exponentielle :

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

où  $Q(t)$  est la quantité au temps  $t$  (en heures),  
 $Q_0$  la quantité initiale  
et  $k$  une constante.

La demi-vie de l'atropine est de 2 heures.

- a) Calculer la constante  $k$
- b) Utiliser ce résultat pour déterminer le temps nécessaire à l'élimination de 90% de l'atropine.

\*

Il y a 65 millions d'années, sur le continent indien qui se trouvait alors à une latitude de  $-12^\circ$  (aux environs des actuelles îles Comores), se produisit une immense éruption volcanique, qui joua probablement un rôle important dans l'extinction des dinosaures et qui couvrit de lave une surface de  $500'000 \text{ km}^2$ . Il en reste aujourd'hui des traces à l'ouest de l'Inde : les trapps du Deccan.

Cette éruption répandit dans l'atmosphère une quantité de  $Q_0 = 7 \cdot 10^{16} \text{ kg}$  de dioxyde de carbone. Le climat chaud et humide favorise une altération rapide des laves émises. Cette altération s'effectue par des réactions chimiques qui transforment le dioxyde de carbone en ions bicarbonates.

Des études en paléoclimatologie permettent de proposer le modèle suivant pour évaluer la quantité résiduelle  $Q(t)$  de dioxyde de carbone dans l'atmosphère  $t$  années après l'éruption :

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt}$$

où la constante  $k$  est estimée à  $8 \cdot 10^{-6}$

- a) Écrivez 5 millions en notation scientifique.
- b) 5 millions d'années après l'éruption, quelle était la quantité résiduelle de dioxyde de carbone dans l'atmosphère ?
- c) Combien de milliers d'années durent s'écouler pour que la quantité de dioxyde de carbone émise par l'éruption dans l'atmosphère fût divisée par 100 ?

\*

En 1909, Søren Sørensen définit le pH (potentiel hydrogène) d'une solution comme l'opposé du logarithme décimal de la concentration (en moles par litre) des ions hydrogène. En 1924, Sørensen donne du pH une nouvelle définition, où la concentration est remplacée par la notion plus complexe d'activité. En prenant la première définition, répondre aux questions suivantes :

- a) Sachant que le pH du sang humain est compris entre 7.38 et 7.42, dans quel intervalle varie la concentration des ions hydrogène ?
- b) Sachant que le pH du jus de citron est compris entre 2.4 et 2.6, dans quel intervalle varie la concentration des ions hydrogène ?
- c) L'acide carborane est l'acide le plus fort. Son pH vaut  $-18$ . Sachant que l'eau pure a un pH de 7, calculer le rapport :

$$\frac{\text{concentration des ions hydrogène dans l'acide carborane}}{\text{concentration des ions hydrogène dans l'eau}}$$

\*

La magnitude (apparente) d'un système d'étoiles doubles est donnée par la formule :

$$m = -2.5 \log(10^{-0.4m_1} + 10^{-0.4m_2})$$

où  $m_1$  et  $m_2$  sont les magnitudes des deux étoiles formant le système.

Si  $m_2 = m_1 + 0.5$  et  $m = 5$ , alors que vaut  $m_1$  ?

\*

Les plantes transpirent, ce qui a pour effet de rejeter de la vapeur d'eau dans l'atmosphère. Les océans, les mers, les lacs et les cours d'eau rejettent aussi de la vapeur d'eau dans l'atmosphère. L'ensemble de ces phénomènes s'appelle *l'évapotranspiration*. On la mesure par la quantité  $H$ , en mm/an, sachant que 1 mm/an correspond à 1 litre d'eau par an pour chaque mètre carré de surface.

Il existe une relation empirique (c'est-à-dire basée sur l'expérience) entre la pression  $P$  du dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ) dans l'atmosphère et l'évapotranspiration  $H$ . Si l'unité de pression est l'atmosphère (atm), la formule de Brook et Hanson (1991) est :

$$\log(P) = -3.47 + 2.09(1 - e^{-0.00172 H})$$

- a) Calculer la pression du dioxyde de carbone dans l'atmosphère si l'évapotranspiration est de 1000 mm/an.
- b) Si la pression du dioxyde de carbone dans l'atmosphère est de 0.005 atm, calculer l'évapotranspiration correspondante.

\*

Pour quelles valeurs de  $z$  :

$(z^z)^z$  est-il plus grand que  $z^{(z^z)}$  ?

*Solution*

Ceux qui ne dorment pas en faisant *zzz* devraient trouver :

En prenant le logarithme des deux côtés :

$$z^2 \log(z) > z^z \log(z)$$

Donc, si  $\log(z) > 0$  , c-à-d si  $z > 1$  :

$$\begin{aligned} z^2 &> z^z \\ 2 \log(z) &> z \log(z) \\ z &< 2 \end{aligned}$$

Donc  $z \in ]1; 2[$

Et si  $\log(z) < 0$  , c-à-d si  $z < 1$  :

$$\begin{aligned} z^2 &< z^z \\ 2 \log(z) &< z \log(z) \\ z &< 2 \end{aligned}$$

Donc  $z \in ]0; 1[$

Finalement :  $z \in ]0; 2[ \setminus \{1\}$

\*

## Suites arithmétiques et géométriques

**S**oit une suite arithmétique de premier terme égal à 200 et de raison égale à 0.416. Cette suite contient un terme égal au double de son rang. Quel est ce terme ?

\*

**S**oit une suite arithmétique de premier terme égal à 15'000 et de raison égale à 7.008. Cette suite contient un terme égal au carré de son rang. Quel est ce rang ?

\*

**S**oient une suite arithmétique de premier terme nul et une suite géométrique de premier terme égal à 1. Ces deux suites ont le même 22<sup>e</sup> terme et la même raison non nulle. Quelle est cette raison ?

\*

**C**ombien y a-t-il de possibilités de former une suite géométrique de premier terme 3 et de raison dans  $\mathbb{Z}$ , sachant que 12'288 doit appartenir à une telle suite ?

*Solution*

$$3r^{n-1} = 12'288 \quad \rightarrow \quad r^{n-1} = 4'096 = 2^{12}$$

Donc  $r$  doit être une puissance de 2 ou de  $-2$

Les possibilités sont données dans le tableau suivant :

|     |         |         |         |    |          |       |
|-----|---------|---------|---------|----|----------|-------|
| $r$ | $\pm 2$ | $\pm 4$ | $\pm 8$ | 16 | $\pm 64$ | 4'096 |
| $n$ | 13      | 7       | 5       | 4  | 3        | 2     |

Il y a donc 10 possibilités.

## Analyse combinatoire

En guise de clin d'œil au « Bourgeois gentilhomme » de Molière, parmi les permutations des 4 éléments de la phrase suivante :

|               |              |             |              |
|---------------|--------------|-------------|--------------|
| vos yeux<br>1 | me font<br>2 | mourir<br>3 | d'amour<br>4 |
|---------------|--------------|-------------|--------------|

trouver toutes celles qui ne laissent aucun élément à sa place d'origine.

De telles permutations s'appellent des dérangements.

Le nombre de dérangements de  $n$  éléments s'appelle la sous-factorielle de  $n$ .

On la note  $!n$

La formule suivante permet son calcul :

$$!n = n! \cdot \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

on peut aussi l'obtenir grâce à une relation de récurrence :

$$!1 = 0 \quad \text{et} \quad !n = n \cdot \{(n-1)!\} + (-1)^n$$

### *Solution*

me font vos yeux d'amour mourir  
 me font mourir d'amour vos yeux  
 me font d'amour vos yeux mourir  
 mourir vos yeux d'amour me font  
 mourir d'amour vos yeux me font  
 mourir d'amour me font vos yeux  
 d'amour vos yeux me font mourir  
 d'amour mourir vos yeux me font  
 d'amour mourir me font vos yeux

\*

Un problème où une convention grammaticale qui déplaît à certains féministes joue un rôle important.

Considérons un ensemble formé de 7 personnes de sexe masculin et de 5 personnes du beau sexe. Combien y a-t-il de possibilités de choisir parmi elles :

- a) un président et un trésorier ?
- b) une présidente et une trésorière ?
- c) un président et une trésorière ?
- d) un président et un trésorier mâle ?
- e) un président et un trésorier mâles ?

*Solution*

- a)  $12 \times 11 = 132$
- b)  $5 \times 4 = 20$
- c)  $11 \times 5 = 55$
- d)  $11 \times 7 = 77$
- e)  $7 \times 6 = 42$

\*

Une Hydre à 9 têtes rencontre un Balaur à 12 têtes. De combien de manières peuvent-ils se faire des baisers sur les bouches ?

*[Décomposer en plusieurs cas. Une bouche contre une bouche ; deux bouches contre deux bouches ; trois bouches contre trois bouches ; etc.]*

\*

On veut construire un code de 12 caractères, comportant 3 chiffres différents, 4 fois le symbole % et 5 lettres qui ne sont pas nécessairement différentes. Combien y a-t-il de possibilités ?

*Solution*

$$C_3^{10} \cdot A_3^{12} \cdot C_4^9 \cdot \overline{A_5^{26}} \approx 2.37 \cdot 10^{14}$$

\*

On veut former des mots de longueur 8 sur un alphabet de 4 lettres  $\{A ; B ; C ; D\}$ , vérifiant la condition suivante pour chaque mot :  
Toute lettre A (si elle est présente dans le mot) est suivie d'une lettre B.  
Dénombrer les possibilités.

*Solution*

$$3^8 + 7 \times 3^6 + C_2^6 \times 3^4 + C_3^5 \times 3^2 + 1 = 12'970$$

\*

Considérons une classe de 30 élèves. Un groupe d'étude est un ensemble d'au moins 2 élèves. Soient Athanase, Bérout et Clothaire, 3 élèves de la classe. Dénombrer les possibilités de former un groupe d'étude qui contienne au moins l'un de ces 3 élèves.

*Solution*

$$3(2^{29} - 1) - 3 \times 2^{28} + 2^{27} = 7 \times 2^{27} - 3 = 939'524'093$$

\*

Combien y a-t-il de nombres à 6 chiffres, ne contenant pas la suite 123 ?

*Solution*

$$9 \times 10^5 - (10^3 + 3 \times 9 \times 10^2 - 1) = 896'301$$

\*

Une personne doit travailler 5 jours durant le mois de janvier (31 jours), avec la contrainte qu'il lui est interdit de travailler 2 jours de suite. Combien a-t-elle de possibilités de choisir ces 5 jours ?

*Solution*

$$C_5^{27} = 80'730$$

\*

À partir d'une classe de 30 étudiants, on veut former une équipe de football (11 personnes) et une équipe de basket (5 personnes), sans attribuer des fonctions particulières telles que capitaine, gardien, etc. Au plus un étudiant peut appartenir aux deux équipes. Combien y a-t-il de possibilités ?

*Solution*

$$C_{11}^{30} \cdot C_5^{19} + 30 \cdot C_{10}^{29} \cdot C_4^{19} \approx 2.96 \times 10^{12}$$

\*

Combien de mots de 7 lettres différentes peut-on former si on impose la présence d'exactly 3 voyelles (parmi 6) ?

*Solution*

$$C_3^6 \cdot A_3^7 \cdot A_4^{20} = 488'376'000$$

\*

Combien de diviseurs possède le nombre 1800 ?

*Solution*

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \quad \text{Le nombre de diviseurs vaut donc } (3+1) \times (2+1) \times (2+1) = 36$$

\*

Parmi les nombres de 5 chiffres, combien y en a-t-il qui contiennent le chiffre 9 et qui sont divisibles par 3 ?

*Solution*

$$\frac{9 \times 10^4}{3} - 3 \times 8 \times 9^3 = 12'504$$

\*

Combien y a-t-il d'ensembles de 3 entiers distincts, compris entre 1 et 300, de somme divisible par 3 ?

*Solution*

$$3 C_3^{100} + 100^3 = 1'485'100$$

\*

Au poker (52 cartes), combien y a-t-il de mains (ensembles de 5 cartes) sans as, mais avec au moins un roi et au moins un cœur ?

*Solution*

$$C_5^{48} - C_5^{44} - C_5^{36} + C_5^{33} = 486'640$$

\*

Au poker (52 cartes), une « main poubelle » (junk) est un ensemble de 5 cartes (main) vérifiant les conditions suivantes :

- toutes les valeurs sont différentes ;
- la main n'est pas une « couleur » (flush), c-à-d les 5 cartes ne sont pas toutes de la même couleur ;
- la main n'est pas une « suite » (straight), c-à-d les 5 valeurs ne donnent pas  $\{A ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$  ou  $\{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$  ou ... ou  $\{10 ; J ; Q ; K ; A\}$ .

Combien y a-t-il de telles mains ?

*Solution*

$$C_5^{13} \cdot 4^5 - 10 \cdot 4^5 - C_5^{13} \cdot 4 + 40 = 1'302'540$$

\*

Combien y a-t-il de parties de morpion (Tic-tac-toe) sur une grille carrée de 9 cases, qui se terminent au sixième tour ?

*Solution*

$$8 \times 3! \times A_3^6 - 6 \times 3! \times 2 \times 3! = 5'328$$

\*

Alice et Bastien organisent leur mariage. Ils vont disposer une table d'honneur (rectangulaire) sur une estrade, où ils seront assis en compagnie de 8 membres (déjà choisis) de leur famille, faisant face à une salle composée de 15 tables circulaires qui accueilleront chacune 6 invités. Combien y a-t-il de configurations possibles si les contraintes suivantes doivent être respectées :

- Alice et Bastien seront au milieu de la table d'honneur ;
- autour de chaque table circulaire, on n'opère pas de distinction entre deux plans de table s'ils ne diffèrent que d'une rotation ;
- les 15 tables circulaires sont considérées comme distinctes ;
- Céline et David ont vécu une rupture douloureuse et ne veulent pas être assis côte-à-côte, même s'ils ne refusent pas d'être éventuellement assis à la même table.

*Solution*

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot 8! \cdot A_1^{15} \cdot C_4^{88} \cdot \left( \frac{6!}{6} - 2 \cdot \frac{5!}{5} \right) \cdot \frac{84!}{(6!)^{14}} \cdot (5!)^{14} + 2 \cdot 8! \cdot A_2^{15} \cdot A_5^{88} \cdot A_5^{83} \cdot \frac{78!}{(6!)^{13}} \cdot (5!)^{13} \\
 &= \frac{8! \cdot 88! \cdot 435}{6^{13}}
 \end{aligned}$$

\*

 Parmi les  $\frac{14!}{5!3!3!} = 20'180'160$  anagrammes de **DABADABADABOUM**,

combien contiennent au moins une fois :

- a) la séquence **BOUM**
- b) la séquence **DABA**
- c) la séquence **BAD**
- d) la séquence **AAA**
- e) la séquence **AA**

*Solution*

a) le nombre d'anagrammes contenant la séquence **BOUM**  
 = le nombre de permutations de la liste  $L = [\mathbf{BOUM}, A, A, A, A, A, B, B, D, D, D]$   
 =  $\frac{11!}{5!2!3!} = 27'720$

b) Soient :

$p$  = le nombre de permutations de la liste  $L_1 = [\mathbf{DABA}, \mathbf{DABA}, A, B, D, M, O, U]$   
 =  $\frac{8!}{2!} = 20'160$

$q$  = le nombre de permutations de la liste  $L_2 = [\mathbf{DABA}, D, A, B, A, A, B, D, M, O, U]$   
 =  $\frac{11!}{3!2!2!} = 1'163'200$

Alors :

Le nombre d'anagrammes contenant **deux fois la séquence DABA** vaut :

$p$

Le nombre d'anagrammes contenant **exactement une fois la séquence DABA** vaut :

$q - 2p$

(car l'ensemble des permutations de  $L_2$  fournit en double exemplaire les anagrammes contenant deux fois la séquence DABA)

Et donc :

Le nombre d'anagrammes contenant **au moins une fois la séquence DABA** vaut :

$$p + q - 2p = -p + q = 1'643'040$$

c) Soient :

$r$  = le nombre de permutations de la liste  $L_1 = [\mathbf{BAD}, \mathbf{BAD}, \mathbf{BAD}, A, A, M, O, U]$

$$= \frac{8!}{3!2!} = 3'360$$

$s$  = le nombre de permutations de la liste  $L_2 = [\mathbf{BAD}, \mathbf{BAD}, B, A, D, A, A, M, O, U]$

$$= \frac{10!}{2!3!} = 302'400$$

$t$  = le nombre de permutations de la liste  $L_3 = [\mathbf{BAD}, B, A, D, B, A, D, A, A, M, O, U]$

$$= \frac{12!}{4!2!2!} = 4'989'600$$

Alors :

Le nombre d'anagrammes contenant **trois fois la séquence BAD** vaut :

$$r$$

Le nombre d'anagrammes contenant **exactement deux fois la séquence BAD** vaut :

$$s - 3r$$

(car l'ensemble des permutations de  $L_2$  fournit en triple exemplaire les anagrammes contenant trois fois la séquence BAD)

Le nombre d'anagrammes contenant **exactement une fois la séquence BAD** vaut :

$$t - 3r - 2(s - 3r) = t - 2s + 3r$$

(car l'ensemble des permutations de  $L_3$  fournit en triple exemplaire les anagrammes contenant trois fois la séquence BAD et en double exemplaire les anagrammes contenant exactement deux fois la séquence BAD)

Et donc :

Le nombre d'anagrammes contenant **au moins une fois la séquence BAD** vaut :

$$r + s - 3r + t - 2s + 3r = r - s + t = 4'690'560$$

d) Soient :

$u$  = le nombre de permutations de la liste  $L_1 = [\text{AAAAA}, B, B, B, D, D, D, M, O, U]$

$$= \frac{10!}{3!3!} = 100'800$$

$v$  = le nombre de permutations de la liste  $L_2 = [\text{AAAA}, A, B, B, B, D, D, D, M, O, U]$

$$= \frac{11!}{3!3!} = 1'108'800$$

$w$  = le nombre de permutations de la liste  $L_3 = [\text{AAA}, A, A, B, B, B, D, D, D, M, O, U]$

$$= \frac{12!}{2!3!3!} = 6'652'800$$

Alors :

Le nombre d'anagrammes contenant **cinq A collés** vaut :

$$u$$

Le nombre d'anagrammes contenant **quatre A collés, mais pas cinq**, vaut :

$$v - 2u$$

(car l'ensemble des permutations de  $L_2$  fournit en double exemplaire les anagrammes contenant cinq A collés)

Le nombre d'anagrammes contenant **trois A collés, mais ni quatre ni cinq**, vaut :

$$w - 3u - 2(v - 2u) = w - 2v + u$$

(car l'ensemble des permutations de  $L_3$  fournit en triple exemplaire les anagrammes contenant cinq A collés et en double exemplaire les anagrammes contenant quatre A collés, mais pas cinq)

Et donc :

Le nombre d'anagrammes contenant **au moins une fois la séquence AAA** vaut :

$$u + v - 2u + w - 2v + u = -v + w = 5'544'000$$

e) Aux quantités définies en d), ajoutons :

$x$  = le nombre de permutations de la liste  $L_4 = [\mathbf{AAA}, \mathbf{AA}, B, B, B, D, D, D, M, O, U]$

$$= \frac{11!}{3!3!} = 1'108'800$$

$y$  = le nombre de permutations de la liste  $L_5 = [\mathbf{AA}, \mathbf{AA}, A, B, B, B, D, D, D, M, O, U]$

$$= \frac{12!}{2!3!3!} = 6'652'800$$

$z$  = le nombre de permutations de la liste  $L_6 = [\mathbf{AA}, A, A, A, B, B, B, D, D, D, M, O, U]$

$$= \frac{13!}{3!3!3!} = 28'828'800$$

Alors :

Le nombre d'anagrammes contenant **un groupe de trois A collés, séparé d'un groupe de deux A collés**, vaut :

$$x - 2u$$

Le nombre d'anagrammes contenant **un groupe de trois A collés et deux A séparés de ce groupe et séparés entre eux**, vaut :

$$w - 2v + u - (x - 2u) = -x + w - 2v + 3u$$

Le nombre d'anagrammes contenant **deux groupes séparés de deux A collés et un cinquième A séparé de ces deux groupes**, vaut :

$$y - 3u - (v - 2u) - 2(x - 2u) = y - 2x - v + 3u$$

Le nombre d'anagrammes contenant **un seul groupe de deux A collés, et les trois autres A séparés de ce groupe et séparés entre eux**, vaut :

$$\begin{aligned} z - 4u - 3(v - u) - 3(x - 2u) - 2(-x + w - 2v + 3u) - 2(y - 2x - v + 3u) \\ = z - 2y + 3x - 2w + 3v - 7u \end{aligned}$$

Et donc :

Le nombre d'anagrammes contenant **au moins une fois la séquence AA** vaut :

$$\begin{aligned} -v + w + y - 2x - v + 3u + z - 2y + 3x - 2w + 3v - 7u \\ = -4u + v - w + x - y + z = 17'337'600 \end{aligned}$$

Corollaire Le nombre d'anagrammes de **DABADABADABOUM**, vérifiant la condition : **des A ne sont jamais côte à côte**, vaut :

$$20'180'160 - 17'337'600 = 2'842'560$$

Un hétérogramme est un « mot » – c’est-à-dire, en mathématiques, un arrangement de lettres, sans nécessité de signification linguistique – composé de lettres toutes différentes.

Un hétérogramme sera dit « distingué » si les lettres qui le composent respectent l’ordre alphabétique (de gauche à droite).

Par exemple : ERU est un hétérogramme distingué ; BQMP est un hétérogramme qui n’est pas distingué.

- Combien y a-t-il d’hétérogrammes distingués, d’une longueur de 8 lettres ?
- Combien y a-t-il d’hétérogrammes distingués, d’une longueur de 8 lettres, qui commencent par une voyelle ?
- Combien y a-t-il d’hétérogrammes distingués, d’une longueur de 8 lettres, qui contiennent la lettre K ?
- Combien y a-t-il d’hétérogrammes distingués, d’une longueur de 8 lettres, qui commencent par une voyelle et qui contiennent la lettre K ?
- Combien y a-t-il d’hétérogrammes non distingués, d’une longueur de 8 lettres ?

*Solution*

- $C_8^{26}$
- $C_7^{25} + C_7^{21} + C_7^{17} + C_7^{11}$
- $C_8^{26} - C_8^{25}$  ou  $C_7^{25}$
- $C_7^{25} - C_7^{24} + C_7^{21} - C_7^{20} + C_7^{17} - C_7^{16}$  ou  $C_6^{24} + C_6^{20} + C_6^{16}$
- $A_8^{26} - C_8^{26}$

\*

À partir d'un ensemble de 26 personnes, on veut former

4 groupes (deux à deux disjoints) de 3 personnes (différentes) chacun.  
Dénombrer les possibilités dans les 4 cas suivants :

- 1) L'ordre des personnes dans chaque groupe compte,  
l'ordre des groupes compte.
- 2) L'ordre des personnes dans chaque groupe compte,  
l'ordre des groupes ne compte pas.
- 3) L'ordre des personnes dans chaque groupe ne compte pas,  
l'ordre des groupes compte.
- 4) L'ordre des personnes dans chaque groupe ne compte pas,  
l'ordre des groupes ne compte pas.

*Solution*

$$1) A_3^{26} \cdot A_3^{23} \cdot A_3^{20} \cdot A_3^{17} = C_{12}^{26} \cdot A_3^{12} \cdot A_3^9 \cdot A_3^6 \cdot A_3^3 = A_{12}^{26}$$

$$2) \frac{\text{formule 1}}{4!}$$

$$3) C_3^{26} \cdot C_3^{23} \cdot C_3^{20} \cdot C_3^{17} = C_{12}^{26} \cdot C_3^{12} \cdot C_3^9 \cdot C_3^6 \cdot C_3^3 = \frac{A_{12}^{26}}{(3!)^4} = \frac{\text{formule 1}}{(3!)^4}$$

$$4) \frac{\text{formule 1}}{4! \cdot (3!)^4} = \frac{\text{formule 2}}{(3!)^4} = \frac{\text{formule 3}}{4!}$$

\*

À partir d'un alphabet de 26 lettres, on veut former

une liste de 4 mots de 3 lettres chacun.

Dénombrer les possibilités dans les 4 cas suivants :

- a) Les lettres de chaque mot doivent être distinctes, les mots doivent être distincts.
- b) Les lettres de chaque mot doivent être distinctes, les mots ne doivent pas être nécessairement distincts.
- c) Les lettres de chaque mot ne doivent pas être nécessairement distinctes, les mots doivent être distincts.
- d) Les lettres de chaque mot ne doivent pas être nécessairement distinctes, les mots ne doivent pas être nécessairement distincts.

*Solution*

- a)  $A_4^{A_3^{26}}$
- b)  $\overline{A_4^{A_3^{26}}} = (A_3^{26})^4$
- c)  $\overline{A_4^{A_3^{26}}} = A_4^{26^3}$
- d)  $\overline{A_4^{A_3^{26}}} = (26^3)^4 = 26^{12} = \overline{A_{12}^{26}}$

\*

Madame Calcul dispose de 20 cailloux distincts les uns des autres. Dénombrer ses possibilités

- a) de tous les répartir dans 5 sachets (qu'on ne distingue pas à vide et dont l'ordre ne compte pas), avec au moins un caillou par sachet ;
- b) de tous les distribuer à 5 enfants, avec au moins un caillou par enfant.

*Solution*

- a) Nombre de Stirling de 2<sup>e</sup> espèce :  $S(20, 5) = 749'206'090'500$
- b)  $S(20, 5) 5! \approx 8.99 \times 10^{13}$

\*

**U**n chocolatier fabrique 20 sortes de chocolats. Dénombrer ses possibilités de remplir :

- a) un sachet de 30 chocolats ;
- b) un sachet de 30 chocolats, avec au moins un chocolat de chaque sorte ;
- c) une boîte de 30 chocolats, aux cases numérotées ;
- d) une boîte de 30 chocolats, aux cases numérotées, avec au moins un chocolat de chaque sorte.

*Solution*

- a)  $C_{30}^{49} \approx 1.885 \times 10^{13}$
- b)  $C_{19}^{29} = 20'030'010$
- c)  $20^{30} \approx 1.07 \times 10^{39}$
- d)  $S(30, 20) 20! = 581'535'955'088'511'150 \times 20! \approx 1.41 \times 10^{36}$

\*

**30** bonbons (indistinguables) doivent être distribués à 5 enfants, en respectant l'ensemble des conditions suivantes :

Antinéa doit recevoir entre 3 et 8 bonbons.

Barnabé doit en recevoir entre 5 et 10.

Callixte entre 6 et 15.

Dagobert doit en recevoir un nombre pair.

Eusèbe doit recevoir exactement un bonbon de plus qu'Antinéa.

Dénombrer les distributions possibles.

*Solution*

104 (en utilisant l'outil des fonctions génératrices)

\*

Considérons des mots de longueur 10, écrits avec un alphabet de 4 lettres  $\{A ; B ; C ; D\}$ , vérifiant pour chaque mot l'ensemble des conditions suivantes :

La lettre A apparaît 0 ou 4 fois.

La lettre B apparaît un nombre pair de fois.

La lettre C apparaît au moins 3 fois.

La lettre D apparaît au plus 5 fois.

Dénombrer ces mots.

*Solution*

44'933 (en utilisant l'outil des fonctions génératrices exponentielles)

\*

**S**oit un alphabet comportant  $k$  lettres ( $k \geq 2$ ), dont la lettre A. Combien y a-t-il de mots d'une longueur de  $n$  lettres si on impose que la lettre A soit présente un nombre impair de fois dans chaque mot ?

*Solution*

Notons :  $q_n$  = la réponse à la question.

Nous avons :  $q_{n+1} = (k-1)q_n + k^n - q_n$

Car  $(k-1)q_n$  est le nombre de mots dont la 1<sup>re</sup> lettre n'est pas A et dont les  $n$  lettres suivantes contiennent un nombre impair de fois la lettre A.

$k^n - q_n$  est le nombre de mots dont la 1<sup>re</sup> lettre est A et dont les  $n$  lettres suivantes contiennent un nombre pair de fois la lettre A.

À cette relation de récurrence, cherchons une solution de la forme :

$$q_n = \alpha k^n + \beta (k-2)^n$$

$$q_1 = 1 \text{ donne : } \alpha k + \beta (k-2) = 1 \text{ (équation 1)}$$

$$q_{n+1} = (k-1)q_n + k^n - q_n = k^n + (k-2)q_n \text{ donne :}$$

$$\alpha k^{n+1} + \beta (k-2)^{n+1} = k^n + (k-2)\alpha k^n + (k-2)\beta (k-2)^n$$

$$\alpha k k^n + \beta (k-2)^{n+1} = [(k-2)\alpha + 1] k^n + \beta (k-2)^{n+1}$$

Cette égalité est vérifiée pour tout  $k$  si  $\alpha k = (k-2)\alpha + 1$ ,

c'est-à-dire si  $\alpha = \frac{1}{2}$

L'équation 1 donne alors :

$$\frac{k}{2} + \beta (k-2) = 1 \text{ qui permet d'obtenir } \beta = -\frac{1}{2}$$

Finalement, la réponse au problème est :  $q_n = \frac{k^n - (k-2)^n}{2}$

\*

En puisant dans les 15 lettres qui forment le mot **ASSASSINASSIONS**, combien peut-on former de mots de 8 lettres ?

\*

Parmi les nombres entiers compris entre 1 et 1 milliard, combien ne contiennent aucun chiffre plus de 3 fois ?

\*

À partir d'un ensemble de 26 lettres et de 10 chiffres, on veut composer un code de longueur 13. Il doit contenir 8 lettres et 5 chiffres. Les répétitions sont permises. Toute position dans le code peut recevoir une lettre ou un chiffre. Dénombrer les possibilités.

\*

Soit l'alphabet de 26 lettres. Combien y a-t-il de mots d'une longueur de 15 lettres, sachant que les répétitions ne sont autorisées que pour les 6 voyelles et qu'une lettre répétée ne peut pas être présente plus de 5 fois dans un mot ?

\*

Combien y a-t-il d'anagrammes de **AAAABBBBCDEFGHIJK** si on fixe comme contrainte que deux lettres identiques ne doivent jamais être voisines ?

\*

10 serpents de 10 couleurs différentes sont dans une fosse. Chaque bouche mord une queue. Sachant qu'un serpent peut mordre sa propre queue ou celle d'un autre serpent, dénombrer toutes les configurations possibles (on différencie les serpents, mais l'ensemble des multiples cycles qui forment une configuration n'est pas ordonné). Par exemple, le nombre de configurations dans le cas {1 cycle de 6 serpents et 1 cycle de 4 serpents} vaut  $C_6^{10} \cdot 5!3!$

\*

Considérons un alphabet de  $n$  symboles et une fonction  $f$  qui associe à chaque symbole un nombre entier positif. En utilisant cet alphabet, on veut construire des mots de longueur  $p$ . Les répétitions sont permises, mais, pour chaque symbole, l'image par  $f$  de ce symbole fixe une borne supérieure au nombre d'occurrences de ce symbole dans un mot. Dénombrer les possibilités.

## Probabilités et statistiques

La phrase suivante dit-elle la vérité ?

EN SOULIGNANT AU HASARD UNE LETTRE DE CETTE PHRASE, LA PROBABILITE QUE CE SOIT E VAUT QUINZE SUR QUATRE-VINGT-QUINZE.

\*

Malarmé écrivait : « Un coup de dés jamais n'abolira le hasard ». Bienaimé croit que si un dé tombe 3 fois de suite sur 6 le diable apparaîtra.

- a) Quelle est la probabilité que le 6 apparaisse 3 fois en 3 jets ?
- b) Quelle est la probabilité que le 6 apparaisse au moins 3 fois de suite en 4 jets ?

\*

En supposant les tirages équiprobables, on tire au hasard une anagramme de ABCDEFGHI. Quelle est la probabilité que A et B ne soient pas contigus et que C et D ne soient pas contigus ?

*Solution*

Posons  $E1 = \ll A \text{ et } B \text{ ne sont pas contigus} \gg$  et  $E2 = \ll C \text{ et } D \text{ ne sont pas contigus} \gg$

$$\begin{aligned}
 P(E1 \cap E2) &= 1 - P(\overline{E1} \cap \overline{E2}) = 1 - P(\overline{E1} \cup \overline{E2}) = 1 - P(\overline{E1}) - P(\overline{E2}) + P(\overline{E1} \cap \overline{E2}) \\
 &= 1 - P(A \text{ et } B \text{ sont contigus}) - P(C \text{ et } D \text{ sont contigus}) \\
 &\quad + P(A \text{ et } B \text{ sont contigus et } C \text{ et } D \text{ sont contigus}) \\
 &= 1 - \frac{2 \cdot 8!}{9!} - \frac{2 \cdot 8!}{9!} + \frac{4 \cdot 7!}{9!} = 61.1 \%
 \end{aligned}$$

\*

**S**oit un QCM qui comporte 20 questions, chacune offrant 3 choix possibles, dont un seul est juste. Le seuil de suffisance est fixé à 11 réponses justes, ce qui correspond à la note de 3.75. Considérons un élève qui sait la bonne réponse à 6 questions. S'il répond au hasard aux 14 questions restantes, quelle est sa probabilité d'atteindre ou de dépasser le seuil de suffisance ?

*Solution*

$$\sum_{r=5}^{14} C_r^{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^r \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{14-r} = 1 - \sum_{r=0}^4 C_r^{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^r \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{14-r} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \cdot \sum_{r=0}^4 C_r^{14} \cdot 2^{-r} \approx 52.4 \%$$

\*

**P**ar un procédé garantissant l'équiprobabilité, on tire au hasard un nombre entier compris entre 1 et 1 milliard. Calculer la probabilité que, dans ce nombre, aucun chiffre ne soit présent plus de 3 fois.

\*

**L**a Cour des Comptes compte 195 hommes, dont 12 savent conter, et 45 femmes, dont 9 savent conter.

- a) Considérons une personne prise au hasard dans cette Cour. Quelle est la probabilité qu'elle sache conter ?
- b) Considérons une femme prise au hasard dans cette Cour. Quelle est la probabilité qu'elle ne sache pas conter ?

\*

**P**armi les arrangements simples de taille 4 des combinaisons simples de 2 permutations des 6 voyelles A, E, I, O, U, Y, quelle est la probabilité que la séquence AIEYOU soit présente au moins une fois ?

*Solution*

$$\frac{A_4^{C_2^{6!}} - A_4^{C_2^{6!-1}}}{A_4^{C_2^{6!}}} \approx 1.1 \%$$

\*

Intéressons-nous à une maladie X.

*Expérience* : Une personne est choisie au hasard dans la population et on lui fait subir un test de détection de la maladie X.

Considérons les événements suivants :

$A$  : La personne est atteinte de la maladie X

$B$  : Le résultat du test est positif, c'est-à-dire le test déclare que la personne est atteinte de la maladie X.

Le test n'est pas parfait. Une étude a permis d'établir que :

$$\begin{aligned} P(B|A) &= 99\% \\ P(B|\bar{A}) &= 5\% \end{aligned}$$

Par ailleurs, la maladie est assez rare : elle ne touche qu'une personne sur mille, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.1\% \\ P(\bar{A}) &= 99.9\% \end{aligned}$$

Quelle est la probabilité qu'une personne soit atteinte de la maladie X si son résultat au test est positif ?

Utilisons la formule :

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.99}{0.001 \cdot 0.99 + 0.999 \cdot 0.05} = 1.94\% \end{aligned}$$

Cette probabilité est faible. Presque tous les malades présentent un test positif ; mais la maladie X est rare, si bien que presque tous les tests positifs vont désigner des personnes saines (faux positifs). Si le traitement est lourd, coûteux ou dangereux, il importe d'effectuer des examens supplémentaires avant de le mettre en œuvre. Le test, malgré sa fiabilité plutôt haute, n'est absolument pas suffisant. L'oubli du taux de base (fréquence de la maladie dans la population) est une erreur qui peut avoir des conséquences graves.

 *xpérience* : Une pièce de monnaie est lancée une 1<sup>re</sup> fois un jour au hasard ; puis, quelques mois plus tard, elle est lancée une 2<sup>e</sup> fois un jour au hasard.

Sous la condition :

$C$  : La pièce est tombée au moins une des 2 fois sur « Face » un mardi

quelle est la probabilité qu'elle soit aussi tombée sur « Face » l'autre fois ?

*Solution*

On pourrait penser que la réponse est 50 %.

Nous allons voir que ce n'est pas vrai.

Considérons les événements :

$A_1$  : Le 1<sup>er</sup> jour choisi au hasard est un mardi

$A_2$  : Le 2<sup>e</sup> jour choisi au hasard est un mardi

$B_1$  : La pièce tombe sur F au 1<sup>er</sup> jet

$B_2$  : La pièce tombe sur F au 2<sup>e</sup> jet

$$C = (B_1 \cap A_1) \cup (B_2 \cap A_2)$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_1 \cap A_1) + P(B_2 \cap A_2) - P(B_1 \cap A_1 \cap B_2 \cap A_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{27}{196} \end{aligned}$$

$B_1 \cap B_2 \cap C$  est la réunion de 3 événements disjoints :

$$B_1 \cap A_1 \cap B_2 \cap A_2$$

$$B_1 \cap A_1 \cap B_2 \cap \overline{A_2}$$

$$B_1 \cap \overline{A_1} \cap B_2 \cap A_2$$

$$\text{d'où : } P(B_1 \cap B_2 \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{13}{196}$$

La probabilité qui nous intéresse est :

$$P((B_1 \cap B_2) | C) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{13/196}{27/196} = \frac{13}{27} = 48.15\%$$

\*

Une maladie touche, dans la population genevoise, trois personnes sur mille. Cette maladie est toujours mortelle, mais on peut sauver le patient grâce à une opération passablement risquée. Cette opération sauve une personne malade sur deux, mais tue la moitié des personnes opérées. Avant de décider l'opération, on peut utiliser un test de dépistage qui permet de détecter la maladie. Avec ce test, 96 % des malades obtiennent un résultat « positif » (c'est-à-dire, le test dit : « vous êtes malade »), mais 6 % des personnes saines obtiennent aussi un résultat « positif » (on dit que ce sont des « faux positifs »). Une personne choisie au hasard passe le test. Ce test donne un résultat positif. Conseillez-vous à la personne de se faire opérer ? Pour vous aider à répondre, calculer la probabilité que cette personne ne soit pas malade sachant que son test a donné un résultat positif.

### *Solution*

$A$  : La personne est malade.

$B$  : Le test est positif.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}|B) &= \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}{P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) + P(A) \cdot P(B|A)} \\ &= \frac{0.997 \cdot 0.06}{0.997 \cdot 0.06 + 0.003 \cdot 0.96} = 95.41\% \end{aligned}$$

\*

À Pétaouchnok, la probabilité qu'un adulte mâle choisi au hasard soit un barbu est d'environ 45 %. Intéressons-nous à une certaine catégorie de délit, que nous désignerons par la lettre X, et qui ne peut être commis que par un adulte mâle. La probabilité qu'un adulte mâle barbu commette un délit X vaut 2 % et la probabilité qu'un adulte mâle non barbu commette un délit X vaut 0.3 %. Si un délit X est commis par une seule personne, quelle est la probabilité que son auteur soit un barbu ?

*Solution*

*A* : Le suspect est barbu.

*B* : Le suspect a commis le délit X.

$$P(A) = 0.45$$

$$P(\bar{A}) = 0.55$$

$$P(B|A) = 0.02$$

$$P(B|\bar{A}) = 0.003$$

$$P(A|B) = \frac{0.45 \cdot 0.02}{0.45 \cdot 0.02 + 0.55 \cdot 0.003} = 84.51 \%$$

\*

L'hémophilie A est provoquée par la mutation d'un gène du chromosome X. Un homme qui porte cette mutation est toujours hémophile. Par contre, l'hémophilie A est très rare chez une femme, parce que ce gène est récessif. Pour qu'une femme soit atteinte de cette maladie, il faut que ses deux chromosomes X portent la mutation. Cependant, une femme non malade peut porter le gène de l'hémophilie A et le transmettre à ses descendants. Notons  $X_h$  un chromosome X porteur du gène de l'hémophilie A. Considérons le cas de Sacha, un homme sain. Ses chromosomes sexuels sont XY. Sa femme Irina est non malade, mais porteuse du gène de l'hémophilie A. Ses chromosomes sexuels sont  $XX_h$ . Chaque enfant mâle de ce couple recevra la chromosome Y de son père et l'un des chromosomes X ou  $X_h$  de sa mère. La probabilité qu'il soit hémophile est donc de 50 %. Le couple désire 3 enfants. Sans tenir compte de la possibilité d'avoir de vrais jumeaux, quelle est la probabilité qu'au moins un des 3 enfants soit un garçon hémophile ?

[On prendra :  $P(\text{naissance d'un garçon}) = P(\text{naissance d'une fille}) = 50 \%$ ]

### *Solution*

$P(\text{au moins un garçon hémophile}) = 1 - P(\text{pas de garçon hémophile})$

Soit  $G_s$  un garçon « sain », c'est-à-dire non hémophile.

La probabilité de naissance de  $G_s$  vaut 0.25.

Les différents résultats pour les naissances de 3 enfants, sans garçon hémophile, sont les suivants :

|                                         |                                      |
|-----------------------------------------|--------------------------------------|
| FFF                                     | $0.5^3 = 0.125$                      |
| $G_s FF$ ou $FG_s F$ ou $FFG_s$         | $3 \cdot 0.25 \cdot 0.5^2 = 0.1875$  |
| $G_s G_s F$ ou $G_s FG_s$ ou $FG_s G_s$ | $3 \cdot 0.5 \cdot 0.25^2 = 0.09375$ |
| $G_s G_s G_s$                           | $0.25^3 = 0.015625$                  |

La somme donne 0.421875

La probabilité demandée vaut  $1 - 0.421875 = 0.578125$

\*

Un problème de Tversky et Kahneman.

« Un taxi a été impliqué dans un accident de nuit avec délit de fuite. Deux sociétés de taxis travaillent dans la ville, les Verts et les Bleus. Vous disposez des informations suivantes :

85 % des taxis de la ville sont verts et 15 % bleus.

Un témoin a identifié le taxi comme étant bleu. La cour a vérifié la fiabilité du témoin dans des circonstances reproduisant celles de la nuit de l'accident et a conclu que le témoin avait identifié correctement chacune des deux couleurs à 80 %.

Quelle est la probabilité que le taxi impliqué dans l'accident soit bleu plutôt que vert ? »

*Solution*

$A$  : Le taxi est bleu.

$\overline{A}$  : Le taxi est vert.

$B$  : Le témoin a vu que le taxi était bleu.

$$P(A) = 0.15$$

$$P(\overline{A}) = 0.85$$

$$P(B|A) = 0.8$$

$$P(B|\overline{A}) = 0.2$$

$$P(A|B) = \frac{0.15 \cdot 0.8}{0.15 \cdot 0.8 + 0.85 \cdot 0.2} = 41.34\%$$

\*

## Problème de l'induction.

Un savant pose une hypothèse  $H$ .  
 Il conçoit une expérience destinée à vérifier  $H$ .  
 Soit l'événement  $A$  : L'expérience est un succès.

Cette expérience est telle que si  $H$  est vraie, la probabilité de  $A$  vaut 1.  
 Autrement dit :  $P(A|H)=1$

Mais si  $H$  est fausse, il se peut que  $A$  se réalise tout de même, avec une probabilité  $q$ .  
 Autrement dit :  $P(A|\overline{H})=q$

Supposons que l'expérience ait lieu  $n$  fois  
 et notons  $B_n$  : L'expérience est chaque fois un succès.

Nous avons :  
 $P(B_n|H)=1$  et  $P(B_n|\overline{H})=q^n$

La formule de Bayes donne alors :

$$P(H|B_n)=\frac{P(H)}{P(H)+q^n \cdot (1-P(H))}$$

Calculer cette probabilité pour  $n=10$  si on estime que  $P(H)=51\%$  et  $q=10\%$

*Solution*

$$\frac{0.51}{0.51+0.1^{10} \cdot 0.49}=0.999999999996 \quad \dots \text{étonnant, non ?}$$

\*

Un élève propose à son professeur de mathématiques le jeu suivant :

Une pièce équilibrée est lancée 20 fois de suite.

Si « Pile » n'apparaît jamais, l'élève verse 2 millions d'euros à son professeur. Sinon, le professeur verse 1.95 euro à l'élève.

- a) Ce jeu est-il avantageux pour le professeur ?
- b) Quelle somme devrait verser l'élève pour que le jeu soit équitable avec la somme de 1.95 versée par le professeur ?

*Solution*

- a) le gain moyen du professeur est :

$$2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{2^{20}} - 1.95 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right) = -0.0426$$

La valeur est négative, donc ce jeu est désavantageux pour le professeur.

- b) Soit  $S$  la somme demandée. On a l'équation :

$$S \cdot \frac{1}{2^{20}} - 1.95 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right) = 0, \text{ dont la solution est :}$$

$$S = 1.95 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right) \cdot 2^{20} = 1.95 \cdot (2^{20} - 1) = 2'044'721.25$$

\*

Au mois de juillet, entre 22h00 et 23h00, dans une région genevoise, une étude montre que le nombre de moustiques avalés par une pipistrelle suit approximativement une loi normale, dont la moyenne vaut 350 et l'écart-type 30.

- a) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale au moins 400 moustiques ?
- b) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale au moins 333 moustiques ?
- c) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale au plus 310 moustiques ?
- d) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale au plus 390 moustiques ?
- e) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale entre 335 et 365 moustiques ?
- f) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale entre 375 et 400 moustiques ?
- g) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale entre 325 et 385 moustiques ?
- h) Au-dessus de quel nombre de moustiques avalés y a-t-il une probabilité de 3 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?
- i) Au-dessus de quel nombre de moustiques avalés y a-t-il une probabilité de 60 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?
- j) En dessous de quel nombre de moustiques avalés y a-t-il une probabilité de 10 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?
- k) En dessous de quel nombre de moustiques avalés y a-t-il une probabilité de 70 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?
- l) Dans quel intervalle centré autour de la moyenne y a-t-il une probabilité de 99 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?
- m) Dans quel intervalle centré autour de la moyenne y a-t-il une probabilité de 80 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?

*Solution*

- a)  $1 - \Phi(1.6667) = 5.48\%$
- b)  $1 - \Phi(-0.5667) = 71.45\%$
- c)  $\Phi(-1.3333) = 9.12\%$
- d)  $\Phi(1.3333) = 90.88\%$
- e)  $\Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 38.3\%$
- f)  $\Phi(1.6667) - \Phi(0.8333) = 15.45\%$
- g)  $\Phi(1.1667) - \Phi(-0.8333) = 67.6\%$
- h)  $350 + 30 \cdot \Phi^{-1}(0.97) = 406.4$
- i)  $350 + 30 \cdot \Phi^{-1}(0.4) = 342.4$
- j)  $350 + 30 \cdot \Phi^{-1}(0.1) = 311.6$
- k)  $350 + 30 \cdot \Phi^{-1}(0.7) = 365.7$
- l)  $\varepsilon = 30 \cdot \Phi^{-1}(0.995) = 77.3$   
intervalle :  $[272.7; 427.3]$
- m)  $\varepsilon = 30 \cdot \Phi^{-1}(0.9) = 38.4$   
intervalle :  $[311.6; 388.4]$

\*

Historiquement, on définit la débilité mentale à partir du Q.I., calibré pour suivre une loi normale de moyenne 100 dans un pays « civilisé ».

D'après le *Larousse médical*, la débilité serait

légère : entre 70 et 85 ;

moyenne : entre 50 et 70 ;

profonde : en dessous de 50.

Sachant que :

le Q.I. moyen d'un chauffeur de taxi est de 100, avec un écart-type de 15 ;

le Q.I. moyen d'un rappeur français est de 88, avec un écart-type de 13 ;

le Q.I. moyen d'un rappeur américain est de 87, avec un écart-type de 11 ;

calculer, sous l'hypothèse d'une loi normale, la probabilité d'un Q.I. inférieur à 70

a) chez un chauffeur de taxi ;

b) chez un rappeur français ;

c) chez un rappeur américain.

(Bien entendu, ces données sont fantaisistes...)

*Solution*

a)  $\Phi(-2) = 2.28 \%$

b)  $\Phi(-1.3846) = 8.31 \%$

c)  $\Phi(-1.5455) = 6.11 \%$

\*

**L**e principal du lycée Robespierre dit au principal du lycée Charlemagne :

– Nos élèves ont mieux réussi l'examen de mathématiques que les vôtres. Leur moyenne est de 15 ; chez vous, elle n'atteint que 14.

– Oui, mais au lycée Robespierre, l'écart-type est de 1, tandis qu'il s'élève à 2 au lycée Charlemagne. Or les distributions obéissent à des lois normales et les effectifs sont identiques dans nos deux écoles. Cela implique davantage d'excellents résultats au lycée Charlemagne. Plus précisément, un calcul permet d'établir que les élèves ayant obtenu une note d'au moins 18 sont environ 17 fois plus nombreux chez nous que chez vous.

– Un autre calcul permet d'établir que les élèves dont la note ne dépasse pas 12 sont environ 117.5 fois plus nombreux chez vous que chez nous.

– Au lycée Charlemagne, nous préférons cultiver l'excellence, même si c'est au détriment de la réussite des plus faibles.

– Au lycée Robespierre, nous préférons cultiver l'homogénéité, même si c'est au détriment de l'excellence.

Donner les calculs qui fournissent les facteurs 17 et 117.5.

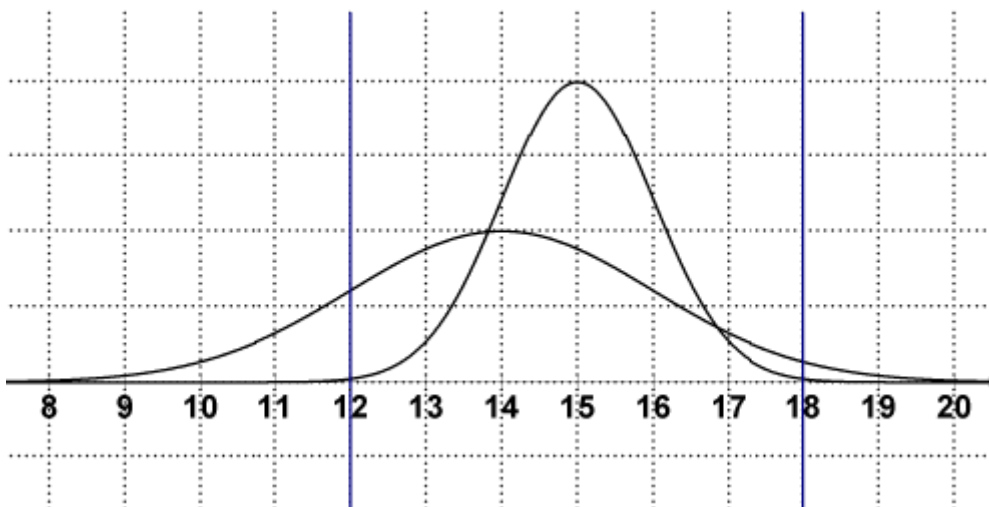
Expliquer ce phénomène au moyen d'un graphique.

*Solution*

| Robespierre                                 | Charlemagne                                 |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $\mu=15$ et $\sigma=1$                      | $\mu=14$ et $\sigma=2$                      |
| $P(X \geq 18) = 1 - \Phi(3)$<br>$= 0.135\%$ | $P(X \geq 18) = 1 - \Phi(2)$<br>$= 2.275\%$ |
| $P(X \leq 12) = \Phi(-3)$<br>$= 0.135\%$    | $P(X \leq 12) = \Phi(-1)$<br>$= 15.867\%$   |

$$\frac{2.275}{0.135} \approx 17$$

$$\frac{15.867}{0.135} \approx 117.5$$



Que ce soit après 18 ou avant 12, la courbe du lycée Charlemagne est au-dessus de celle du lycée Robespierre.

Dans le beau pays d'Amarillo, une élection présidentielle approche. Il y a deux candidats : Alligator et Crocodile. Un sondage portant sur un échantillon aléatoire de 900 électeurs donne 54 % d'intentions de vote pour Alligator et 46 % pour Crocodile.

- a) Pour chacune des fréquences, donner l'intervalle de confiance à 95 %.
- b) Au niveau de confiance de 95 %, Alligator a-t-il raison de croire qu'il sera élu ?
- c) Pour chacune des fréquences, donner l'intervalle de confiance à 99 %.
- d) Au niveau de confiance de 99 %, Alligator a-t-il raison de croire qu'il sera élu ?

Caïman, qui organise des paris sur les résultats électoraux, commande un nouveau sondage, cette fois-ci sur un échantillon aléatoire de 5'000 électeurs.

Maintenant, Alligator est crédité de 52 % d'intentions de vote, et Crocodile de 48 %.

- e) Au niveau de confiance de 99 %, avons-nous raison de croire qu'Alligator sera élu ?

### *Solution*

- a) Alligator : [50.74 % ; 57.26 %] Crocodile : [42.74 % ; 49.26 %]
- b).....
- c) Alligator : [49.72 % ; 58.28 %] Crocodile : [41.72 % ; 50.28 %]
- d) non, Alligator a tort.
- e) Alligator : [50.18 % ; 53.82 %] Crocodile : [46.18 % ; 49.82 %]

\*

En République de Godive, il y a 400 prêtres. Un sondage a été effectué auprès d'un échantillon de 250 prêtres pour leur demander l'âge de leur premier péché. Les réponses ont permis de calculer une moyenne de 63 ans. Par ailleurs, un message divin nous assure que l'écart-type (sur toute la population des 400 prêtres) est de 12 ans. Calculer l'intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne.

### *Solution*

$$\varepsilon = 1.96 \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 0.9$$

$$[63 - 0.9 ; 63 + 0.9] = [62.1 \text{ ans} ; 63.9 \text{ ans}]$$

\*

Quand, pour estimer une fréquence  $\gamma$ , on effectue un sondage aléatoire portant sur  $n$  personnes, la marge d'erreur, avec une incertitude  $\alpha$ , si on néglige le facteur  $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ , vaut :  $\varepsilon = \left( \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right) \cdot \sqrt{\frac{\gamma \cdot (1-\gamma)}{n}}$

$\gamma \cdot (1-\gamma)$  vaut au maximum 0.25 (quand  $\gamma = 0.5$ ). Donc :  $\varepsilon \leq \frac{0.5 \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{n}}$

Avec  $\alpha = 0.05$ , nous avons  $\Phi^{-1} \left( 1 - \frac{0.05}{2} \right) = 1.96$  et donc :  $\varepsilon \leq \frac{0.98}{\sqrt{n}}$

Compléter le tableau suivant :

*Solution*

| $n$    | $\frac{0.98}{\sqrt{n}}$ |
|--------|-------------------------|
| 30     |                         |
| 50     |                         |
| 100    |                         |
| 500    |                         |
| 1'000  |                         |
| 2'000  |                         |
| 5'000  |                         |
| 10'000 |                         |

| $n$    | $\frac{0.98}{\sqrt{n}}$ |
|--------|-------------------------|
| 30     | 0.179                   |
| 50     | 0.139                   |
| 100    | 0.098                   |
| 500    | 0.044                   |
| 1'000  | 0.031                   |
| 2'000  | 0.022                   |
| 5'000  | 0.014                   |
| 10'000 | 0.010                   |

\*

Dans les années 60, le sénateur américain Russell Long déclara que si un échantillon de 1'000 personnes dans une ville de 600'000 habitants était suffisant pour se faire une idée des résultats à une élection future, un échantillon de 300 à 400 personnes dans sa ville de Bâton-Rouge (peuplée à l'époque d'environ 200'000 habitants) devrait suffire à donner une prévision de même fiabilité.

Avait-il raison ?

### *Solution*

Non, la fiabilité d'un sondage dépend de la taille de l'échantillon ; mais l'influence de la taille de la population que l'on veut sonder est négligeable quand elle est beaucoup plus grande que celle de l'échantillon.

\*

Dans les années 70, un double sondage effectué aux USA avait donné les résultats suivants :

1<sup>er</sup> sondage. Question posée : « Pensez-vous que les États-Unis doivent autoriser les discours publics contre la démocratie ? »

Résultats : oui 21 % ; non 62 % ; sans opinion 17 %

2<sup>e</sup> sondage. Question posée : « Pensez-vous que les États-Unis doivent interdire les discours publics contre la démocratie ? »

Résultats : non 39 % ; oui 46 % ; sans opinion 15 %

Comment expliquer que le taux de « non » au 2<sup>e</sup> sondage soit presque 2 fois plus grand que le taux de « oui » au 1<sup>er</sup> sondage ?

### *Solution*

Il se pourrait qu'il se dégage du verbe « interdire » l'impression d'une forte menace pour la liberté d'expression. Les gens pourraient être plus facilement tentés de répondre « non » à un projet qui parle d'interdire que de répondre « oui » à un projet qui parle d'autoriser. Il ne s'agit là bien sûr que d'une hypothèse.

\*

« En étant létale, en étêtant Tell, la télé tente l'état. Elle attente à l'élan natal et tanne l'Atlante. À l'antenne, l'âne attelle le talent à l'aléa ; Léa, la lente nénette à la natte nette, étale le néné ; Tantale le tâte et tête le néant. »

Mener une étude statistique des lettres dans le texte précédent. Il vous est demandé :

- de repérer quelles sont les 5 lettres employées dans ce texte (sans tenir compte des variations introduites par les accents, ni de la distinction majuscule/minuscule) ;
- de compter pour chaque lettre le nombre de fois qu'elle apparaît ;
- de tracer un diagramme en bâtons, de type lettre-fréquence ;
- de tracer un diagramme circulaire.

\*

Soit la variable statistique  $X_j = j$ , pour  $j$  variant de 1 à  $n$ . Trouver une formule générale pour le coefficient de variation et montrer qu'il tend vers  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

*Solution*

$$\begin{aligned}
 CV^2 &= \frac{Var(X)}{\bar{X}^2} = \frac{(\frac{1}{n} \sum X_j^2) - \bar{X}^2}{\bar{X}^2} = \frac{1}{n} \frac{\sum X_j^2}{\bar{X}^2} - 1 = \frac{1}{n} \frac{\sum X_j^2}{(\frac{1}{n} \sum X_j)^2} - 1 = \frac{n \sum X_j^2}{(\sum X_j)^2} - 1 \\
 &= \frac{n \sum j^2}{(\sum j)^2} - 1 = \frac{n^2(n+1)(2n+1)/6}{(n(n+1)/2)^2} - 1 = \frac{n^2(n+1)(2n+1) \cdot 4}{n^2(n+1)^2 \cdot 6} - 1 = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (n+1)} - 1 \\
 &= \frac{n-1}{3 \cdot (n+1)} = \frac{n+1-2}{3 \cdot (n+1)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot (n+1)}
 \end{aligned}$$

Et donc :

$$CV = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot (n+1)}}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3 \cdot (n+1)} = 0$ , le coefficient de variation tend vers  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

# Problèmes provocateurs

[Avertissement : ces problèmes sont susceptibles de heurter certaines sensibilités. Oui, je sais, une telle formule est d'une banalité indigne des esprits libres, mais nous vivons dans un monde occidental qui baigne tellement dans une moroline de mauviettes que je préfère prendre la précaution d'usage...]

## Arithmétique

Le corps d'un être appétissant donne quatre litres de sang. Dracula doit boire en moyenne vingt litres de sang par semaine pour ne pas perdre son humour. Combien lui faut-il de victimes pour tenir cent trente-trois jours sans s'écarter de ce régime ?

Le prix d'une passe au dix janvier passe de cent seize euros à cent deux euros, car après les fêtes les prix sont honnêtes. Exprime en pour cent ce rabais décent !

\*

Les docteurs Andrade et Srihari, chercheurs au *National Institute of Mental Health and Neurosciences of Bangalore* (India), ont publié en 2001 une étude qui montre que 4.5 % des adolescents mangent leurs crottes de nez. Si l'on suppose que ce pourcentage peut s'appliquer à la population d'un collège de 311 élèves, combien d'entre eux ingurgitent leurs crottes de nez ?

\*

Une entreprise de pompes funèbres publie l'annonce suivante :

« Mourrez en février ! 30 % de réduction sur tous nos cercueils. »

Pour profiter de cette offre, Monsieur X se suicide le 14 février. Son cercueil lui coûte alors 560 francs. Combien lui aurait-il coûté s'il était mort un autre mois ?

\*

Monsieur Ahmed, un narcotraffiquant algérien sous OQTF, est condamné par un tribunal parisien à 10 jours de travaux d'intérêt général. Il n'en fait que 5, puis est libéré. Sachant que le revenu annuel net de Monsieur Ahmed est de 45 millions d'euros et qu'il n'a pas pu se livrer à son commerce illégal pendant les 5 jours d'exécution de la peine, combien l'État français doit-il lui verser pour compenser le manque à gagner ?

## Équations

**B**arnabé le bourreau  
prend cent-quatorze euros  
pour couper une tête  
et trente-quatre euros  
pour toute autre requête.  
S'il reçoit mille euros  
pour vingt tâches bien faites,  
combien cet homme honnête  
a-t-il coupé de têtes ?

**L**e gramme de cocaïne  
coûte douze Bolivars  
et le gramme d'héroïne  
trente-quatre Bolivars.  
Pour les revendre à ma tante,  
j'achète les deux produits.  
Prix total : neuf cent cinquante.  
Poids total : quarante-huit.  
Ah ! je lis dans vos yeux glauques  
que vous brûlez de savoir  
quel est le poids de la coke.  
Calculez ! C'est un devoir !

\*

**L**a princesse Bouton-d'or est couverte d'acné. Elle vend à des sorcières le sébum  
qu'elle extrait de ses comédons. Sachant qu'elle demande 7.35 francs par  
gramme et prend une taxe fixe de 18.95 francs pour ses frais administratifs, quelle  
quantité de sébum a-t-elle vendue à la sorcière Samantha qui a dû acquitter une  
facture de 1025.90 francs ?

\*

**E**n 2050, la population du canton de Genève atteint 840'000 individus, dont 83 %  
d'étrangers. Combien faudrait-il chasser d'étrangers pour que la proportion de  
Suisses atteigne 51 % ?

\*

**U**n marchand d'esclaves veut liquider son stock. Il vend les trois quarts des  
esclaves à 832 francs / pièce. Parmi ceux qui restent, il en tue 8 qui sont  
malades. Les autres sont soldés à 424 francs / pièce. Au terme de cette opération, il  
est plus riche de 180'568 francs. Combien avait-il d'esclaves au début ?

\*

**U**n terroriste a acheté un certain nombre de caisses contenant chacune 300  
cartouches de fusil mitrailleur. Si la même quantité de cartouches lui avait été  
livrée par caisses de 425, il y aurait 15 caisses de moins. Combien a-t-il reçu de  
caisses ?

\*

**E**n 2050, dans toute l'Europe, l'hétérosexualité est considérée comme une déviance. Les hétérosexuels doivent subir un traitement médical destiné à les rendre homosexuels. Ce traitement coûte 1'500 euros pour une femme et 2'500 euros pour un homme. Il ne reste dans toute l'Europe que 100 hétérosexuels, hommes ou femmes. Sachant que le coût total pour les traiter est de 206'000 euros, combien y a-t-il de femmes parmi eux ?

\*

**H**ier, Max a tiré 66 coups. Chaque fois qu'il manquait la cible, il versait 4 Francs à Lili ; chaque fois qu'il touchait la cible, Lili lui donnait 10 Francs et un bisou. Au terme de ce jeu, Max s'est retrouvé plus riche de 100 Francs. Combien a-t-il reçu de bisous ?

\*

**S**oliman dit à Bajazet : « Donne-moi 21 de tes femmes et nous en aurons autant l'un que l'autre ». Bajazet lui répond : « Donne-moi 13 de tes femmes et j'en aurai le double de ce qui te restera ». Combien chacun a-t-il de femmes ?

\*

**U**ne blanche vaut deux noires. Non, ce n'est pas un slogan raciste, mais une réalité musicale... Considérons une mélodie ne comportant que des blanches et des noires, sans aucun silence. Le nombre total de notes est de 54. Le morceau dure 43 secondes et la durée d'une noire est d'une demi-seconde. Combien y a-t-il de blanches ?

## Exponentielles et logarithmes

Animée par la volonté de combattre la croissance démographique, l'Armée Verte, une organisation terroriste, a mis au point un redoutable virus dont l'effet se traduit par la formule suivante :

$P = P_0 \cdot e^{-0.007t}$ , où  $P_0$  est la population initiale,  $t$  le temps en jours et  $P$  la population qui vit encore  $t$  jours après que le virus a été répandu sur la Terre.

Calculer le temps nécessaire pour que la population passe de 7 milliards à 3 milliards.

## Suites arithmétiques et géométriques

La première année de son activité criminelle, un tueur en série bute 12 enfants. Puis il dégomme chaque année 46 mioches de plus que l'année précédente. Combien d'années lui sont nécessaires pour cumuler 19'024 victimes ?

\*

Le roi du Katanga,  
pour divertir les masses,  
fait empaler six gars  
sur une grande place.  
Puis, touché par l'amour  
de son peuple complice,  
il double chaque jour  
le nombre de supplices.  
À vous de calculer  
le nombre cumulé  
de pauvres empalés  
au bout de trois semaines !  
Donnez-vous de la peine !

Chaque fois que Sam divorce,  
le doute en lui se renforce.  
Son malheur est si cuisant  
qu'il perd d'un coup six pour cent  
des illusions qui lui restent.  
Mais Sam conserve la foi.  
Il n'épouse que des pestes  
et divorce vingt-huit fois.  
Calculez le pourcentage  
d'illusions que le destin  
fait perdre à ce beau crétin  
qui peu à peu devient sage.

\*

Sur une île déserte, Robinson dispose de 6 tonneaux contenant chacun 50 litres de rhum. Robinson boit chaque jour 0.4 % de la quantité de rhum qu'il reste à son réveil. Combien de litres de rhum reste-t-il au bout de 365 jours (en négligeant l'évaporation) ?

## Analyse combinatoire

**B**lanche-Neige est terrible !  
Elle aime prendre un bain  
avec trois des sept nains.  
Combien de choix possibles ?

**L**e curé de Trouville  
est un vieux pédophile.  
De combien de façons  
peut-il choisir six gosses  
parmi treize garçons  
promis au sacerdoce ?

\*

**U**n photographe ibère  
a besoin d'aligner  
un marquis de Madère,  
un Anglais bien peigné,  
un cheik de Palestine,  
un duc de Neuchâtel,  
un amiral de Chine,  
un agent d'Israël.  
De combien de manières  
le photographe ibère  
va pouvoir aligner  
ces hommes très soignés,  
sans mettre côte à côte  
(ce serait une faute)  
l'espion israélien  
et le Palestinien ?

**M**ontrez-moi vos lumières !  
De combien de manières  
pouvons-nous dispatcher  
cent deux Roms débauchés  
si Berne en prend vingt-quatre,  
Fribourg quarante-quatre,  
Genève dix de moins  
et Montreux n'en veut point ?

\*

**U**n vieillard dispose de deux bocaux de bonbons empoisonnés : des bleus et des roses. Il veut puiser dans ces bocaux pour composer des sachets de 10 bonbons, qu'il compte offrir à ses petits-enfants. Combien de sortes de sachets peut-il préparer ?

\*

**L**e président doit désigner un ministre de la couture, un ministre du jugement dernier et un ministre du vide intérieur. Chaque poste doit être occupé par une personne différente. De combien de manières peut-il les choisir parmi 8 personnes ?

\*

À cause de la crise économique, l'émir Azhar 2 prend la décision de ne venir aux fêtes de Genève qu'avec 12 de ses 40 femmes.

- a) Combien de possibilités a-t-il de les choisir ?
- b) Ses 40 femmes se divisent en deux catégories : d'une part les épouses légitimes, au nombre de 9 ; d'autre part les concubines, au nombre de 31. Si l'émir souhaite emmener 4 épouses légitimes et 8 concubines, calculer le nombre de possibilités conformes à cette volonté.

\*

Un fleuriste propose 10 variétés de roses. Monsieur Martin veut acheter deux bouquets. Pour sa femme, un bouquet composé de 3 roses de variétés différentes ; pour sa maîtresse, un bouquet composé de 5 roses de variétés différentes. Déterminer le nombre de possibilités pour la paire de bouquets.

\*

La langue française comporte 31'000 noms communs, dont 17'000 de genre masculin et 14'000 de genre féminin. Pour réaliser l'égalité des genres, une militante de la parité souhaite transformer 1'500 noms masculins en noms féminins. Donner une formule, sans la calculer, permettant de dénombrer les possibilités d'effectuer cette opération, sachant que le changement de genre est envisageable pour n'importe quel mot.

\*

En topologie sexuelle, une femme est un corps à 3 trous, un homme est un corps à 2 trous et 1 tige. Combien y a-t-il de possibilités d'assemblages tiges-trous dans une partouze bisexuelle de 15 hommes et de 10 femmes, avec pour contrainte qu'un trou ne doit jamais recevoir plus d'une tige en même temps ?

\*

Parmi les anagrammes du mot NARCOTIQUE, combien contiennent la séquence :

- 1) TON
- 2) CORAN
- 3) TE
- 4) NIQUE

## Probabilités

**Q**uatorze bébés blancs et dix-neuf bébés noirs  
sont aujourd'hui stockés dans mon congélateur.  
J'en sors sept au hasard pour mon repas du soir.  
Bienheureux étudiants bouffis de vanité,  
à vous de calculer la probabilité  
que les bébés soient tous de la même couleur.

\*

**P**armi soixante-six personnes  
qui portent le voile intégral,  
il y a soixante-deux connes  
et quatre as du sport cérébral.  
Je tire au hasard dix personnes  
dans l'ensemble en premier cité.  
Quelle est la probabilité  
qu'au moins neuf d'entre elles soient connes ?

\*

**D**eux personnes jouent à la roulette russe. Une cartouche est introduite dans un  
barillet à 6 coups. Le barillet est tourné au hasard avant chaque pression sur la  
détente. Quelle est la probabilité qu'une des personnes reçoive une balle dans la tête  
au plus tard au 4<sup>e</sup> coup ?

\*

**V**ous avez devant vous 10 boîtes. 4 sont piégées : leur ouverture déclenche  
l'explosion d'une bombe qui provoque une mort immédiate. Votre mission est  
d'ouvrir successivement 3 boîtes (si vous arrivez jusque là).  
a) Dessiner l'arbre de cette mission, en indiquant sur chaque branche l'événement  
(explosion ou non) et la probabilité correspondante.  
b) Quelle est la probabilité que cette mission vous fasse mourir ?

\*

**5** couples hétérosexuels mariés se livrent à un jeu érotique. Un homme et une  
femme sont choisis au hasard. Ils doivent alors s'embrasser. Quelle est la  
probabilité que le hasard désigne un homme et une femme qui ne sont pas mariés  
ensemble ?

\*

Dans l'opéra d'Offenbach « Les contes d'Hoffmann », Coppélius vend des yeux : des bleus et des noirs.

Supposons qu'il ait dans son sac 12 yeux bleus et 8 yeux noirs.

S'il sort 2 yeux au hasard, quelle est la probabilité :

- a) qu'ils soient noirs tous les deux ?
- b) qu'ils soient de couleurs différentes ?

\*

L'orchestre de chambre de Gland contient 32 membres, dont 30 sont masculins. Les deux femmes sont Angélique et Constance. Lors d'une soirée où l'orchestre est au complet, Angélique flatte au hasard 10 membres masculins de l'orchestre ; Constance flatte au hasard 12 membres masculins de l'orchestre. Quelle est la probabilité qu'Angélique et Constance flattent au moins un même membre masculin de l'orchestre ?

\*

En Koboldie, un pays habité par des gnomes, une enquête portant sur un échantillon de 100 individus donne une moyenne de 3.5 cm pour la taille du pénis, avec un écart-type de 0.5 cm. Calculer l'intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne.

\*

# Divagations

## Étude de 6

6 est-il un nombre pair ? Selon Carl-Friedrich Gauss, la réponse est oui. Pourquoi ? Parce que, dit-il, 6 est divisible par 2. Cet argument me paraît simpliste. Rien ne nous permet de croire que 6 est disposé à se laisser diviser. Vous en connaissez beaucoup des êtres qui accepteraient sans broncher d'être divisés ? Vous-même, comment réagiriez-vous si un bourreau chinois vous déclarait divisible ? À supposer que 6 se montre favorable à être divisé, rien ne nous ne permet d'affirmer que sa préférence irait à l'être par 2. Il est tout à fait possible qu'il ne donne son accord qu'à une division par 3. Après tout, Dieu lui-même a choisi de se diviser par 3. Donnons encore à 6 une chance d'accéder à la parité. Admettons qu'il se plie à notre volonté de le diviser par 2. Cela reste insuffisant. Il serait en effet miraculeux que les deux parties soient rigoureusement égales. Avez-vous déjà réussi à couper un sandwich en deux parties égales ? C'est tout simplement impossible. Par conséquent, il m'apparaît très improbable que 6 soit un nombre pair.

## Si je pose la moitié, je retiens quoi ?

On écrit « zéro point » au singulier. On écrit aussi « 1.75 point ». En français (ce n'est pas le cas dans toutes les langues), le pluriel commence à 2. Donc, en toute logique, il ne faudrait pas dire : « un homme et sa moitié vont au concert », mais « un homme et sa moitié va au concert ». Avant que les féministes n'obtiennent l'abolition du mot « moitié » comme acception du mot « épouse », voici un petit problème vicieux :

Un homme et sa moitié vont au concert. Ils paient en tout 120 francs. Combien aurait payé l'homme s'il était venu seul au concert ?

Solution A : 120 francs, parce que, pour un homme, sa moitié n'a pas de prix.

Solution B : 0 franc, parce que, pour un homme, sa moitié est tout, or un homme privé de tout n'est rien.

Solution C : 30 francs, parce qu'un homme sans moitié n'est que la moitié de lui-même.

En théorie, dans cette arithmétique à géométrie variable, il doit y avoir une infinité de solutions...

## Un soulèvement de triangles

Ces derniers temps, j'écris des cours sur les triangles. Et je me heurte à une révolte des triangles quelconques. « Ça suffit ! hurlent-ils. Ne dites plus de nous que nous sommes quelconques ! C'est une insulte ! Qu'ont-ils de plus que nous ces triangles rectangles, isocèles, équilatéraux ? À bas les privilèges ! »

Je m'étais permis de qualifier de quelconque un triangle ayant des angles de 20 degrés, 40 degrés et 120 degrés. Il m'a engueulé : « Quelconque toi-même, citoyen lambda ! Un de mes angles vaut le double de la somme des deux autres ! Ce n'est pas être quelconque, ça, imbécile ! » Je suis bien obligé de lui donner raison.

Un autre triangle m'a déclaré : « Si un triangle rectangle a un droit angle que les autres n'ont pas, tous les triangles naissent égaux en remarquabilité. La quelconquété doit être abolie sur le champ de la géométrie. »

Et je suis très embarrassé par un segment de droite qui prétend pouvoir accéder au statut d'un triangle ayant deux angles nuls et un angle plat. Quand je lui ai répondu qu'il était un triangle dégénéré, il m'a traité de nazi !

Bref, je pensais m'occuper de géométrie pour m'éloigner de la politique, et me voici plongé dans une révolution.

Un triangle révolutionnaire qui en avait marre d'être pris pour un con est devenu cône en tournant sur lui-même. De cône, il s'est fait ensuite icône par multiplication imaginaire.

En tant que reine des sciences, la mathématique devrait s'inquiéter : elle risque la guillotine.

## L'antistatistique

Pourquoi faut-il remplacer les cours de statistique par des cours d'antistatistique ? La statistique étudie ce qui est normal, moyen, majoritaire, probable, bref c'est la science de la médiocrité, chose déprimante pour une personne de goût.

L'antistatistique s'intéresse à ce qui est singulier, exceptionnel, original, improbable. L'antistatistique met de la poudre à éternuer dans les boîtes à moustaches, transforme en champignon atomique la courbe de Gauss, dilate les intervalles de confiance par un coefficient de force amoureuse, essore les nuages de points pour en faire pleuvoir de l'or, s'honore de biaiser un échantillon sexy, ne sonde que les profondeurs d'un génie, envoie les droites de régression chez les psychanalystes, célèbre l'écart qui refuse d'être type, condamne la représentativité au supplice de la roue, empêche les bandes rivales de guerroyer sur un diagramme, chauffe à 360 degrés les camemberts pour faire fondre les pourcentages d'inanité, guillotine tout affreux qui s'emploie à définir un indice de bonheur brut.

## Problème de mathématique

Depuis plus de 20 ans, Mlle Cohen vend des fleurs. 30 francs suisses le lys, 10 francs suisses la rose et 9 francs suisses l'œillet vert. Un colonel achète 100 fleurs parmi ces 3 variétés. Il lui en coûte 1889 francs suisses. Combien y a-t-il de roses sachant qu'il en prend une de moins que de lys ?

Voici le rapport du président de la commission de la surveillance des énoncés :

1. Une femme adulte doit être désignée par Madame, non par Mademoiselle.
2. Donner un nom juif à une commerçante qui pratique des prix scandaleux relève de l'antisémitisme.
3. L'insistance à préciser que les prix sont en francs suisses témoigne d'un patriotisme exacerbé qui s'accorde mal avec les valeurs universalistes que l'école multiculturelle entend promouvoir.
4. Un problème où il est question d'argent risque d'implanter dans les jeunes cervelles un préjugé favorable au capitalisme.
5. Pourquoi préciser que l'acheteur est un colonel ? N'y a-t-il pas dans ce choix la trace d'une propagande militariste ?
6. Le nombre 1889 est à proscrire. L'année de naissance d'Adolf Hitler est un symbole nazi flagrant.
7. Le lys est un emblème royaliste, la rose est associée au parti socialiste et l'œillet vert ne peut manquer d'évoquer l'écologisme politique. Le fait que le lys ait beaucoup plus de valeur que la rose ou l'œillet vert est une tentative subtile de soutenir les idées royalistes et de jeter le discrédit sur les socialistes et les verts.
8. Le lys, avec son pistil en forme de phallus d'âne, symbolise le mâle ; la rose symbolise la femme ; et l'œillet vert, depuis Oscar Wilde, symbolise l'homosexuel. Un problème qui accorde moins de valeur à la rose et à l'œillet vert qu'au lys donne un signal fort d'antiféminisme et d'homophobie.

Voici donc une nouvelle version proposée par la commission.

M donne des objets. Chaque objet A pèse 30 kg, chaque objet B 10 kg et chaque objet C 9 kg. N reçoit 100 objets parmi ces 3 types. Le poids total de ces 100 objets est de 1867 kg. Combien y-a-t-il d'objets B sachant que N en reçoit un de moins que d'objets A ?

Mais cette version ne convient pas non plus, parce que tous les substantifs sont de genre masculin...

## Cadeau de Noël

À 5 ans, je comprenais parfaitement la théorie des quanta. N'ayant pas encore l'imagination appauvrie par la dictature des fantasmes sexuels, je n'avais aucune difficulté à concevoir qu'un électron puisse traverser deux fentes en même temps. Si les exploits d'une particule élémentaire relèguent ceux de Casanova au comique de répétition, c'est pour une raison toute simple : un événement n'est rien d'autre qu'une somme pondérée de toutes les histoires possibles qui mènent à lui. Et l'intrication des spins était pour moi lumineuse. Après tout, il ne s'agit que d'un produit tensoriel dans un espace de Hilbert.

Il était donc fort naturel, en 1966, que je demandasse au Père Noël le cours de physique de Richard Feynman. Toutefois, cette requête posait deux problèmes. Le premier était que l'hypothèse de l'existence du Père Noël entraînait une violation des lois de la thermodynamique. En effet, il est facile de calculer que, pour déposer en une seule nuit des cadeaux dans chaque foyer chrétien de la planète Terre, le Père Noël devrait se déplacer à une vitesse si grande que le frottement avec l'atmosphère enflammerait sa barbe. Le second problème était ma lutte contre la langue anglo-américaine, devenue après guerre la pire ennemie de la langue française qui, hélas, s'est laissé envahir, enlaidir. J'avais appris le roumain, le polonais, le finnois, le grec, le russe, le basque, le swahili, mais je refusais d'étudier l'anglais. Or, en 1966, le cours de physique de Feynman n'existait qu'en anglais. C'est pourquoi, comme cadeau de Noël, je demandais à mes parents un fort en rondins, comme Fort-Cheyenne, dans « Le 20<sup>e</sup> de cavalerie ». En ce temps-là, Lucky Luke et John Wayne faisaient partie de mon panthéon. Ils y sont restés. « John Wayne n'est pas mort » titrait Roland Jaccard qui tirait la langue aux hystériques de la petite morale du 21<sup>e</sup> siècle.

À 5 ans, j'avais bien sûr assimilé la leçon de Zarathoustra :

« L'homme doit être élevé pour la guerre et la femme pour le délassement du guerrier : tout le reste est folie. »

La femme ne m'intéressait pas encore : je ne voyais pas bien comment me délasser avec cet animal impensable. Mais la guerre me faisait rêver... Et quoi de mieux qu'un fort en bois, avec une tour de guet, des maisons, un drapeau, des personnages à pied ou à cheval, pour pratiquer l'amour de la guerre ?

Mon fort avait une enceinte carrée. On pouvait y pénétrer par la porte ou par le haut. La seconde possibilité me livrait une solution à un fameux problème policier : celui du meurtre en chambre close. Comment entrer dans un cube fermé sans traverser aucune des faces ? Élémentaire ! il suffit d'emprunter un trajet qui exploite une quatrième dimension.

Avant la Saint-Sylvestre, mon fort en bois fut baptisé « Fort-Kaeser ». Au début, des restrictions matérielles me contraignirent à en faire un espace-temps dédié à de classiques affrontements entre tuniques bleues et peaux-rouges. Aimant aussi bien les uns que les autres, il m'était difficile d'user de ma toute puissance pour accorder la victoire à un camp.

Dès janvier 1967, au gré d'achats que nécessitait l'expansion de mon univers, Fort-Kaeser s'enrichit de figurines anachroniques : soldats romains, mercenaires suisses de la Renaissance, pioupious de la seconde guerre mondiale, dinosaures. La technologie venait aussi mettre son grain de chlorure de sodium. Désormais, un peau-rouge pouvait chevaucher une motocyclette pour bondir par-dessus l'enceinte, mais il courait le risque de se faire exploser par un tank.

Quelle joie ce fut pour moi de me plonger dans les délices de la guerre totale, celle qui s'affranchit des barrières temporelles. Toutes les époques réunies dans un élan d'amour. Avec ferveur, j'organisais des orgies de civilisations.

Fort-Kaeser, en définitive, était un dispositif pour expérimenter l'électrodynamique quantique de Richard Feynman : la réalité doit inclure toutes les histoires possibles.

## Le temps des nombres qui en imposent

Quel avenir ? Voici des points de repère.

Dans les 1'000 prochaines années, pas grand-chose de remarquable à signaler. Une cinquantaine de séismes de magnitude 9...

Le réchauffement climatique n'empêchera pas l'arrivée d'une période glaciaire dans probablement 30'000 ans.

La mer Méditerranée, dont les bords ont accouché de si belles civilisations, disparaîtra dans 50 millions d'années, et la dérive de Wegener mettra 250 millions d'années à former une nouvelle fois un supercontinent (malgré l'opposition des nationalistes).

La Terre se refroidira, sa vitesse de rotation diminuera, son atmosphère deviendra irrespirable.

C'est dur à digérer, mais il nous faut bien admettre que les œuvres d'Annie Ernaux, d'Alexandre Jollien, de Jean-Michel Basquiat et de Booba ne seront pas éternelles.

L'extinction des organismes multicellulaires est prévue d'ici 800 millions d'années (le monde sera enfin débarrassé des caniches...), celle des eucaryotes dans 1,3 milliard d'années, et les procaryotes pourraient durer encore 2,8 milliards d'années.

Le Soleil se transformera en géante amérindienne dans 5,5 milliards d'années, puis en naine caucasienne dans 7,5 milliards d'années.

La naissance d'étoiles prendra fin d'ici 10 puissance 14 ans (10 puissance 14 donne cent mille milliards, soit le nombre de poèmes figurant dans un recueil célèbre de Raymond Queneau). L'univers évoluera vers des naines (dont le lancer ne sera plus interdit), des toupies à neutrons et des trous noirs.

Dans 10 puissance 20 ans (cent milliards de milliards), les restes stellaires s'échapperont des galaxies ou tomberont dans des fosses communes noires.

Les nucléons devraient être tous désintégrés dans 10 puissance 40 ans, si ma physique est bonne. À ce stade, les trous noirs domineront l'univers. Ils s'évaporeront par rayonnement de Hawking, ce qui devrait nous conduire à 10 puissance 100 ans. Hourra ! Nous avons atteint le gogol !

Suivra une ère de particules légères qui ne se rencontreront que très rarement dans des parties fines.

Un prochain Big Bang pourrait survenir dans 10 puissance (10 puissance (10 puissance 56)) ans...

Quel avenir !

Je sais qu'il est d'usage, en fin décembre ou en début janvier, de présenter ses vœux pour la nouvelle année. En accord avec le décret de Canope, revisité par Jules César et Grégoire XIII, 2024 comportera 366 jours. Je suis tout à fait désireux de souhaiter 366 jours de bonheur aux gens que j'aime (les autres, je m'en fous)... mais, franchement, 366 jours, comparés à 10 puissance (10 puissance (10 puissance 56)) ans, ne trouvez-vous pas que ça fait un peu mesquin ?

## Ces farceurs de philosophes

Il m'est venu l'idée de compléter le paradoxe de Zénon. Admettons avec Zénon qu'il est impossible d'aller de A à B. Soit  $M_1$  le milieu du segment AB. Alors il est impossible d'aller de A à  $M_1$ . Soit  $M_2$  le milieu du segment  $AM_1$ . Alors il est impossible d'aller de A à  $M_2$ . Etc. Comme la suite des points  $M_i$  tend vers A, il est impossible d'aller de A à A, c'est-à-dire il est impossible de rester immobile. Donc Zénon aurait dû conclure : le mouvement est impossible et l'immobilité est impossible...

S'il n'y pas de mouvement ni d'immobilité, l'univers est réduit à un point. Seul un point seul n'est ni immobile ni en mouvement, car : par rapport à quoi pourrait-il être l'un ou l'autre ? Blake s'approchait de la vérité en voyant l'univers dans un grain de sable, mais, par manque d'audace, il n'a pas osé penser la réduction ultime au point. Teilhard de Chardin, lui, a compris que l'univers Oméga des possibles de Kolmogorov tendait vers le point Oméga et que le point G de la Mutante est le centre de légèreté de l'univers des lendemains qui chantent.

On dit toujours que le paradoxe de Zénon « prouve » l'impossibilité du mouvement. C'est vite dit... Il me semble qu'on peut simplifier ce paradoxe de manière à simplement « prouver » l'impossibilité de l'écoulement du temps. Achille a rendez-vous avec la Tortue. Il arrive une minute en avance et décide de l'attendre en restant assis sur une pierre. Cette position l'amène à penser. Il se dit : « Puisque je dois attendre 1 minute, il me faut d'abord attendre la moitié d'une minute, puis la moitié de la moitié qui reste, etc. Bref, je dois attendre une somme infinie de durées, donc mon attente ne finira jamais. »

Il faudrait aussi parler de l'uchronie de Zénon. C'est, dit-on, Zénon qui transmet la doctrine de Parménide à Socrate. Mais, le mouvement et l'écoulement du temps étant impossibles, Zénon n'a pas pu rencontrer Socrate. Ainsi, Socrate, au lieu d'être influencé par Parménide, fut un disciple d'Héraclite. Du coup, les dialogues de Platon sont à lire au deuxième degré. Platon ne croit qu'au changement ; sa République est un exemple de régime périssable ; son royaume des idées est une plaisanterie, puisque toutes les idées se noient dans le fleuve d'Héraclite ; même les théorèmes de géométrie n'ont rien d'éternel.

Heureusement que je suis là pour mettre sur la bonne voie les professeurs qui enseignent la pensée antique. C'est une façon de parler, bien sûr, car, comme l'a remarqué Lao-Tseu, si le mouvement est impossible, il importe peu qu'une voie soit bonne ou mauvaise, étant donné qu'on ne peut emprunter aucune voie.

J'avoue que je ne saisis pas bien de quoi parlent Parménide et Zénon quand ils balancent des mots comme « être », « non-être », « étant », « existants », « un », « multiple », et je ne m'étonne pas que Heidegger l'obscur en ait fait son miel, mais je relève dans certains propos (rapportés) de Zénon des choses qui m'ont amusé.

Ainsi, Simplicius livre ce raisonnement de Zénon : « Si les existants sont multiples, ils sont illimités. Car il y aura toujours d'autres existants entre les existants, et de nouveau d'autres existants entre ceux-ci. » Cela me fait penser à la preuve qu'il y a une infinité de nombres rationnels entre deux nombres rationnels distincts. Aristote et Eudème commentent une aporie de Zénon : « Si le lieu est quelque chose, il doit être dans quelque chose ». Aristote déclare : « Si tout existant se trouve dans un lieu, il est évident qu'il devra exister un lieu du lieu, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. » Eudème précise : « s'il existe un lieu des existants, où sera le quelque-part de ce lieu ? Il faudra par conséquent qu'il se trouve dans un autre lieu, et celui-ci dans un autre, et ainsi de suite (...) Contre Zénon, nous dirons que le quelque-part se dit en plusieurs sens. Si l'on estimait qu'effectivement, les réalités doivent se trouver en un lieu, on se tromperait : en effet, ni la santé, ni le courage, ni tant d'autres choses ne se montrent comme existant dans un lieu. Et il en va de même du lieu, s'il est tel qu'on l'a dit être. Et si, d'autre part, le quelque-part existe autrement, il sera fort possible que le lieu existe quelque part. » Ni Aristote, ni Eudème ne semblent avoir l'idée que le lieu d'un lieu puisse être égal à ce lieu, ou, en termes de théorie des ensembles, qu'un ensemble puisse se contenir lui-même. Bref, Cantor, Russell et toute la bande ne sont pas loin de Zénon. Pourquoi a-t-il fallu plus de deux millénaires pour passer de Zénon à Cantor ?

Sur la couverture d'un livre consacré à la théorie des ensembles, un dessin qui semble modéliser un pubis féminin représente un « plongement élémentaire de l'Univers V dans son ultrapuissance M », ce qui correspond probablement à ce que Jarry nomme « l'amour absolu ».

Il me semble qu'il échappe à beaucoup de philosophes que Heidegger est un humoriste. Dans son essai : « Le mot de Nietzsche « Dieu est mort » », j'ai relevé quelques phrases d'un comique irrésistible :

« Or, si la valeur ne laisse pas l'être être l'être qu'il est en tant qu'être même, alors le dépassement du nihilisme n'est, au contraire, que le véritable accomplissement du nihilisme. »

« Nihilisme signifie : tout est nul à tous les égards. Tout, c'est l'étant en entier. Or, l'étant se tient sous la lumière de tous ses égards lorsqu'il est éprouvé comme étant. Nihilisme signifie alors qu'il n'en est rien de l'étant comme tel en son entier. Mais c'est à partir de l'être que l'étant est ce qu'il est, et comment il est. Étant admis que tout « est » tienne à l'être, l'essence du nihilisme consiste en ce que de l'être lui-même, il ne soit rien. L'être lui-même, c'est l'être en sa vérité, laquelle vérité appartient à l'être. »

La clef de cet humour poétique est donnée par la dernière phrase de cet essai : « Et la pensée ne commence que lorsque nous avons éprouvé que la Raison, tant magnifiée depuis des siècles, est l'adversaire le plus opiniâtre de la pensée. »

Alfred Korzybski, qui inspira Gaston Bachelard, Paul Watzlawick, Basarab Nicolescu, et aussi van Vogt, Boris Vian, Milan Kundera, considère que les multiples jets du verbe être sont une grande source de confusion. Alors, pour m'amuser un peu, j'ai choisi un philosophe qui fait un usage immodéré de ce verbe et de sa substantivation et, dans un court extrait de son « Introduction à la métaphysique », j'ai remplacé toutes les occurrences de son obsession par des mots pompés dans mon étant, à la surface duquel nagent des signes. Cela donne :

Ceci, à savoir que nous comprenons l'obscur, cela ne sonne pas seulement réel, cela gicle nécessaire. Sans une telle ouverture de l'ombre, nous ne pourrions d'aucune façon singer « les hommes ». Que nous plaisantions, cela ne tient certes pas d'une absolue nécessité. Il reste parfaitement possible que l'homme ne blague pas. Il a filé un temps, en effet, où l'homme ne se tordait pas de rire. Toutefois, cela sort impropre quand nous disons : il a brûlé un temps où l'homme ne se moquait pas. En tout temps, l'homme se manquait, se méconnaît et se maquillera, parce que le temps se temporalise seulement du fait que l'homme se trompe.

Heidegger n'est pas le seul philosophe passé maître dans le domaine de l'humour. Voici deux exemples lus dans un livre de Clément Rosset :

Les planètes ne parlent pas, selon Lacan, pour trois raisons contradictoires, quoique d'ailleurs également valables : premièrement, parce qu'elles n'ont rien à dire – deuxièmement, parce qu'elles n'en ont pas le temps – troisièmement parce qu'on les a fait taire. Lacan poursuit sa plaisanterie en attribuant le mutisme des planètes à la fixité de leur éclat. Les étoiles en revanche scintillent, donc elles pourraient parler si Newton ne les avait pas fait taire...

W.V.O. Quine, qui peut paraître moins drôle, rejoint pourtant la 'pataphysique dans ses Méthodes de logique. Se fixant pour but de définir la singularité en se passant de tout nom singulier, de tout nom propre, il se définit lui-même ainsi : celui qui est tel que quiconque a écrit « Méthodes de logique » lui est identique. La 'pataphysique étant la science du particulier, incluant le postulat qu'il n'y a de science que de l'universel, on est en plein dedans avec Quine. Bingo !

Un des mots les plus étranges de la langue française est l'adjectif « impensable » qui, au sens strict, désigne une chose qu'on ne peut pas penser, pas même un peu. Peut-on donner un exemple de chose qui serait impensable pour tout être humain ? Je ne pense pas. Une chose impossible, comme un triangle à 4 côtés, n'est pas impensable, puisque je viens d'y penser en imaginant une figure qui s'en rapprocherait. La « chose en soi » kantienne se rapproche d'une chose impensable, sauf que la notion de « chose en soi » est pensable et que chaque chose en soi n'a pour nous de réalité que dans la mesure où elle se présente à nous en tant que phénomène, c'est-à-dire en chose pensable. Cela dit, « impensable » peut être employé dans des phrases comme « la transcendance de pi est impensable pour un enfant de 3 ans ».

Je viens d'avoir l'idée de créer une théorie des nombres impensables. De nombreuses propositions peuvent être facilement démontrées. Par exemple : le double d'un nombre impensable est un nombre impensable. Démonstration : soit  $x$  un nombre impensable. Si  $2x$  était un nombre pensable, il suffirait de diviser  $2x$  par 2 pour pouvoir penser  $x$ . Plus généralement, un nombre impensable ne peut être solution d'aucune équation à coefficients pensables.

Bien entendu, il n'existe pas de nombres impensables, puisque le fait de pouvoir produire des énoncés à leur sujet les rend pensables. Mais il existe probablement des nombres peu pensables. Il faudrait pouvoir définir le taux de pensabilité d'un nombre. De proche en proche, nous en arriverions au taux de pensabilité d'une idée. Il serait alors possible de se pencher sur le problème du taux de pensabilité de la notion d'impensable. Évidemment, si ce taux de pensabilité est lui-même un nombre au faible taux de pensabilité, nous ne sommes pas sortis de l'auberge des joyeux déconneurs.

Tous les logiciens sont incohérents.

Or je suis logicien.

Donc je suis cohérent.

# **Les mathématiques au service de la création littéraire**

## Arrangements simples

Soit  $E = \{\text{terre ; eau ; air ; feu}\}$  l'ensemble des 4 éléments, selon le philosophe grec Empédocle.

Les 12 arrangements simples de 2 éléments parmi les 4 de l'ensemble E sont les suivants :

|               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| [terre ; eau] | [eau ; terre] | [terre ; air] | [air ; terre] |
| [terre ; feu] | [feu ; terre] | [eau ; air]   | [air ; eau]   |
| [eau ; feu]   | [feu ; eau]   | [air ; feu]   | [feu ; air]   |

Dans le texte ci-dessous, chacun de ces arrangements est présent dans une seule phrase et toute phrase en contient un seul.

Je pète le feu, je me sens libre comme l'air. Le Paradis sur terre, est-ce un loisir perpétuel de s'envoyer en l'air ? Pas de promesse en l'air, jouons avec le feu ! Pour ne pas me noyer dans un verre d'eau, j'ai besoin de changer d'air. En route pour la Terre de feu ! J'y vivrai d'amour et d'eau fraîche, je ferai feu de tout bois. La chasse en plein air, j'en ai l'eau à la bouche. Tout feu tout flamme, je goûterai les fruits de la terre. Je veux chanter sous les eaux de ciel et danser sur la terre qui tremble. On me dit tête en l'air, mais je sais garder les pieds sur terre. Pas question de rentrer sous terre ou de nager entre deux eaux ! Une femme qui a le feu au cul et qui n'a pas inventé l'eau tiède, voilà ce que je souhaite.

## Arrangements avec répétitions

Soit  $E = \{\text{vrai} ; \text{faux}\}$  un ensemble à 2 éléments.

Les 8 arrangements, avec répétitions, de 3 éléments pris dans les 2 de l'ensemble  $E$  sont les listes suivantes :

|                      |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| [vrai ; vrai ; vrai] | [vrai ; vrai ; faux] | [vrai ; faux ; vrai] | [vrai ; faux ; faux] |
| [faux ; vrai ; vrai] | [faux ; vrai ; faux] | [faux ; faux ; vrai] | [faux ; faux ; faux] |

Dans le texte ci-dessous, chacun de ces arrangements est présent dans une seule phrase (mais certaines phrases n'en contiennent aucun).

Le juge appelle Saint-Ange à la barre. Comme chacun peut le voir, le vrai visage d'un vrai saint est celui d'un vrai cochon. Il déclare : « Avec ses faux cils et sa fausse vertu, ma sœur est une vraie pute. »

Le procureur demande : « Elle chante faux dans un vrai bouge, n'est-il pas vrai ? »  
« Vrai de vrai ! répond l'accusé avec un air moins faux que d'habitude. « Et quand elle danse, précise-t-il, les faux mouvements de ses faux seins donnent de fausses joies. »

Question du procureur : « À qui ? »

Saint-Ange : « À de vrais cons, doublés de faux-monnayeurs, capables de faire de faux témoignages. »

Le procureur s'emporte : « Quel faux jeton vous faites, et quelle vraie balance, mais c'est un faux problème ! La vraie raison de votre présence ici, c'est que vous êtes un faux frère et une vraie crapule ! Vous prostituez votre sœur ! »

Saint-Ange réplique : « Un procureur accuse, un proxénète protège. »

\*

Soit  $E = \{a ; e ; i ; o ; u\}$  un ensemble de 5 voyelles (« y » a été exclu).

Les 25 arrangements, avec répétitions, de 2 éléments parmi les 5 de l'ensemble E sont les listes suivantes :

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| [a ; a] | [a ; e] | [a ; i] | [a ; o] | [a ; u] |
| [e ; a] | [e ; e] | [e ; i] | [e ; o] | [e ; u] |
| [i ; a] | [i ; e] | [i ; i] | [i ; o] | [i ; u] |
| [o ; a] | [o ; e] | [o ; i] | [o ; o] | [o ; u] |
| [u ; a] | [u ; e] | [u ; i] | [u ; o] | [u ; u] |

Le texte ci-dessous met en scène chacun de ces arrangements, à raison d'un par mot.

Comment tuer l'instant neuf, bannir l'écart futur, briser l'esprit luron qui distord tout canon moral, honnir avant l'écho l'intrus aux brûlants instincts cochons ? Avec l'Enfer !

\*

Soit  $E = \{\text{verbe} ; \text{nom}\}$  un ensemble à 2 éléments.

Les 16 arrangements avec, répétitions, de 4 éléments pris dans les 2 de l'ensemble E sont les listes suivantes (en abrégant « verbe » par v et « nom » par n) :

|                 |                 |                 |                  |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| [n ; n ; n ; n] | [n ; n ; n ; v] | [n ; n ; v ; n] | [n ; n ; v ; v], |
| [n ; v ; n ; n] | [n ; v ; n ; v] | [n ; v ; v ; n] | [n ; v ; v ; v], |
| [v ; n ; n ; n] | [v ; n ; n ; v] | [v ; n ; v ; n] | [v ; n ; v ; v], |
| [v ; v ; n ; n] | [v ; v ; n ; v] | [v ; v ; v ; n] | [v ; v ; v ; v]  |

Le texte ci-dessous met en scène chacun de ces arrangements, à raison d'un par phrase. La première, qui comporte 4 noms, illustre [n ; n ; n ; n] ; la seconde, qui comporte un verbe, suivi de 3 noms, illustre [v ; n ; n ; n] ; etc.

Nom d'un pieu de motel de merle ! Nous vivons une époque de sciottes, mes cochons ! La politesse claque sous les instruments de torture. Chez les jeunots, passe encore, mais chez les vioques, ça me gêne. Où va-t-on si les fossiles se mettent à jurer ? Même les Angliches – les gentlemen – causent maintenant comme des arsouilles. Je connais une duchesse qui éructe en société. C'est une rombière dont la morale se déglingue. Faudrait lui tirer les esgourdes à cette grognasse ! L'exemple doit venir du sommet. Hélas, le Daron, ce gibier de potence, nous crache dessus. La démence de l'âge le fait pleuvoir. Le verbe chute, s'écrase et pourrit. Moi qui ne veux pas choquer, je pèse mes mots. Je les choisis, je les arrange avec maniaquerie avant de vous les balancer. Et si ça vous débecte de me lire, vous pouvez tous rêver !

## Combinaisons simples

Soit  $E = \{\text{mais ; ou ; et ; donc ; or ; ni ; car}\}$  un ensemble de 7 conjonctions de coordination.

Les 21 combinaisons simples de 2 éléments parmi les 7 de l'ensemble  $E$  sont les parties suivantes :

|               |             |             |              |            |            |
|---------------|-------------|-------------|--------------|------------|------------|
| {mais ; ou}   | {ou ; et}   | {et ; donc} | {donc ; or}  | {or ; ni}  | {ni ; car} |
| {mais ; et}   | {ou ; donc} | {et ; or}   | {donc ; ni}  | {or ; car} |            |
| {mais ; donc} | {ou ; or}   | {et ; ni}   | {donc ; car} |            |            |
| {mais ; or}   | {ou ; ni}   | {et ; car}  |              |            |            |
| {mais ; ni}   | {ou ; car}  |             |              |            |            |
| {mais ; car}  |             |             |              |            |            |

Dans le texte ci-dessous, chacune de ces combinaisons est présente dans une seule phrase et toute phrase en contient une seule.

Dans le ciel de naissance de l'humanité, je vois la conjonction du sentiment et de la pensée, donc je suis. Car l'imaginaire permet d'être ou de suivre. Or je ne veux pas mourir ni précéder l'essence. Mais je veux rencontrer la nature du rêve et l'inépuisable étrangeté de la nature. Donc je marche à l'ombre des livres, sur les traces des mémoires que je n'ai pas lues, car toute vie est un centon. Je me rapproche de chaque verbe ou de chaque image de verbe, or ce qui se conjugue rassemble. Parfois je me trompe : je n'emploie pas le temps juste ni la bonne personne, mais l'infinitif est suffisamment définitif pour témoigner ma reconnaissance. Je puis me reconnaître en mille et une vies, car je compte autant sur moi que sur les autres pour faire un beau voyage. Donc je suis heureux comme Ulysse, mais sans être possédé par Poséidon. Je ne crains pas les dieux ni les maîtres, car je ne les reconnais pas tant qu'ils ne reconnaissent pas leur fragilité. Seul le bonheur n'est pas fragile ni trompeur, donc facile. Mais la recherche de la simplicité complique l'art de vivre, car il faut trouver les bonnes formules d'impolitesse. Celles qui ne ménagent pas les voisins ni les autres emmerdeurs et celles qui font sourire les complices. Or la coordination de la gifle et de la caresse ne s'enseigne plus à l'école. Mais la fête commence quand l'école est finie... ou je n'ai rien compris ! Or le jeu vaut la chandelle, donc brûlons-la par les deux bouts ! Je ne veux pas tomber pile sur la Terre ni perdre la face cachée de la Lune : je veux régner sur tout l'Univers, depuis le centre ou la circonférence. Or la conférence au sommet me donne les moyens de faire pleuvoir mes centres d'intérêt sur nombre de vallées qui débordent de joie, mais il est vrai que j'abuse de la parabole. Donc de la trajectoire ou plutôt du mouvement ! Car il faut bouger pour attendre son but, or atteindre son heure est la réponse du verbe au temps. Et sept merveilles ou sept péchés lancent des ponts mobiles entre nous, drôles d'animaux que nous sommes.

\*

Il existe 10 combinaisons simples de 2 voyelles parmi les 5 de l'ensemble {a ; e ; i ; o ; u}. Ce sont les paires :

{a ; e}, {a ; i}, {a ; o}, {a ; u}, {e ; i}, {e ; o}, {e ; u}, {i ; o}, {i ; u}, {o ; u}

Dans le texte suivant, chaque phrase est construite avec seulement 2 voyelles, de manière à exploiter une et une seule fois chacune de ces combinaisons.

Né à Genève, Pascal Kaeser amalgame les maths et les lettres. Ce colonel des poètes formels orchestre l'ombre et le nombre, le héros et le zéro. Cet esprit libre chiffre le délire et le délice, rêve de science en liesse, relève mille défis, rit de tisser ici-même dix liens entre cinq signes. Ce bretteur brûle de tuer les erreurs les plus têtues. D'instinct, il occit l'idiot, tord l'infini, vomit l'opinion. Il a faim d'art malin, d'air marin, d'assassinats marrants. Il vit sur un pic, il fuit plus d'un bruit, il s'instruit. Pas bavard, plus pacha qu'un chat, plus savant qu'un fana du Gradus, Pascal a l'aura d'un truand. Gascon dans son salon, Pascal sort sans galons. Goûtons-nous son humour ?

## Combinaisons avec répétitions

Soit  $E = \{\text{minéral} ; \text{végétal} ; \text{animal}\}$  l'ensemble des 3 règnes.

Voici les 10 combinaisons de taille 3, qu'on peut former en puisant dans  $E$ , si la répétition de tout élément est permise :

$\{\{\text{minéral} ; \text{minéral} ; \text{minéral}\}\} \{\{\text{végétal} ; \text{végétal} ; \text{végétal}\}\}$   
 $\{\{\text{animal} ; \text{animal} ; \text{animal}\}\} \{\{\text{minéral} ; \text{minéral} ; \text{végétal}\}\}$   
 $\{\{\text{minéral} ; \text{minéral} ; \text{animal}\}\} \{\{\text{végétal} ; \text{végétal} ; \text{minéral}\}\}$   
 $\{\{\text{végétal} ; \text{végétal} ; \text{animal}\}\} \{\{\text{animal} ; \text{animal} ; \text{minéral}\}\}$   
 $\{\{\text{animal} ; \text{animal} ; \text{végétal}\}\} \{\{\text{minéral} ; \text{végétal} ; \text{animal}\}\}$

Dans le texte ci-dessous, chacune de ces combinaisons est présente dans une seule phrase et toute phrase en contient une. Au lieu de prendre les mots « minéral », « végétal » et « animal », j'ai choisi des mots appartenant à ces règnes. Par exemple, « argent » est un représentant du règne minéral, « violette » un représentant du règne végétal, « vache » un représentant du règne animal.

La parole est d'argent, le silence est d'or et le reste se paie en silex. Le loup achète la biche avec une émeraude. Contre un saphir, la vache veut bien céder sa fleur. Dans une boule de cristal, je vois danser les perles des oies. Violette, Marguerite, Églantine : vous êtes toutes les mêmes ! Vous n'avez rien dans le chou, vous ne pensez qu'à l'oseille, pauvres dindes ! Un bouc vous donne du blé, vous devenez chiennes ! À la messe : colombes ; au travail : vipères ; au lit : chattes. Pierres le matin, belladones l'après-midi, dionées la nuit. Belles plantes, météorites creuses, vous me laissez de marbre !

## Permutations simples

Soit  $E = \{\text{aller ; faire ; mettre}\}$  un ensemble de 3 verbes.

Les 6 permutations des éléments de l'ensemble  $E$  sont les listes suivantes :

|                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| [aller ; faire ; mettre] | [aller ; mettre ; faire] | [faire ; aller ; mettre] |
| [faire ; mettre ; aller] | [mettre ; aller ; faire] | [mettre ; faire ; aller] |

Dans le texte ci-dessous, chacune de ces permutations est présente dans une seule phrase et toute phrase en contient une seule.

- Comment allons-nous faire pour mettre de l'ordre ?
- Nous allons nous mettre au travail en faisant de notre mieux.
- Mettre au pas les danseurs nous fera-t-il aller en enfer ?
- Si nous mettons le feu aux poudres, nous allons faire la fête.
- Ça fait plaisir d'aller mettre du mouvement sur la piste de bal.
- Ce que nous faisons met en lumière des idées qui vont bien ensemble.

## Permutations avec éléments répétés

Les 6 permutations de deux fois le mot « bien » et de deux fois le mot « mal » sont les suivantes :

[bien ; bien ; mal ; mal]   [bien ; mal ; bien ; mal]   [bien ; mal ; mal ; bien]  
[mal ; bien ; bien ; mal]   [mal ; bien ; mal ; bien]   [mal ; mal ; bien ; bien]

Dans le texte ci-dessous, chacune de ces permutations est présente dans une seule phrase et toute phrase en contient une seule.

J'ai bien du mal à ne pas dire du mal du bien. Les apôtres du bien feraient bien de ne pas voir que le mal dans ce qui n'est pas si mal. Le mal est l'obsession de ceux que drogue le bien, ce qui fait du mal à l'intelligence du bien. C'est bien mal servir le bien que l'employer à traquer le mal. Mal comprendre le mal éloigne du vrai bien les gens qui se réclament du bien. Voir dans le mal ce qu'il peut y avoir de bien, voilà tout le bien que je souhaite à ceux qui jugent mal.

**Nombres autopermutants**

Chacun des nombres suivants est égal au nombre de permutations possibles des chiffres et des apostrophes qui le constituent :

31'725'945'021'352'982'400'000

91'957'651'644'391'619'486'400'000

853'740'676'447'588'582'081'228'800'000

et il n'y a pas d'autres solutions jusqu'à 30 chiffres.

## Permutation en spirale (ou sextine)

Une vieille forme poétique est fondée sur l'application itérée de la permutation qui transforme 123456 en 615243. On parle de permutation en spirale. Pourquoi ? Parce que si, à partir de :

1  
2  
3  
4  
5  
6

vous partez de 6 et vous tracez une courbe (sans rebroussements) qui va successivement atteindre 1, 5, 2, 4 et 3, celle-ci forme une spirale.

Traditionnellement, dans une sextine, la permutation porte sur la liste obtenue en prenant le dernier mot de chaque vers.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>La sextine est l'art de la fuite<br/>Ou l'art d'anticiper la suite<br/>Dans une partie à six tours.<br/>Autant d'échanges sur le court<br/>Exigent un œil qui voit loin,<br/>Pour que la balle arrive à point.</p> <p>Repartons de ce dernier point,<br/>Prenons directement la fuite,<br/>Et descendons un peu moins loin,<br/>Cela pour revenir ensuite,<br/>Par des vols de plus en plus courts,<br/>Au vainqueur de ce premier tour.</p> <p>Pour ce qui est des autres tours,<br/>Le schéma qu'Arnaut mit au point,<br/>Afin de divertir la cour,<br/>Sans du roi provoquer la fuite,<br/>Pas plus que celle de sa suite,<br/>S'applique idem et aussi loin.</p> | <p>La spirale bondit au loin<br/>Quand elle inaugure son tour.<br/>Ô l'étourdissante poursuite<br/>Sur un circuit de quelques points,<br/>Dont le tracé a pris la fuite,<br/>Afin qu'un nouvel ordre ait cours.</p> <p>Mais non ! le canal le plus court<br/>N'est pas le meilleur, vu de loin.<br/>Un tuyau trop droit a des fuites.<br/>Le flot des mots a plus d'un tour<br/>Dans son sac gonflé d'embonpoint,<br/>Transportant tout, de chambre en suite.</p> <p>Aurait-on compris tout de suite,<br/>Sans écouter ce petit cours,<br/>Que la permutation n'est point<br/>Choisie au hasard - et de loin ! -<br/>Car la loi veut que le Grand Tour<br/>Se boucle au terme de six fuites.</p> <p>L'air de la fuite a clos la suite<br/>Après six tours sur un parcours<br/>Venu de loin, qui ne meurt point.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

\*

Voici une variante où la même permutation porte sur six mots disposés à l'intérieur d'un distique :

Quand dort un château-fort, le vaisseau de la mort  
se rapproche du port d'où sort le vent du tort.

À tort un esprit dort, sans redouter le sort  
qui peut fort bien l'ancrer dans le port de la mort.

Mort au tort qui éteint les lumières du port !  
Honte à qui dort de peur tandis que le fort sort !

Si le sort est la mort pour le faible et le fort,  
le tort dort-il ailleurs, loin des yeux, loin du port ?

Mais le port sort d'un rêve et le danger s'endort.  
La mort a le grand tort d'affoler l'amour fort.

Fort d'aimer chaque port, je n'aurai jamais tort  
de jouir de mon sort : quand je vis, la mort dort.

## Permutation en lacet

J'appelle permutation en lacet l'opération qui transforme 123456 en 632145.  
Pourquoi ? Disposez les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 en deux colonnes, comme suit :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 4 |
| 5 | 6 |

Tracez la ligne brisée qui relie 6-3-2-1-4-5. Qu'obtenez-vous ? Un lacet !  
Cette permutation est d'ordre 4. Cela veut dire que si vous l'appliquez successivement 4 fois, vous retrouvez l'ordre initial 123456.

Voici un poème en 4 tercets, où la permutation en lacet porte sur les premiers et derniers mots des vers.

Fais de ta vie un bouquet de pourquoi !  
Viens découvrir les blagues du mardi !  
Prends ton envol sur les pistes d'ailleurs !

Ailleurs, c'est proche, à côté d'où tu viens.  
Pourquoi te perdre ? Accompagne les faits !  
Mardi, le temps se donne à qui le prend.

Prends le parti de rire des pourquoi !  
Viens t'amuser comme un héros d'ailleurs !  
Fais le Gascon : trois duels ce mardi !

Mardi ! Quel coup ! Le goût du jeu te vient.  
Pourquoi prier ? Bouge-toi, donne et prends !  
Ailleurs, ici, plaisante avec les faits !

## Compositions d'un entier

Une composition d'un entier  $n$  strictement positif est une représentation de  $n$  comme somme d'une suite d'entiers strictement positifs (l'ordre compte dans cette représentation).

### *Exemple*

Les compositions de 4 sont :

4  
3 + 1  
2 + 2  
2 + 1 + 1  
1 + 3  
1 + 2 + 1  
1 + 1 + 2  
1 + 1 + 1 + 1

### *Application littéraire*

Chaque composition d'un entier  $n$  donne lieu à un vers de  $n$  syllabes. La partition détermine la longueur des mots en syllabes.

Souci dément :  
un esprit sûr  
dans un corps mûr  
voit-il vraiment  
les éléments  
furtifs qui vont  
mesurer son  
étonnement ?

## Compositions d'un entier en deux parts

Une composition en deux parts d'un entier  $n$  strictement positif est une représentation de  $n$  comme somme de deux entiers strictement positifs (l'ordre compte dans cette représentation). Cela revient à donner toutes les solutions strictement positives de l'équation  $x + y = n$ .

Le poème suivant expose les 9 compositions en deux parts de 10 via la succession des mètres (l'unité est donc la syllabe). Par exemple, les deux premiers vers traduisent la composition :  $1 + 9 = 10$ .

Mon  
âme prête oreille à deux démons.  
Je les  
encourage à me bousculer.  
Ici-bas,  
la valeur naît du combat.  
Pour mieux penser,  
je m'exerce à danser.  
Avancer d'un pas,  
reculer d'un pas,  
voilà comment j'entends  
vivre en deux temps.  
Je sais dérouter l'ennui  
jour et nuit.  
Quand je change de gabarit,  
je ris.  
Ma devise est : que le double soi  
soit !

## Partitions d'un ensemble et nombres de Bell

Une partition d'un ensemble  $E$  est un ensemble de sous-ensembles disjoints de  $E$ , dont la réunion donne  $E$  (on écarte l'ensemble vide de cette liste). Le nombre de partitions d'un ensemble comportant  $n$  éléments est le  $n^e$  nombre de Bell, qu'on note  $B(n)$ .

*Exemple* Pour  $E := \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ , l'ensemble des 15 partitions de  $E$  est formé de :

$$\begin{aligned} &\{\{1\} \{2\} \{3\} \{4\}\} \\ &\{\{1 ; 2\} \{3\} \{4\}\} \\ &\{\{1 ; 3\} \{2\} \{4\}\} \\ &\{\{1 ; 4\} \{2\} \{3\}\} \\ &\{\{1\} \{2 ; 3\} \{4\}\} \\ &\{\{1\} \{2 ; 4\} \{3\}\} \\ &\{\{1\} \{2\} \{3 ; 4\}\} \\ &\{\{1 ; 2\} \{3 ; 4\}\} \\ &\{\{1 ; 3\} \{2 ; 4\}\} \\ &\{\{1 ; 4\} \{2 ; 3\}\} \\ &\{\{1 ; 2 ; 3\} \{4\}\} \\ &\{\{1 ; 2 ; 4\} \{3\}\} \\ &\{\{1 ; 3 ; 4\} \{2\}\} \\ &\{\{1\} \{2 ; 3 ; 4\}\} \\ &\{\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}\} \end{aligned}$$

*Application littéraire*

À partir de l'ensemble des partitions de  
 $E := \{1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n\}$ ,

je propose la construction d'un poème de  $B(n)$  vers de  $n$  syllabes chacun, où chaque partition livre un vers selon le principe suivant : les syllabes aux positions  $i$  et  $j$  dans le vers riment ensemble si et seulement si elles appartiennent à un même sous-ensemble fourni par la partition.

Sois lumineux,  
 Papa Soleil !  
 Le coeur le veut  
 Et, remonté,  
 Le dit dix fois.  
 Le sang pressant  
 Qui rend zinzin  
 Tout ouvroir noir  
 Brille en riant.

Voilà la voix  
 Du plus humain.  
 Son son d'ourson  
 Arrive à Râ.  
 Sois beau, chaud, haut,  
 Midi qui rit !

## Partitions d'un ensemble et nombres de Stirling de seconde espèce

Soit  $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$  un ensemble à 5 éléments.

Les  $S(5,2)=15$  partitions de  $E$  en ensembles de 2 ensembles sont les suivantes :

|                                 |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\{\{1\} ; \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}\}$ | $\{\{2\} ; \{1 ; 3 ; 4 ; 5\}\}$ | $\{\{3\} ; \{1 ; 2 ; 4 ; 5\}\}$ |
| $\{\{4\} ; \{1 ; 2 ; 3 ; 5\}\}$ | $\{\{5\} ; \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}\}$ | $\{\{1 ; 2\} ; \{3 ; 4 ; 5\}\}$ |
| $\{\{1 ; 3\} ; \{2 ; 4 ; 5\}\}$ | $\{\{1 ; 4\} ; \{2 ; 3 ; 5\}\}$ | $\{\{1 ; 5\} ; \{2 ; 3 ; 4\}\}$ |
| $\{\{2 ; 3\} ; \{1 ; 4 ; 5\}\}$ | $\{\{2 ; 4\} ; \{1 ; 3 ; 5\}\}$ | $\{\{2 ; 5\} ; \{1 ; 3 ; 4\}\}$ |
| $\{\{3 ; 4\} ; \{1 ; 2 ; 5\}\}$ | $\{\{3 ; 5\} ; \{1 ; 2 ; 4\}\}$ | $\{\{4 ; 5\} ; \{1 ; 2 ; 3\}\}$ |

Supprimons les partitions qui contiennent un singleton, à savoir les cinq premières. Il reste :

|                                 |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
|                                 |                                 | $\{\{1 ; 2\} ; \{3 ; 4 ; 5\}\}$ |
| $\{\{1 ; 3\} ; \{2 ; 4 ; 5\}\}$ | $\{\{1 ; 4\} ; \{2 ; 3 ; 5\}\}$ | $\{\{1 ; 5\} ; \{2 ; 3 ; 4\}\}$ |
| $\{\{2 ; 3\} ; \{1 ; 4 ; 5\}\}$ | $\{\{2 ; 4\} ; \{1 ; 3 ; 5\}\}$ | $\{\{2 ; 5\} ; \{1 ; 3 ; 4\}\}$ |
| $\{\{3 ; 4\} ; \{1 ; 2 ; 5\}\}$ | $\{\{3 ; 5\} ; \{1 ; 2 ; 4\}\}$ | $\{\{4 ; 5\} ; \{1 ; 2 ; 3\}\}$ |

Le poème ci-dessous utilise ces partitions comme schémas de rimes. Chaque strophe correspond à une partition, selon le principe : les vers numéros  $x$  et  $y$  d'une strophe riment ensemble si et seulement s'ils appartiennent à un même sous-ensemble fourni par la partition.

Je crois au plaisir du voyage,  
lorsque je me fraye un passage  
entre deux monuments sauvages  
qui me parlent de la raison,  
de l'énergie et des saisons.

Je crois à la force du rêve,  
lorsqu'un tsunami me soulève  
et me porte vers l'inconnu,  
afin que l'habitude crève  
et que le trac soit bienvenu.

Je crois au pouvoir de la scène,  
lorsque j'improvise sans peine  
un monologue ahurissant,  
servi par des gestes puissants,  
devant un public de sirènes.

Je crois à la beauté du chant,  
lorsque j'écoute mon penchant  
pour la voix légère ou profonde  
qui dans ma tête vagabonde  
et me fait oublier le monde.

Je crois au bonheur de marcher,  
lorsque le hasard me dirige  
vers un territoire caché,  
où je trouve sans le chercher  
un calme qui tient du prodige.

Je crois au danger du travail,  
lorsque je pèse la fatigue  
que produit cet épouvantail,  
cet égorgeur de pauvres zigues,  
ce terroriste au gouvernail.

Je crois à la vertu des singes,  
lorsque je vois aux quatre vents  
des gens torturer leurs méninges  
pour imiter les jeux savants  
de la bonne école : « Au suivant ! »

Je crois à la valeur du rire,  
lorsque j'entends des pisse-froid,  
au transcendantalisme étroit,  
causer doctement du bien-dire  
et de ce qu'il faut interdire.

Je crois à l'amour du présent,  
lorsque je me sens libre d'être  
le tout premier de mes ancêtres,  
le plus vert de mes partisans  
et le plus serein de mes maîtres.

Je crois au doute et n'y crois pas,  
lorsque je comprends que la chance  
relativise mes croyances  
et que ma timide insouciance  
me convie à de bons repas.



Voici un deuxième texte fabriqué avec le même moule.

Entre l'homme aux idées courtes qui a soif d'équité large et l'homme aux dents longues qui s'en moque dans les grandes largeurs, le monde n'est pas équitable. Quiconque a le courage de refuser la dictature des grands principes passe pour un salaud. Oui, mais le provocateur prend du plaisir à se moquer de tout ce qui passe pour sérieux. Aussitôt qu'un esprit se veut équitable, il a le sentiment de prendre du poids. Pourtant, quelle mesquinerie de passer son temps à vouloir être de son temps ! L'équité, c'est le droit du nombre à prendre à la gorge la forte tête qui refuse l'ennui conforme à l'air du temps. Se moquer de ce que veut la majorité, pour moi, ça ne se refuse pas !

## Roue-mémoire

0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1 Quelle est la particularité de cette liste ?

Écrivons les 3 premiers termes, puis les 3 termes à partir du 2<sup>e</sup>, puis les 3 termes à partir du 3<sup>e</sup>, puis les 3 termes à partir du 4<sup>e</sup>, etc.

Nous obtenons l'ensemble des 8 triplets possibles de deux objets (0 et 1).

La liste 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1 s'appelle une roue-mémoire.

Dans les poèmes suivants, cette roue-mémoire fournit un schéma métrique.

Je traduis chaque 0 par un vers de 5 syllabes et chaque 1 par un vers de 7 syllabes.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Les chats de tout poil<br/>me ressemblent davantage<br/>que les gens qui vont au bal<br/>goûter les fruits du tapage<br/>et boire un poison<br/>qui abrutit les plus sages.<br/>J'aime la raison<br/>que les chats m'inspirent.<br/>Leur calme leçon<br/>m'offre la clef d'un empire.</p> | <p>L'homme s'imagine<br/>au-dessus de l'animal,<br/>oubliant qu'à l'origine<br/>il s'en tirait plutôt mal.<br/>Même à notre époque,<br/>l'esprit de l'homme est bancal.<br/>Tout penseur débloque<br/>de mille façons.<br/>C'est naze, un colloque !<br/>Moi, j'écoute les pinsons.</p>  |
| <p>Je suis un primate<br/>pas beaucoup plus avisé<br/>qu'un ouistiti psychopathe<br/>ou qu'un super chimpanzé.<br/>Comment ? Le langage ?<br/>Oh ! pas de quoi pavoiser !<br/>Ce petit bagage<br/>ne pèse pas lourd.<br/>Je reste un sauvage<br/>qui accomplit quelques tours.</p>           | <p>Ils ne sont pas drôles,<br/>nos maîtres spirituels !<br/>Leur blablabla nous entôle.<br/>Leur message habituel<br/>sent trop le savon<br/>qui rendrait l'âne immortel.<br/>Ce qu'on dit profond<br/>tient de l'imposture.<br/>L'homme est un bouffon<br/>qui travestit sa nature.</p> |

## Code cyclique

Voici les vecteurs d'un code cyclique de longueur 12 et de dimension 2, construit sur  $\text{GF}(3)$  avec le polynôme  $g = (2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0)$  :

$(0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0)$   
 $(2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0)$   
 $(1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0)$   
 $(0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1)$   
 $(2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1)$   
 $(1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1)$   
 $(0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2)$   
 $(2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2)$   
 $(1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2)$

Ce code permet la correction de deux erreurs de transmission (sa distance minimale vaut 6)

Dans le poème suivant, j'ai remplacé 0, 1, 2 par les voyelles a, i, e, et j'ai complété par des consonnes pour obtenir des mots.

Dans l'Alabama d'Anna, la samba flamba,  
 Le bal siffla, le val vibra, le bar tinta,  
 Grisant les gars, liant les pas, triplant l'éclat.  
 Angela vrilla, trembla, gifla et glapit.  
 Western zinzin, fête d'ici, enfer divin !  
 Vivent les titis, les gredins chics, les festins !  
 L'art gicla, zébra, brilla, cercla l'immanent.  
 Le cri timbré de Vicki retentit, strident :  
 « Hip, hip ! mes chéris ! L'hiver est fini, semez ! »

## Matrice d'Hadamard

Une matrice d'Hadamard d'ordre  $n$  est une matrice carrée de  $n$  lignes, composée de  $+1$  et de  $-1$ , telle que son produit avec sa transposée est égal à  $n$  fois la matrice identité.

### Exemple

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$
 est une matrice d'Hadamard d'ordre 8.

### Application littéraire

Traduire  $+1$  par la voyelle « a » et  $-1$  par la voyelle « e ». Ajouter des consonnes de manière à construire un poème.

Gala gaga d'art à Java.  
 L'abbé l'a préparé salé.  
 Magma fêté, plasma versé,  
 N'arrêtez pas, gravez l'éclat !  
 Hadamard a jeté les dés :  
 L'artefact est déjà recta.  
 Paradez, célébrez Dada,  
 Par Herrera et Mallarmé !

## Carré gréco-latin

Barman turc, on est divin...  
 En avant sur zinc, colons !  
 Gin, menthe, arak : stock bu !  
 Donc: « Fi ! Peste ! ». Putsch, sac.  
 Futur job : « Instit, ma mère ! »

Explication : Si, pour chaque mot de ce poème, on écrit l'unique voyelle qu'il contient (une ou deux fois) suivie du nombre de lettres, on obtient un carré où chaque voyelle et chaque nombre est présent dans chaque ligne et chaque colonne, et où chaque couple voyelle-nombre est présent une seule fois.

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| a6 | u4 | o2 | e3 | i5 |
| e2 | a5 | u3 | i4 | o6 |
| i3 | e6 | a4 | o5 | u2 |
| o4 | i2 | e5 | u6 | a3 |
| u5 | o3 | i6 | a2 | e4 |

## Le problème des huit reines

Disposer huit reines sur un échiquier de telle sorte qu'aucune reine ne puisse en prendre une autre en un seul coup.

|                   |                 |                 |                 |                  |                 |                  |                    |
|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|--------------------|
| – Dis-            | moi             | quel            | est             | ton              | ♀<br><b>but</b> | Sei-             | gneur ?            |
| – Mon             | ♀<br><b>but</b> | est             | de              | ré-              | gner            | par-             | tout.              |
| C'est             | le              | plus            | gé-             | né-              | reux            | ♀<br><b>but,</b> | non ?              |
| ♀<br>– <b>But</b> | dé-             | ri-             | soire           | et               | dé-             | goû-             | tant !             |
| – Er-             | reur,           | mon             | ♀<br><b>but</b> | a                | du              | ca-              | chet !             |
| – Je              | te              | crois           | en-             | cor              | loin            | du               | ♀<br><b>but...</b> |
| – J'i-            | rai             | droit           | au              | ♀<br><b>but,</b> | mon             | pe-              | tit !              |
| J'offre           | un              | ♀<br><b>but</b> | aux             | sol-             | dats :          | mou-             | rir !              |

**Assemblage érotique**

|      |       |         |
|------|-------|---------|
| la   | femme | s'ouvre |
| pour | le    | plaisir |
| au   | petit | matin   |

|       |         |           |            |
|-------|---------|-----------|------------|
| grâce | à       | l'art     | d'aimer    |
| oui   | la      | grande    | récompense |
| est   | promise | à         | l'homme    |
| que   | la      | tendresse | illumine   |

|      |         |         |           |            |
|------|---------|---------|-----------|------------|
| oui  | grâce   | à       | l'art     | d'aimer    |
| est  | promise | la      | grande    | récompense |
| la   | femme   | s'ouvre | à         | l'homme    |
| pour | que     | la      | tendresse | illumine   |
| au   | petit   | matin   | le        | plaisir    |

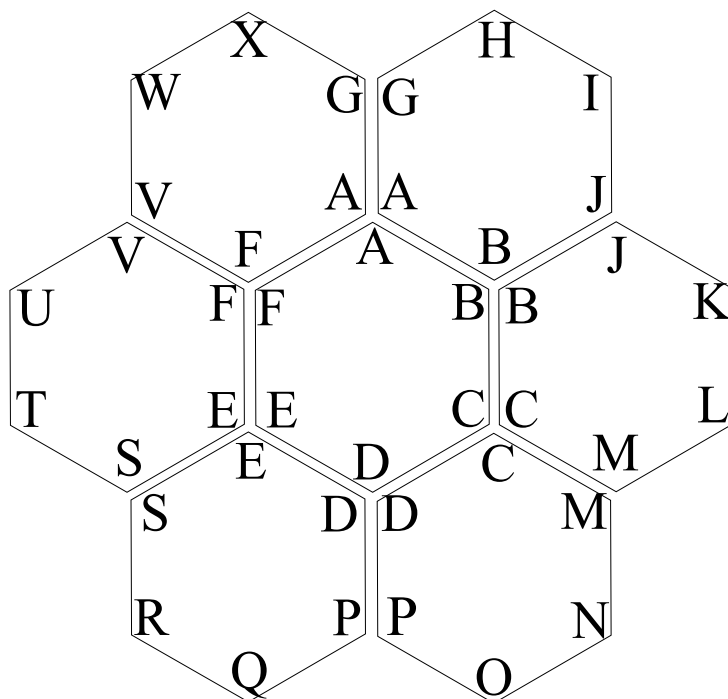
Ce poème est une solution au problème : comment découper deux carrés, chacun en deux morceaux, de manière à fabriquer un troisième carré en assemblant les quatre morceaux des deux premiers ?

AAA  
ABB  
AAA

CCCC  
DCCC  
DDCC  
CCCC

DCCCC  
DDCCC  
AAACC  
ACCCC  
AAABB

## Pavage hexagonal



En partant du sommet A de l'hexagone central et en parcourant tour à tour les hexagones selon un chemin continu qui privilégie la rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, on obtient :

ABCDEF, AGHIJB, BJKLMC, CMNOPD, DPQRSE, ESTUVF, FVWXGA

En traduisant les lettres par des vers et les groupes de 6 lettres par des strophes, une structure poétique naît.

Bon sang mais c'est bien sûr  
 Eurêka j'ai trouvé  
 On peut tourner en rond  
 Pour recouvrir le plan  
 Les vers seront des nœuds  
 Soudant les blocs ensemble

Bon sang mais c'est bien sûr  
Mercator est un as  
Je l'ai su mercredi  
J'étais dans ma baignoire  
Quand un Snark m'a mordu  
Eurêka j'ai trouvé

Eurêka j'ai trouvé  
Quand un Snark m'a mordu  
La douleur a jailli  
Mais l'idée aussi  
Si ma mémoire est bonne  
On peut tourner en rond

On peut tourner en rond  
Si ma mémoire est bonne  
Quand on cherche un défi  
On peut aussi jouer  
Avec des hexagones  
Pour recouvrir le plan

Pour recouvrir le plan  
Avec des hexagones  
Ce n'est pas difficile  
Il suffit de calquer  
Il suffit d'assembler  
Les vers seront des nœuds

Les vers seront des nœuds  
Il suffit d'assembler  
Avec eux les figures  
Autour de chaque item  
Nous avons le ciment  
Soudant les blocs ensemble

Soudant les blocs ensemble  
Nous avons le ciment  
Qui engendre la carte  
D'un nouvel Univers  
Mercator est un as  
Bon sang mais c'est bien sûr

## Les 8 trigrammes du Yi-king (arrangements avec répétitions)

Contraintes :

- un trait de type Yang donne lieu à un vers dont les substantifs sont masculins, dont la syllabe finale est masculine et dont le mètre est impair (5 syllabes) ;
- un trait de type Yin donne lieu à un vers dont les substantifs sont féminins, dont la syllabe finale est féminine et dont le mètre est pair (6 syllabes) ;
- les trois vers « riment » par contre-assonances ;
- le nom du trigramme est mentionné dès que possible dans le tercet.

|       |                                                                                   |       |                                                                                                 |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| — — — | Le <b>Ciel</b> s'est perdu,<br>mais le corps, pardi,<br>rêve du pardon.           | — — — | L' <b>Eau</b> n'est pas si tranquille.<br>Un plan, mais lequel ?<br>La sainte est dans la cale. |
| — — — | La <b>Terre</b> est sur l'abscisse,<br>où son obéissance<br>écoute la grossesse.  | — — — | Le <b>Feu</b> : plus de trac !<br>Une flamme excentrique<br>est le meilleur truc.               |
| — — — | Quand la terreur sépare<br>et les voix vitupèrent,<br>le <b>Tonnerre</b> a peur.  | — — — | Au climax du raid,<br>que la <b>Montagne</b> est rude !<br>Sur la face : des rides.             |
| — — — | Le <b>Vent</b> cherche un but,<br>compose un stabat<br>que les branches débitent. | — — — | À l'heure où l'ombre taxe,<br>le <b>Lac</b> boit le Styx<br>au fond d'un vortex.                |

## Géométrie cartésienne

Soient  $d_1$  la droite passant par les points (1 ; 10) et (10 ; 4) ;

$d_2$  la droite passant par les points (3 ; 4) et (9 ; 7).

Quel est le point d'intersection de  $d_1$  et de  $d_2$  ?

Réponse : (7 ; 6)

Comment transcrire ce problème en poème ? Par un texte en trois parties :

1<sup>re</sup> partie : 1 vers de 10 syllabes, suivi de 10 vers de 4 syllabes

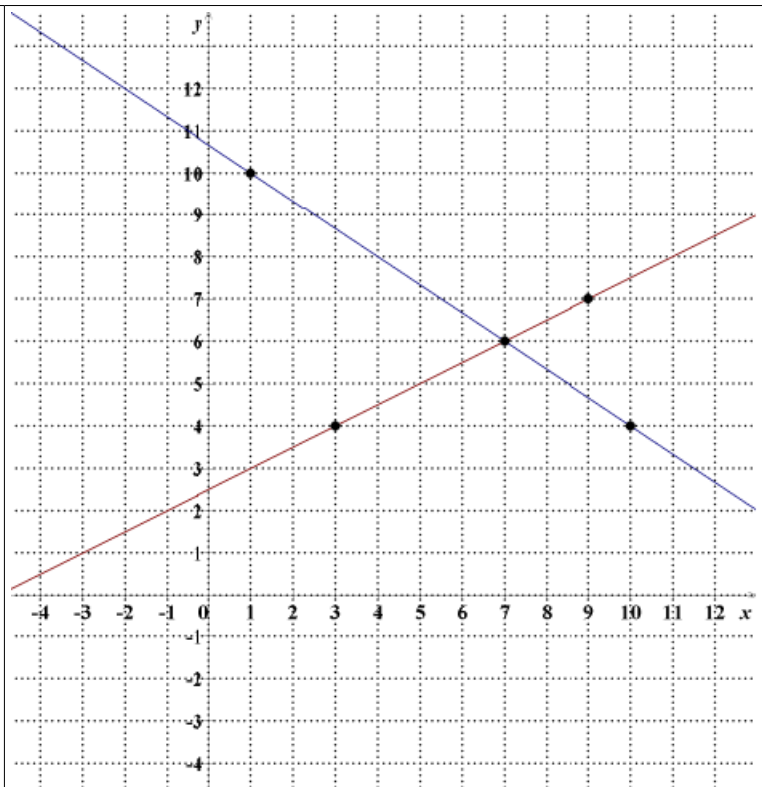
2<sup>e</sup> partie : 3 vers de 4 syllabes, suivis de 9 vers de 7 syllabes

3<sup>e</sup> partie : 7 vers de 6 syllabes

Un pari con me trace le chemin.  
Je vais tout droit  
vers l'infini  
comme un soldat  
qui obéit,  
alors qu'au fond  
j'aimerais tant  
tourner le front,  
changer de temps,  
me libérer  
d'un fil tendu.

Autre chemin,  
autre horizon.  
Je suis déçu,  
car à nouveau naît l'ennui.  
Il est toujours dangereux  
de fixer son avenir.  
Dans ma caboche de Turc,  
les mots s'alignent sans bruit  
et ma pensée tourne en rond.  
Comment narguer le destin ?  
Comment infléchir sa loi ?  
Soudain, je suis fatigué.

Je ne peux plus bouger.  
Le sommeil m'envahit.  
Je me vois attaché  
sur un lit d'hôpital.  
Suis-je fou ? Suis-je mort ?  
C'est affreux de croupir  
et de finir ainsi.



## Statistiques

Dans cette phrase qui se vérifie, le nombre moyen de lettres par mot vaut quatre virgule cinq et la variance vaut trois virgule cinq.

En effet :

$$\begin{aligned}
 &(4 + 5 + 6 + 3 + 2 \\
 &+ 7 + 2 + 6 + 5 + 2 \\
 &+ 7 + 3 + 3 + 4 + 6 \\
 &+ 7 + 4 + 2 + 2 + 8 \\
 &+ 4 + 5 + 7 + 4) / 24 = 108 / 24 = 4.5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(4^2 + 5^2 + 6^2 + 3^2 + 2^2 \\
 &+ 7^2 + 2^2 + 6^2 + 5^2 + 2^2 \\
 &+ 7^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 \\
 &+ 7^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 8^2 \\
 &+ 4^2 + 5^2 + 7^2 + 4^2) / 24 - 4.5^2 = 570 / 24 - 20.25 = 3.5
 \end{aligned}$$

**Diviseurs**

Les diviseurs du nombre de lettres de cette phrase sont : un, trois, neuf, vingt-sept et quatre-vingt-un.

Les diviseurs du nombre de lettres de cette phrase sont : un, deux, quatre, vingt-trois, quarante-six et nonante-deux.

Les diviseurs du nombre de lettres de cette phrase sont : un, deux, trois, six, dix-sept, trente-quatre, cinquante et un et cent deux.

## Cryptogramme I

*Découvrez le poème caché dans la prose suivante.*

Quand sauras-tu si ce que tu lis te délivre un message important ? Le jour où ton regard s'efforcera de séparer le bon grain de l'ivraie. Sans filtre, l'esprit n'est qu'un foutu bazar plein de cochonneries. Un homme qui veut comprendre ne doit pas se perdre dans la jungle des mots. À quoi bon cacher la vérité ? Il faudrait lire les livres avec une gomme à la main. Pour quelques paroles belles, que de vains bavardages ! Le respect des choses n'est pas un attribut du verbe. Une idée, dès qu'on la formule avec un tant soit peu d'art, est trahie, noyée. L'homme est-il confus ? Ce qu'il pense, le saisit-il bien ? Toi qui te dis poète, n'as-tu pas le sentiment de toujours en dire trop ? Connais-tu ce moi dont tu nous causes à bâtons rompus ? Moi, c'est qui ? Si le langage peut tout exprimer, il peut aussi tout grimer. Les événements qui t'arrivent sont si mal traduits par les mots qui t'arrivent. Rien ne peut empêcher cette imposture. Ne crains pas de lâcher des bêtises, puisque c'est une loi naturelle ! Pas besoin de te prendre la tête, les phrases te la feront perdre ! À quoi peut servir le style ? À donner bien du fil à retordre et bien du plaisir à tous les rats de bibliothèque. Qui cherche le silence finit par le trouver dans cette quatrième dimension où le plonge la lecture d'un bon texte.

Explication : En ne retenant que le quatrième mot de chaque phrase, on obtient un quatrain de François Maynard :

Si ton esprit veut cacher  
Les belles choses qu'il pense,  
Dis-moi qui peut t'empêcher  
De te servir du silence.

## Cryptogramme II

Je crois que le cafard, cet horrible animal noir de mes nuits blanches, propage la rumeur de ma folle mélancolie et que le bourdon fait mouche. Le son du corbeau au fond des bois de Brocéliande pourrait me rassurer et me réconcilier définitivement avec le correspondant anonyme qui déchiffre mes sanglots longs. Mais pourquoi diable suis-je si triste alors que les hirondelles trissent et que les préparatrices de rondelles de mortadelle trichent sans vergogne dans leur citadelle ? Je cite les morts et je ressuscite les remords pour entretenir le feu de la conversation qui convertit les nombreux mécréants de la cité des torts. En créant la lumière avant le temps, la tortue montra le chemin qui monte au paradis des lapins et des fournisseurs de sabliers en verre dépoli. Quand on est trop poli pour être honnête ou trop poilu pour être au net, le vieux maréchal et les gens de la maréchaussée se fâchent. Et la peur sur la ville se répand pour que les vilains se repentent de la torpeur qui torpille même les pendus dessinés sur les murs. Une oreille cassée en argile verte et des seins agiles en latex mûrissent dans le texte qui redore le blason de la proche famille de Vendredi. La famine, la peste et le congé dominical menacent la tranquillité domestique des fabricants de vestes, absorbés par le manque de liquidités quand le printemps revient. Un impôt sur le revenu des brigands tempère les insuffisances de la loi de la jungle, les aléas et les revenez à votre point de départ. Je suis le ténébreux et les allées du roi veuf qui rêve de cinabre en célébrant les sirènes des véhicules qui rivalisent avec six reines mortes. Le chat et le rat font bon ménage dans le château où se tient le procès du râteau métamorphosé en singe nu de la Chine populaire. Grâce au rachat de la charade, le bénéfice du doute sera chapeauté par les instances du moment et la dette extérieure sera intériorisée après la terreur. La date de demain et la dot du démon sont responsables de la désensibilisation des écrans tactiles, malgré la tactique des marchands de moufles en crin. Les mouflets ont du cran quand ils chassent le mouflon sur les pentes des glaciers spécialisés dans le sorbet et traquent le dahu malgré leur trac.

Explication : Il y a 26 lettres dans l'alphabet. Chaque phrase contient 26 mots. Comptez chaque fois la position du mot « et » pour déchiffrer un message secret.

# Pédagogogie

– M’sieur, ça va nous servir à quoi d’apprendre les maths ?

– Les mathématiques, comme la philosophie, la physique ou comme la pratique d’un art difficile, fortifient l’âme ; la préparent à épouser l’univers, à comprendre le pourquoi et le comment de maintes choses ; l’embellissent en cultivant le pouvoir d’imaginer, de s’étonner, d’interroger, de s’émerveiller. Les mathématiques peuvent même sauver la vie... Dans les camps de concentration nazis, c’est en faisant des mathématiques ou en écrivant des poèmes que certains prisonniers trouvèrent la force de supporter les souffrances qui leur furent infligées.

– Mais M’sieur, on s’en fout de notre âme, nous on veut juste avoir notre diplôme...

– Bon, alors dans ce cas, les mathématiques servent à vous empêcher d’obtenir trop facilement votre diplôme. Et faites-moi confiance : je vais vous donner du fil à retordre...

– Mais alors, vous êtes un sadique, M’sieur !

– Au contraire, j’agis par générosité. Plus vous serez entraînés à faire de gros efforts pour vaincre des difficultés, sur le plan des fonctions cognitives, des aptitudes physiques ou de la force de caractère, mieux vous serez armés pour affronter une existence qui risque d’être exposée à des problèmes énormes. Vous dorloter, ce serait vous affaiblir ; ce serait de la fausse gentillesse. La vraie gentillesse, c’est d’exiger de vous un immense travail, pour vous rendre plus forts.

– Mais M’sieur, on est à Genève. Dans ce canton, les incapables et les feignants bénéficient d’une aide sociale formidable. Ils ont de quoi bien vivre sans effort... J’ai un pote assisté... il mène une existence cool... l’hospice général lui file suffisamment de blé pour qu’il puisse acheter de l’herbe...

– Les choses finiront par changer... quand la vraie droite gouvernera... Et les mathématiques ont d’autres vertus. Elles apportent la joie par le travail. Une joie profonde. Quel bonheur de relever un défi, de surmonter de nombreux obstacles, de livrer une bataille qui peut toujours être prolongée ! Quelle aventure extraordinaire de passer des heures à étudier un sujet complexe, à découvrir des théories fantastiques, à imaginer d’autres pistes, à résoudre des problèmes ardues ! Le cerveau de celui qui se concentre sur une tâche mathématique de longue haleine émet des ondes delta. Ces ondes sont bénéfiques pour la santé. Les mêmes sont présentes dans la méditation et le sommeil.

– Mais M’sieur, en cours de maths, pour avoir des ondes delta, nous on préfère dormir !

– Je n’ai plus d’arguments... Dormez !

\*

Des penseurs comme Aristote et Platon, dont les écrits forment le socle de la civilisation européenne, soutiennent de manière argumentée que la vie de l'esprit est la plus propice à conduire au bonheur parfait.

C'est pourquoi, nous autres professeurs, qui stimulons chez les élèves la vie de l'esprit, sommes – notre modestie dût-elle en souffrir – des êtres de haute vertu. Nous oeuvrons au bonheur de ceux qui reçoivent nos lumières.

Le privilège d'enseigner les mathématiques, qui enrichissent tant la vie de l'esprit, nous rapproche des dieux. Les mathématiques tiennent la promesse d'offrir une nourriture inépuisable, accessible à toutes les bourses dans une Suisse provisoirement riche. Faire des mathématiques, c'est possible avec pour seul matériel des crayons, du papier, une calculatrice (ou un smartphone) et quelques dizaines de livres dont l'excellence a été reconnue par des générations d'étudiants ; c'est accomplir un voyage qui se peut prolonger à l'infini ; c'est vivre de toute son âme un bonheur qui augmente avec la connaissance et la virtuosité.

Bonne nouvelle: aux USA, au Canada, en France (bien que ces pays soient victimes d'un profond déclin), des sondages nous apprennent que, parmi toutes les matières scolaires, les mathématiques arrivent souvent en tête (avec un score de 20 à 25%) dans les préférences des jeunes gens. Soyons donc fiers, nous autres professeurs de mathématiques, de contribuer au bonheur d'au moins un élève sur cinq, ce qui est déjà très honorable !

Je laisserai les esprits chagrins dénicher des statistiques prouvant que les mathématiques sont aussi la branche la plus haïe (il se trouve hélas qu'une proportion élevée de l'humanité n'est pas douée pour le bonheur...), car je veux conclure sur une note optimiste : plus nous allons loin dans l'enseignement des mathématiques, plus nous entraînons nos élèves à emprunter des voies difficiles qui mènent à de merveilleux sommets, et mieux nous accomplissons notre mission de guider au moins un élève sur cinq vers un but philosophique par excellence, la conquête du véritable bonheur, celui des plus sages entre les sages : la vie de l'esprit.

\*

Les mathématiques sont la science et l'art de la démonstration rigoureuse. Ce sont les Éléments d'Euclide qui inaugurent l'histoire des mathématiques. Avant les Grecs, on faisait essentiellement des calculs et des mesures. Euclide met à l'honneur la preuve. Enseigner les maths sans faire de démonstrations, c'est une imposture. Quand cette imposture est fréquente, cela veut dire que nous sommes en présence d'un système éducatif soucieux d'éviter que les idiots obtiennent de trop mauvaises notes. Renoncer à l'exigence de preuve, c'est trahir l'esprit des mathématiques, c'est orienter la pédagogie vers un apéritif pour les nuls, vers un concert qui se rapproche plus du bruit que de la musique, vers un bricolage mal fichu très éloigné de la beauté qui se dégage de l'architecture géniale des véritables mathématiques.

\*

Je suis émerveillé par toutes les découvertes scientifiques que l'humanité a fait depuis un siècle. Et je me dis que devant la richesse des connaissances scientifiques actuelles, il faut pousser bien plus les adolescents à creuser les maths et la physique. Le niveau doit s'élever. Comment des gens peuvent-ils encore se prosterner devant le Coran, la Bible ou la Déclaration des droits de l'homme, alors que le livre de l'univers est tellement plus extraordinaire ? L'école ferait mieux de miser sur la poésie, le calcul tensoriel, la relativité générale, les transformées de Fourier, la mécanique quantique, les neurosciences, la musique, la peinture que de noyer le poisson avec des polluants comme la « culture numérique », la « laïcité », la « lutte contre le harcèlement », la « défense des minorités » et autres additifs à la mode.

\*

Que faut-il enseigner ? La patience. Selon une étude récente publiée dans « Economic Journal », un des facteurs les plus importants qui expliqueraient les différences, parfois très fortes, de performances scolaires d'un pays à l'autre serait la patience, au sens de capacité à renoncer à des gratifications immédiates. Moins la culture d'un pays serait tournée vers l'immédiateté, le temps bref, plus la performance de ses élèves serait élevée. La patience développerait les facultés cognitives, le sens de la réflexion en profondeur. Cela me paraît très plausible. « Le génie est une longue patience », disait Boileau. Boris Vian commentait : « Ça, c'est une réflexion de génie pas doué ! » Mais Vian plaisantait. Même en étant doué, il faut une longue patience pour réaliser des choses de valeur, comme apprendre à jouer de la musique, à peindre, à écrire de la littérature ou de la philosophie, à faire des mathématiques, du sport, etc. Et j'ai l'impression que la technologie numérique, le consumérisme, la « cool attitude », la « morale festive » tendent à faire chuter la patience dans nombre de sociétés. Mais la patience va revenir avec les crises qui nous pendent au nez... Et la violence ! Patience et violence sont les deux mamelles de l'avenir...

\*

J'ai terminé la lecture du livre « Apprendre ! » de Stanislas Dehaene. Selon lui, qui n'échappe pas au démon des catégories, l'apprentissage repose sur 4 piliers : attention, engagement actif, retour sur erreur et consolidation.

Ce livre est assez intéressant, mais je lui fais trois reproches :

- 1) Les dimensions de l'imagination et de la sensibilité me semblent importantes dans l'apprentissage, or Dehaene n'en parle presque pas. Il se focalise sur l'aspect cognitif et sur la mémorisation.
- 2) Dehaene me semble parfois exagérément optimiste sur les possibilités de chacun.
- 3) Il semble ignorer que, dans les écoles, les problèmes auxquels sont confrontés les enseignants ne sont pas tellement d'appliquer de bonnes méthodes pour que les élèves apprennent, mais de trouver des moyens de les faire travailler...

\*

Ça veut dire quoi « comprendre » ? Est-ce que « comprendre », ça s'apprend ? Si oui, comment ? Et s'ajoute-t-il quelque chose à l'apprentissage pour qu'on puisse parler de compréhension ? Si oui, quoi ? Comprendre les nombres entiers, est-ce apprendre à jouer avec eux ? Et pouvons-nous dire que la compréhension des nombres entiers augmente avec la multiplicité des jeux que nous devenons capables de bien jouer avec eux ? Mais alors, le « plus » qui porterait la compréhension à dépasser le simple apprentissage ne serait-il pas la constatation que nous parvenons à bien jouer ? Il me semble que cette condition n'est pas suffisante. Mais que faut-il ajouter pour mieux cerner la compréhension ? Mettre en lien de multiples notions ? Je veux bien, mais il faut alors préciser la nature de ces liens et comment nous les posons. Liens logiques, liens statistiques, liens analogiques, etc. Et ces liens, ne résultent-ils pas aussi d'un apprentissage ? Comprendre, est-ce tourner suffisamment longtemps autour d'un problème pour comprendre en fin de compte que nous n'en avons qu'une compréhension incomplète, insatisfaisante ?

\*

John von Neumann est assurément l'un des esprits les plus extraordinaires de tous les temps. On présente souvent comme une boutade sa fameuse citation : « En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. » On dit parfois que ce serait la réplique d'un professeur agacé par des élèves qui semblent n'avoir qu'un seul refrain à la bouche : « Monsieur, je ne comprends rien. » Il y a probablement de ça, mais cette citation me paraît plus profonde. Elle interroge sur le fonctionnement de l'esprit. Et si, au fond, « comprendre », ce ne serait pas en grande partie « apprendre » et « se familiariser avec » ? La théorie des réseaux neuronaux semble accréditer l'idée que c'est l'exposition répétée d'une « expérience » qui va construire une « structure de pensée ». Bien sûr, à l'heure actuelle, nous ne pouvons pas expliquer de manière satisfaisante ces phénomènes passionnants que sont la compréhension et le sentiment agréable qui l'accompagne. Certes la voie biaisée de l'introspection peut nous apporter quelques lumières. En tant que mathématiciens, nous avons tous vécu des décalages entre le comment et le pourquoi, entre le pourquoi simple et le pourquoi plus profond. Il nous est arrivé à chacun de comprendre d'abord le comment, plus tard le pourquoi simple, et encore plus tard le pourquoi profond. L'intelligence artificielle de mon smartphone dit ceci :

« La citation de John von Neumann (...) signifie que la compréhension des concepts mathématiques ne vient pas toujours de manière immédiate, mais plutôt par une familiarisation progressive. Pour lui, il ne s'agit pas d'une compréhension instantanée, mais d'une patience et d'une pratique qui amènent à une familiarité jusqu'à ce que les idées complexes deviennent naturelles. »

Cela me semble très pertinent. Et quand nos élèves nous assomment avec leur : « Monsieur, je ne comprends rien », nous pouvons leur répliquer : « Ne vous laissez pas aveugler par l'idée fausse et facile que vous ne pouvez pas travailler parce que vous ne comprenez rien; mais répétez-vous l'idée juste et difficile que c'est en travaillant régulièrement, en assimilant au fur et à mesure des notions qui s'appuient les unes sur les autres, en pratiquant des exercices progressifs que vous vous dirigerez peu à peu vers une compréhension claire. Tirer prétexte d'une difficulté de compréhension pour cesser de travailler, c'est l'attitude d'un paresseux ou d'un idiot, le "ou" n'étant pas exclusif. »

\*

Je souhaite exprimer ma gratitude à la collection « Marabout Flash ». Je lisais ces petits livres quand j'avais 13 ou 14 ans. Simples, pratiques, ces ouvrages éducatifs ne s'encombraient pas de philosophie compliquée. Ils proposaient des exercices. Grâce à eux, à l'écart des controverses complexes sur le déterminisme et le libre-arbitre, j'ai acquis la conviction plutôt saine que la volonté, la mémoire et d'autres qualités sont perfectionnables par l'entraînement. C'est en partie grâce à ces « stimulants » que je suis devenu un VSOP (very superior old person)... oui, il me reste quelques efforts à faire pour m'améliorer sur le plan de la modestie... Je crois que c'est envoyer un bon message à la jeunesse que d'affirmer : « la mémoire et la volonté ont des pouvoirs merveilleux si on les entraîne ».

\*

Après un cours sur le cercle trigonométrique, voici le message que j'aimerais communiquer à mes élèves : « Plus un sujet vous paraît difficile ou déplaisant, plus vous devez être attentifs et vous engager pour le comprendre et l'assimiler. Or vous agissez dans le sens inverse... Psychologiquement, je peux le comprendre. Mais les conséquences seront désagréables pour vous. »

\*

La science met parfois longtemps à confirmer des évidences... J'ai lu dans le dernier numéro de Cerveau & Psycho une étude de 2024 qui confirme un phénomène que tous les bons étudiants connaissent (ou devraient connaître) : on mémorise mieux ce qu'on écrit, et c'est l'écriture manuscrite (et non point sur clavier) qui produit les meilleures performances. Je me souviens que j'écrivais beaucoup pour préparer mes examens universitaires. Pédagogiquement, nous avons tort de trop distribuer de photocopies à nos élèves ou de les laisser prendre en photo ce que nous écrivons au tableau ou sur écran. Il faut faire écrire les élèves. Quand j'étais plus jeune, mes élèves se plaignaient d'avoir des crampes au poignet tellement je les faisais écrire. Un professeur généreux torture les poignets et les doigts de ses élèves dans le but de renforcer leur mémoire... Quand les profs cessent d'être des bourreaux, l'école décline...

\*

Le professeur à ses élèves : « Aujourd'hui je me sens tellement intelligent que je ne vais pas pouvoir vous donner un cours. Vous ne comprendriez rien. Non, n'insistez pas ! Je me sens tout à fait incapable de descendre à votre niveau. Comment pourrais-je expliquer à des êtres dont la vie intellectuelle est et restera d'une immense pauvreté les trésors que produit ma pensée, de réflexion en réflexion ? La moindre de mes thèses résulte d'un si long voyage que vous seriez morts de fatigue avant d'en avoir accompli la millième partie. Aussi dois-je me résoudre à vous demander de mener sans moi une activité minable qui soit à votre portée. Même si je juge la chose répugnante au plus haut degré, je n'ai pas le choix. Veuillez donc, chers élèves, vous préparer à sortir vos lieux communs favoris pour engager un débat sur un sujet à la mode ! Ne craignez rien ! Dans un total respect de l'idéal démocratique, vous aurez le droit de répéter tous les clichés que vous entendez à gauche et à droite. Nul besoin de vous distinguer par une fraîcheur déplacée, il s'agit d'un exercice de citoyenneté. Dans les périodes hautes, l'excellence est le minimum qu'un professeur doit exiger de ses élèves. Aujourd'hui, l'école publique, soucieuse de s'inscrire dans une éthique égalitaire, ne veut plus engager de professeurs. Ce sont désormais des animateurs qu'il lui faut. »

\*

Les catalogues de troubles mentaux, comme le DSM 5, ne sont pas complets. Il est évident que les mathématiques forment l'une des plus belles productions de l'esprit humain. Il est évident qu'un esprit sain ne peut qu'aimer tout ce qui est beau. Donc un élève qui n'aime pas les mathématiques n'est pas sain d'esprit. Le manque d'amour pour les mathématiques est un trouble mental que je propose de nommer lipophilomathématique. Une école où la plupart des élèves n'aiment pas les mathématiques est une école de fous. Sa priorité devrait être d'engager des psychiatres et d'envisager tous les moyens thérapeutiques : dressage, substances chimiques, électrochocs, chirurgie du cerveau. Cette nouvelle approche d'un problème récurrent pourrait rendre l'école plus à même d'accomplir sa principale mission : célébrer la beauté, en faire découvrir les nombreux visages, conduire l'esprit à forger des merveilles.

\*

L'Éducation Nationale, toujours soucieuse de la santé des élèves, a décidé de mener une campagne de lutte contre l'addiction à la pensée. Ce trouble grave résulte d'un dérèglement du système cérébral de récompense, qui se met à produire trop de dopamine chez les individus qui abusent de l'exercice de la pensée. Certains professeurs, qui ont la funeste habitude de mettre d'excellentes notes à des travaux exprimant une pensée complexe, ont une lourde responsabilité dans le développement de cette addiction. Il est temps de rappeler au personnel enseignant qu'une pensée saine ne doit pas dépasser le niveau de réflexion nécessaire au bien commun. L'addiction à la pensée est source de souffrances, car elle isole ceux qui en sont victimes, les rend incompréhensibles. Les drogués de la pensée se retrouvent prisonniers d'une bulle, hors de l'humanité. Ils peuvent parfois négliger de s'alimenter, parce qu'un travail intellectuel les absorbe, les possède. À force de se laisser dévorer par des processus mentaux, ils connaissent des troubles du sommeil. La pratique intensive de la lecture détériore leur vue. Bref les dégâts sont considérables. Pour ne pas produire de telles épaves, l'Éducation Nationale entend promouvoir l'usage d'une pensée saine. Une pensée saine est axée sur la sociabilité. Or en quoi consiste la sociabilité ? À partager, dans un esprit de fraternité, des idées simplistes et des plaisanteries moralement tolérables. Donc l'apprentissage de la pensée saine visera l'acquisition d'un bagage collectif propre à favoriser ce climat. Il se peut toutefois que certains malheureux, pour des raisons extra-scolaires, développent une addiction à la pensée. L'école devra leur fournir des outils pédagogiques et thérapeutiques pour les aider à surmonter ce trouble. Bien sûr, il importe d'agir dans le respect de la dignité. Il faut absolument éviter de stigmatiser les thinkaddicts. C'est avec bienveillance que l'école doit œuvrer pour combattre ce fléau. Les sciences de l'éducation sont en train de mettre au point une sorte de yoga pour diminuer la production de pensées. Le principe est simple : il s'agit de bloquer l'intelligence et l'imagination par des mantras longuement répétés.

\*

L'OMS vient de publier un rapport alarmant sur le délabrement psychique de la jeunesse en Kerjavie. Les adolescents kerjaves n'écoutent pas du rap ; ne font pas des tags sur les murs ; ne fument pas du cannabis ; donnent le meilleur d'eux-mêmes à l'école ; ne bavardent pas pendant les cours ; se comportent avec courtoisie ; poursuivent un idéal chevaleresque. Selon le professeur Smith, expert reconnu dans le monde scientifique, cette accumulation de troubles mentaux ne peut venir que d'un climat social extrêmement malsain.

Une commission de l'ONU a mené une enquête en Kerjavie. Des milliers d'élèves ont été interrogés. Il ressort de leurs réponses que les jeunes Kerjaves préfèrent la musique classique au rap ; pensent que seules des personnes déséquilibrées peuvent pulvériser en cachette de la peinture sur les murs pour produire des gribouillis très laids ; n'ont pas envie de se bousiller les neurones avec des drogues ; vénèrent le savoir ; ont le respect des adultes qui se chargent de les instruire ; aiment le roi qui gouverne avec sagesse leur pays et veulent lui faire plaisir en s'efforçant d'atteindre l'excellence.

Ces déclarations sont tellement aberrantes qu'il est impossible de leur accorder foi.

La commission d'enquête s'est lancée sur la piste d'une confusion mentale collective qui résulterait d'une propagande massive organisée par un régime dictatorial ultra répressif.

Hélas, cette piste s'est avérée fausse. La monarchie kerjave n'a rien d'une dictature, la liberté d'expression y est beaucoup plus élevée qu'en France ou au Canada, la propagande y est cent fois moindre qu'à Genève et le roi est vraiment très aimé.

Il n'en reste pas moins que la Kerjavie n'est pas un régime fondé sur le suffrage universel. C'est probablement ce manque inexcusable qui se trouve à l'origine de tous les maux dont la jeunesse kerjave est victime.

La mission des organisations internationales est d'agir pour apporter aux jeunes de tous les pays du monde les bienfaits du modèle démocratique, dans l'une des variantes qu'approuvent les intellectuels civilisés.

\*

En discutant avec des collègues, je suis frappé de constater que beaucoup, par empathie avec des élèves faibles, sont favorables à l'idée de privilégier ce qui est facile, d'éviter ce qui est difficile. C'est dans l'air du temps. Il y a une sorte de consentement général à la médiocrité, de complicité implicite entre directions, profs, parents, élèves dans le « soyons tous médiocres ! ».

On est loin de Molière, pour qui : « Plus grand est l'obstacle, plus grande est la gloire de le surmonter. »

Jadis, les rebelles étaient ceux qui dénonçaient l'école comme une machine inégalitaire. Aujourd'hui, les rebelles sont ceux qui veulent pousser les élèves à faire des choses très difficiles...

À nuancer, bien sûr...

\*

Telle théorie est trop subtile pour la majorité des élèves ? Soit, mais... nous vivons à une époque très soucieuse de lutter en faveur des minorités. Alors œuvrons dans ce sens ! Encourageons les enseignants à consacrer la plus grande partie de leur énergie à pousser vers le haut une minorité scandaleusement discriminée : celle des élèves intelligents...

\*

Chers enseignants primitifs, les temps ont changé. Rangez dans les placards la pédagogie de jadis et mettez-vous au diapason de la modernité : science et technologie au service de nobles buts. Sachez que les élèves se divisent en 4 catégories : les allumés du cortex préfrontal (ils sont attentifs et pensent), les allumés de l'hippocampe (ils mémorisent, parfois sans bien comprendre), les allumés de l'hypothalamus (ils perturbent les cours) et les éteints (ils dorment). Dans les écoles du futur, les enseignants verront directement sur un écran d'ordinateur l'activité cérébrale de chacun de leurs élèves. En Chine et en Corée, ils pourront même stimuler (par des électrodes) des zones choisies. Il sera dès lors plus facile de former les principales catégories de citoyens dont la société aura besoin : les concepteurs de machines, les dépositaires de la bonne parole, les forces armées et les esclaves des machines.

\*

Les adolescents ne sont pas faits pour rester assis toute la journée. Il faudrait organiser des leçons dehors, où tout le monde serait debout. On peut lire debout, on peut écrire debout. Il suffit d'être bien équipé. Il faut en revenir à l'école péripatéticienne. Et pour punir les élèves trop indisciplinés, on pourrait leur faire monter une grosse pierre en haut d'une colline. Voilà une punition plus saine que de nettoyer des pupitres. Faire l'école dehors par tous les temps est une mesure excellente pour la santé, une initiative qui remet l'humain en contact avec la nature (besoin essentiel, dont une carence débouche sur des névroses), une opération qui permet des économies formidables en supprimant les bâtiments scolaires. Il n'est pas nécessaire de disposer d'un matériel important pour enseigner. Quelques roulottes suffiraient à stocker ce qu'il faut pour réaliser de petites expériences scientifiques. En cas de pluie, des structures tubulaires avec bâches permettraient de se mettre à l'abri. Bref, si nous n'étions pas gouvernés par des idiots conformistes, l'école ne serait plus un camp de concentration pour immobiliser des déconcentrés, ni une usine à formater des « assis », puis des « assistés »...

\*

Quand je corrige certains travaux, j'entre dans un espace non-euclidien où sont violées les lois de l'orthographe, de la grammaire et de la réflexion. Par les points de vue donnés, je ne vois passer aucune ligne de pensée, mais des bulles qui éclatent sous mon regard perçant, des cordes qui vibrent dans le vide argumentaire. Beaucoup d'élèves ne savent pas écrire... et on leur donne quand même un diplôme... La masse de l'ignorance courbe l'espace-temps et fait dévier la lumière de l'Instruction Publique.

\*

Il y a un propos d'Einstein qui est souvent cité : « Tout le monde est un génie. Mais si vous jugez un poisson sur ses capacités à grimper à un arbre, il passera sa vie à croire qu'il est stupide. » Mes commentaires :

1. Même un génie comme Einstein peut dire parfois des stupidités.
2. Seuls les poissons qui grimpent aux arbres ont du génie.
3. Si tout le monde est un génie, il y a énormément de gens qui font tout leur possible pour ne pas le montrer.
4. Penser que tout le monde est un génie est une idée rassurante pour les imbéciles.
5. Il n'est pas suffisant de dire que tout le monde est un génie ; il faut ajouter que tout le monde est un héros, tout le monde est un artiste, tout le monde est remarquable !

\*

La bêtise est une paresse de l'imagination. C'est un manque de résistance à la clôture rapide. Bête est celui qui s'arrête à la première idée, qui n'explore pas de multiples chemins. Bête est celui qui laisse couler sa pensée le long de la ligne de plus grande pente.

La bêtise relève de la passivité. Bête est celui qui se laisse faire, qui se laisse attacher à des croyances grossières, qui se laisse entraîner par des foules. Toute morale de troupeau s'adresse à des bêtes, transforme de la graine d'intelligence en bétail.

\*

La tricherie aux épreuves révèle que beaucoup d'adolescents n'ont vis-à-vis d'eux-mêmes qu'un sens de la fierté très restreint. Ça n'a pas l'air de trop tourmenter leur conscience de tricher, ils pensent que ce n'est pas grave. Et c'est ainsi qu'ils vont entrer dans le monde adulte : avec l'idée qu'il faut tricher pour avancer, que la valeur d'un homme n'est pas dans l'effort pour apprendre, mais dans l'habileté à tricher. Comment transmettre aux jeunes gens une certaine droiture ? En principe, c'est le rôle des parents, mais la tâche semble rude dans ce monde de plus en plus nihiliste.

\*

Plusieurs études montrent que le niveau scolaire basique a baissé en France (et plus généralement en Europe) depuis les années 80 (davantage de fautes sont commises d'année en année à de mêmes épreuves). Constater ce phénomène est facile. Mais l'expliquer ? L'intuition fournit de nombreux facteurs explicatifs hypothétiques. Mais avons-nous les moyens de dépasser l'intuition, de formuler un modèle multifactoriel testable, où les poids respectifs des différents facteurs pourraient être estimés. J'ai bien peur que non. En l'absence d'un tel modèle, commenter un phénomène sociologique relève du discours intuitif. Les controverses qui s'ensuivent sont du type intuition contre intuition. Si le but est d'entretenir le jeu de la parole, il est atteint. Si le but est de se rapprocher de la vérité, il n'est pas atteint. Il en va ainsi dans nombre de débats sur des questions sociologiques. Dans le cas qui nous intéresse, une corrélation me semble intéressante. Plus les sciences de l'éducation se développent, plus le niveau baisse...

\*

Quand j'entends le mot « culture », je sors mon revolver. Quand j'entends le terme « culture générale », je sors mon bazooka, mon lance-flammes et mes grenades. Quand j'entends la dénomination « école de culture générale », je sors mes armes de destruction massive. Mais quand j'entends le mot « cul », je sors mon rêve. Blague à part, le choix de nommer un établissement scolaire « école de culture générale » témoigne d'une grande maladresse. La culture générale, c'est le contraire du savoir. La culture générale, c'est ce que tout le monde sait plus ou moins, c'est ce petit bagage qui permet de transformer des cervelles vides en des cervelles bourrées d'erreurs et de vulgarités, c'est un euphémisme pour « médiocrité générale ».

\*

D'après une étude sociologique : les universitaires sont majoritairement de gauche, athées, anti-libéraux. Aux USA comme en France. Ce phénomène a tendance à s'auto-entretenir pour plusieurs raisons, notamment le fait que les personnes ayant une influence sur les étudiants sont justement des professeurs, donc des universitaires, donc en majorité des gauchistes.

\*

J'ai relevé dans le travail d'une élève une phrase naïve mais charmante : « Un intellectuel est un homme qui se pose des questions ». Quitte à verser dans la caricature, je dirais plutôt : un intellectuel est un homme qui donne des réponses quand il ferait mieux de se taire. Ou encore : un intellectuel est un homme trop désireux de s'engager pour s'engager à bien réfléchir.

\*

Sur un grand écran situé devant la cafétéria d'une école : « Ici l'égalité est obligatoire ». Ce slogan est censé promouvoir l'égalité. Or il est très maladroit d'essayer de promouvoir un principe ou une valeur en le déclarant « obligatoire ». Cela tend à provoquer une réaction de rejet. Et il y a un point de droit que je n'ai jamais compris. L'article 11 de la loi sur l'instruction publique stipule que toute forme de propagande politique ou religieuse est interdite auprès des élèves. Or chaque année, la semaine de l'égalité a pour but d'orienter les élèves vers des visions égalitaires. L'égalité est présentée comme un droit fondamental, comme un progrès, comme un combat qu'il faut mener pour aller encore plus loin. Que pouvons-nous en déduire ? Trois possibilités :

1. L'article 11 de la loi sur l'instruction publique est violé.
2. L'égalité n'est pas un sujet politique ou religieux.
3. Promouvoir un principe inscrit dans la loi n'est pas un acte de propagande.

Bien sûr, seule la 3<sup>e</sup> possibilité peut être invoquée par nos autorités. Et pourtant, cette 3<sup>e</sup> possibilité est très discutable. Dans n'importe quel pays, les lois changent. Dans une démocratie directe, il est même possible à un groupe suffisamment important de proposer des modifications de la loi. Dès lors, le fait que l'égalité soit inscrite dans la loi n'en fait pas un principe intangible. Promouvoir chez les enfants et les adolescents une loi actuelle, c'est implicitement faire de la propagande contre la possibilité de la changer. De mon point de vue, l'article 11 est violé – et pas seulement sur la question de l'égalité. Bref, cet article 11 est hypocrite. Ce qu'il signifie, en réalité, c'est qu'il est interdit de faire auprès des élèves de la propagande politique pour des valeurs autres que celles défendues par nos autorités. À Genève comme partout, la propagande est sacrée quand elle rayonne de l'État...

\*

En matière de propagande, l'école s'inspire de Joseph Goebbels. Il écrivait : « Nous ne voulons pas convaincre les gens de nos idées, nous voulons réduire le vocabulaire de telle façon qu'ils ne puissent plus exprimer que nos idées. »

L'école a réussi à liquider l'idée de « cancre ». Les cancre n'existent plus, remplacés par des victimes. Victimes de discriminations, de harcèlement et surtout de troubles. La psychologie moderne fournit à l'école un vaste assortiment d'étiquettes : troubles cognitifs, anxieux, dépressifs ; troubles de l'attention, du sommeil, de l'identité sexuelle, de l'alimentation ; hyperactivité, dépendances multiples, phobie scolaire. Désormais, le métier d'enseignant s'apparente à celui de soignant dans un hôpital psychiatrique.

Joseph Goebbels écrivit aussi : « À force de répétitions et à l'aide d'une bonne connaissance du psychisme des personnes concernées, il devrait être tout à fait possible de prouver qu'un carré est en fait un cercle. Car après tout, que sont « cercle » et « carré » ? De simples mots. Et les mots peuvent être façonnés jusqu'à rendre méconnaissables les idées qu'ils véhiculent. »

Cette brillante intuition, l'école l'a réalisée. Le mot « racisme » ne désigne plus le racisme, mais l'hostilité au projet d'une société multiculturelle. Le mot « sexisme » ne désigne plus le sexisme, mais le refus de regarder les êtres à travers les filtres de la modernité. Encore plus fort ! Dorénavant, tout garçon peut se déclarer fille et toute fille se déclarer garçon. C'est inscrit dans la loi.

[Merci à Roland Jaccard pour les citations de Goebbels !]

\*

« Chez la plupart des individus, le cerveau joue le rôle non pas d'une Académie des sciences, mais d'un simple ministère de la Propagande. » (Pierre Gripari, Frère Gaucher ou le voyage en Chine)

Être inactuel, c'est se distancer de la propagande.

\*

« Livre du soldat ». Un livre que j'aime bien. Publié en 1958 par le Département militaire fédéral. En ce temps-là, on savait tenir un langage qui avait de l'allure... Un livre qui me donne la nostalgie d'une Suisse disparue. Une Suisse où les Appenzellois se rendaient à la landsgemeinde en portant l'épée ou la baïonnette au côté ; une Suisse où les autorités déclaraient que l'homme et la femme ne sont pas égaux, mais complémentaires ; une Suisse où l'on encourageait l'effort physique, la marche, la gymnastique, l'alpinisme, le tir, dès le plus jeune âge ; une Suisse où l'on se moquait des gens sans volonté ; etc.

Et la Suisse d'aujourd'hui ? Un tiers des jeunes disent souffrir de troubles psychiques... et il paraît que ce phénomène s'amplifie... Idem dans les pays voisins.

Il semblerait que ce ne soit pas avec l'éducation positive qu'on forme de bons guerriers...

\*

On lit un peu partout que la jeunesse occidentale va très mal. On le disait déjà au temps d'Aristote, mais il semblerait que les dernières décennies soient caractérisées par une explosion des troubles psychiques. Est-ce étonnant de constater une détérioration de la santé mentale chez des jeunes gens qui ne marchent presque plus, qui passent leur temps à vivre assis, qui se goinfrent de sucreries, qui consomment des drogues, qui sont esclaves de leur smartphone, qui considèrent le tag et le rap comme des phares de l'esthétique, qui préfèrent vibrer aux exploits de Kylian Mbappé plutôt qu'à ceux du chevalier Bayard, qui ne savent pas très bien s'ils sont des filles ou des garçons, qui ne savent ni lire ni écrire, qui ne sont pas guidés par un idéal de grandeur, qui ne sont pas animés par une volonté de puissance, qui ne sont pas combatifs, qui se plaignent à la moindre contrariété, qui se posent en victimes, qui accusent la société d'être responsable de leurs maux, qui comptent sur l'État pour prêter assistance à tous les parasites, qui ne sont pas patriotes, qui ont banni le mot fierté de leur vocabulaire ?

Il y a dans l'actuel climat idéologique, dans la petite morale des temps modernes, dans les lois récentes, dans la mollesse de l'éducation bienveillante tout ce qu'il faut pour produire des mauviettes obèses. Relisons le texte prophétique de Louis Pauwels : « Le monôme des zombies », paru en 1986 dans le Figaro magazine. Cet éditorial avait déclenché un scandale, à cause d'une comparaison courageuse. « C'est une jeunesse atteinte d'un sida mental. Elle a perdu ses immunités naturelles ; tous les virus décomposants l'atteignent », écrivait Pauwels. « Rien ne leur paraît meilleur que n'être rien, mais tous ensemble, pour aller nulle part. Leur rêve est un monde indifférencié où végéter tièdement. »

J'étais jeune en 1986. Déjà très réactionnaire, je donnais raison à Pauwels. Heureusement, à l'époque, il y avait des forces qui s'opposaient à ce sida mental. Sur le plan politique, Reagan et Thatcher. Au cinéma, c'était le temps béni des films fascistes avec Stallone, Schwarzenegger, Willis, etc. Dans les années 80, Clint Eastwood incarnait encore l'inspecteur Harry ; Charles Bronson se faisait encore justicier dans la ville. Bref, on pouvait se dire que tout n'était pas perdu.

Aujourd'hui non plus, tout n'est pas perdu. La biologie humaine finit toujours par reprendre le dessus. Même la pire éducation, les pollutions idéologiques les plus nuisibles, les lois les plus démentes ne peuvent anéantir la force vitale qui subsiste chez les meilleurs des êtres humains. Laurent Obertone écrit un « Éloge de la force » ; Papacito, dans un style truculent, revisite l'histoire médiévale pour glorifier la virilité. La jeunesse ne va pas éternellement s'enfoncer dans la dépression, l'anxiété, la dysphorie de genre, les addictions, les troubles de l'attention, les troubles du sommeil et autres symptômes du sida mental. La société ne va pas éternellement s'occuper des pauvres chéris à grand renfort de jeux, de psychologues et de médicaments. Je prédis un retour aux traditions qui ont fait de nos ancêtres un peuple de vigoureux paysans, montagnards et guerriers.

Si j'étais chef de l'Instruction publique, quel serait mon programme pour transformer l'école ? Tout d'abord, chaque journée commencerait par une diffusion de l'hymne national, avec tous les élèves au garde-à-vous. Bien évidemment, l'uniforme serait de rigueur : veston, chemise, cravate pour les garçons ; tailleur et jupe pour les filles. Au diable les non binaires ! Les enseignants auraient le devoir de s'habiller de manière classique. Ils seraient tenus de vouvoyer les élèves, de les appeler « Madame » ou « Monsieur ». Si un élève avait le malheur de sortir son portable pendant un cours, le professeur aurait non seulement le droit, mais l'obligation de broyer cet appareil avec des tenailles. Tout manquement grave à la discipline entraînerait un renvoi définitif de l'élève ; les parents auraient alors la charge de mettre leur enfant dans une école privée.

Une mission fondamentale de l'école serait de valoriser les qualités qui tirent vers le haut : la curiosité d'esprit, l'amour de la nature, l'appétit du beau, la générosité solaire, l'attrance pour ce qui est difficile, la volonté de tendre vers une grande santé, la passion de créer, la très longue patience, l'énergie à toute épreuve, la vitalité victorieuse, le sens de l'humour, l'insolente liberté, le goût du combat, etc. Tout serait entrepris pour stimuler la jeunesse à faire preuve d'une conception exigeante de l'honneur et de l'excellence. Au lieu de souiller les cervelles avec des écrits pondus par des triples fiottes ou des sectaires de l'égalité universelle, on demanderait aux élèves de dissenter sur des textes relevant d'une morale aristocratique. Par exemple : « If » de Kipling ; « Never explain, never complain ! » (Disraeli) ; « Je n'ai jamais vu une bête sauvage s'apitoyer sur son sort. » (D.H. Lawrence) ; « Il faut vivre en combattant et jamais en victime. » (O. Bardolle) ; « L'homme de qualité exige tout de soi. C'est un souverain. L'homme sans qualité exige tout des autres. C'est un despote. » (L. Pauwels) ; « Naturellement, on devrait supprimer tous ceux qui manquent de vocabulaire, car ils sont grossiers sans le vouloir. » (R. Nimier) ; « La souffrance est le *petit luxe* des personnes de médiocre qualité. » (Montherlant) ; « Liberté signifie que les instincts virils, les instincts joyeux de guerre et de victoire, prédominent sur tous les autres instincts, par exemple sur ceux du "bonheur". L'homme devenu libre, combien plus encore l'esprit devenu libre, foule aux pieds cette sorte méprisable de bien-être dont rêvent les épiciers, les chrétiens, les vaches, les femmes, les Anglais et d'autres démocrates. L'homme libre est guerrier. » (Nietzsche).

Au fond, il est très simple d'entraîner les jeunes gens sur les chemins de la santé. Il suffit à notre civilisation d'opérer un bon virage à droite... de manière chevaleresque.

Un journaliste posa cette question à Clint Eastwood : « Quel est le secret de votre inépuisable énergie ? » Le géant du cinéma fit une réponse toute simple : « Si on se laisse aller, on est fichu. » J'aimerais que les enseignants enfoncent une telle formule dans les cervelles des adolescents. Le laisser-aller empoisonne tant d'écoles secondaires. À qui fume un joint ; à qui s'assied par terre ; à qui vient en pyjama ou presque à poil ; à qui arrive en retard ; à qui n'a pas son matériel ; à qui ne fait pas ses devoirs ; à qui essaie d'apitoyer les professeurs en invoquant des troubles dépressifs, des troubles anxieux, des troubles du sommeil, etc. ; à qui se plaint que le cours est trop difficile, que le prof explique mal, qu'il donne trop de travail ; à qui pleurniche parce qu'un camarade l'a insulté ; à qui se complaît dans des propos victimaires ; à qui affiche une fragilité pour justifier son manque d'investissement ; à qui attend tout des autres ; à qui manipule les enseignants pour les transformer en mamans compréhensives ; il faudrait dire et redire : « Si tu continues à te laisser-aller comme ça, tu es fichu ! »

\*

« *Bullshit Bienveillance* », un livre de Mathieu Grimpert, confirme avec une argumentation solide ce que je pense depuis longtemps : un culte excessif du bien-être à l'école ; une attention exagérée au « ressenti » des élèves ; une volonté démagogique de leur faire plaisir ; une psychologisation abusive qui conduit à coller des « troubles » sur presque tout le monde ; une complaisance folle envers un narcissisme inquiétant et une intolérance à la frustration qui envahissent la population ; une abdication devant le déclin des tâches de concentration, de mémorisation et de temps de travail, sans lesquelles aucun apprentissage sérieux n'est possible ; un militantisme politique de la part d'enseignants et de soi-disant « chercheurs » en soi-disant « sciences » de l'éducation, désireux de transformer les élèves en futurs électeurs de gauche ; tout cela conduit à fabriquer du crétinisme à grande échelle, surtout dans certains pays comme la France, la Belgique, le Canada...

\*

En France, le 27 septembre est la journée nationale du refus de l'échec scolaire. Authentique ! C'est révélateur d'une certaine idéologie égalitariste qui part de l'idée que tout le monde (ou presque) peut atteindre un haut niveau. De mon point de vue, non seulement il ne faut pas refuser l'échec scolaire, mais il est permis de voir en lui quelque chose de bénéfique à un pays. L'échec scolaire est l'indice de l'existence d'une chose admirable qui s'appelle la « sélection ». C'est grâce à la sélection qu'un pays compte parmi ses citoyens des êtres dont l'excellence contribue au rayonnement national, que ce soit sur un plan intellectuel, artistique ou autre. Refuser l'échec scolaire, c'est trop souvent déprécier l'excellence.

\*

Il me semble que, si la cosmologie, la géologie et la paléontologie étaient enseignées de manière approfondie et durable dans toutes les écoles, si les enfants et les adolescents découvraient à quel point l'histoire de l'Univers, de la Terre et de la Vie sont compliquées, s'étendent sur des milliards d'années où les hasards se sont multipliés de manière vertigineuse, où l'homo sapiens sapiens n'est qu'une possibilité qui s'est réalisée, mais qui aurait pu ne jamais voir le jour ; que, si, en outre, étaient enseignées les bases de la physique, de la chimie, de la biologie permettant d'expliquer à partir de quelles lois ces histoires se sont déroulées ; que, si, enfin, l'enseignement de la psychologie aidait à comprendre pourquoi et comment l'esprit se complaît dans la pensée magique, est facilement porté à la plus folle crédulité, se laisse polluer par de multiples biais, alors... alors... peut-être que les croyances religieuses, du moins les plus niaises, tendraient à disparaître ; peut-être que ne subsisterait qu'un vague déisme abstrait (dieu comme « théorie du tout », comme « étincelle » du big bang, mais sans « volonté » de « créer » l'homme des milliards d'années plus tard) ; peut-être que prendraient fin les mirages d'une âme immortelle, d'un au-delà ou d'une succession de réincarnations ; peut-être que les humains cesseraient de considérer leur existence comme la chose la plus importante dans l'univers, auraient l'humilité d'accepter leur insignifiance, la sagesse d'aimer l'idée que leur vie n'est qu'une petite musique très brève, à peine plus longue et plus intéressante que le chant d'un grillon.

Bien entendu, la nature humaine étant ce qu'elle est, les hommes continueraient, comme ils l'ont toujours fait, à s'étriper cruellement... mais ils ne le feraient plus au nom d'Allah... ce serait déjà un petit gain de raison...

\*

Assez de blabla pédagogique ! Les choses sont relativement simples. Les élèves intelligents et motivés apprennent plutôt bien ; les autres apprennent plutôt mal. Et les enseignants n'y peuvent pas grand chose. Comme disait à peu près Dantec : le but des fascistes, c'est de transformer des idiots en génies ; le but des communistes, c'est de transformer des génies en idiots. Pour moi qui suis plutôt conservateur, je préfère un monde où on laisse les génies et les idiots persister dans leur être.

**Comment améliorer vos  
performances intellectuelles  
et scolaires dans tous les domaines,  
et plus particulièrement  
en mathématiques ?**

## **Comment améliorer vos performances intellectuelles et scolaires dans tous les domaines, et plus particulièrement en mathématiques ?**

### **Lire**

Lisez au moins un livre par semaine, en touchant à tous les domaines.

Lisez un dictionnaire et notez dans un cahier tous les mots que vous ne connaissez pas, puis apprenez-les.

Exercez-vous à lire en tenant votre livre à l'envers.

### **Écrire**

Exercez-vous à écrire le plus rapidement possible, tout en restant lisible.

Exercez-vous à écrire de la main gauche, si vous êtes droitier ; et de la main droite, si vous êtes gaucher.

Exercez-vous à écrire à l'envers (rotation de  $180^\circ$ ) ou en symétrie axiale.

Exercez-vous à écrire en fermant les yeux.

Inventez de nouvelles formes d'écriture.

### **Dessiner**

Appliquez au dessin des procédés analogues à ceux exposés au point précédent.

Accomplissez des performances picturales dans la lignée de M.C. Escher.

### **Mémoriser**

Apprenez par cœur des poèmes, des chansons, des citations, des formules, des développements décimaux, etc.

Examinez pendant 5 minutes le plan d'un quartier d'une ville, puis reproduisez-le de mémoire dans ses moindres détails, noms de rues y compris.

### **Mentaliser**

Résolvez des problèmes mathématiques, « rédigez » des histoires, etc. entièrement de tête, sans écrire quoi que ce soit. Commencez par des choses faciles. Essayez de refaire de cette façon-là une épreuve datant d'un mois ou deux.

### **Structurer**

Prenez un chapitre du cours de mathématiques et essayer d'en dégager le plan, les articulations, les relations entre les différentes parties. Notez tout cela par écrit.

Récrivez la résolution d'un problème de mathématiques en expliquant ce qui est fait. N'utilisez pour cela que le langage naturel.

## Rédiger

Rédigez des récits, des contes, des poèmes, des essais, des saynètes, des nouvelles, des aphorismes, etc., en soignant votre style et en visant l'originalité. Évidemment, vous veillerez à respecter scrupuleusement les règles de la grammaire et de l'orthographe.

Rédigez des lipogrammes, des palindromes, des acrostiches, des calligrammes, des monovocalismes, des limericks, des sextines, des sonnets, des rotrouanges, des pantoums, etc.

## Jouer

Il existe de nombreux recueils de jeux mathématiques. Ayez la curiosité d'en lire quelques uns et de vous livrer aux activités qu'ils proposent.

Pratiquez des jeux d'esprit, comme les échecs, le go, les dames, les devinettes, etc.

## Décrypter

Essayez de deviner le sens et les règles grammaticales d'un texte écrit en français médiéval.

## Inventer

Inventez des objets, des problèmes de mathématiques, des codes secrets, des procédés, de nouvelles formes d'art, des jeux, des programmes politiques, etc.

## Explorer

Prenez un problème de mathématiques et modifiez-en l'énoncé de multiples façons afin de donner naissance à de nouveaux problèmes que vous essayerez de résoudre.

Prenez dans un livre une formule dont vous comprenez la signification et tentez de prouver sa validité.

Étudiez seul, à l'aide d'un livre, un sujet de mathématiques qui ne vous a pas encore été enseigné.

## Généraliser

Quand un problème comporte des valeurs numériques, remplacez tous les nombres par des variables, de manière à obtenir une formule générale que vous vous efforcerez de simplifier au maximum.

## **Douter**

Quand vous pensez avoir triomphé d'un problème, demandez-vous si le résultat que vous avez trouvé est vraisemblable. Essayez d'élaborer une procédure de vérification qui soit différente de la démarche effectuée pour parvenir au résultat.

Apprenez par cœur cette citation de Bertrand Russell : « Tout le problème de ce monde est que les imbéciles et les fanatiques sont toujours très sûrs d'eux, alors que les gens plus intelligents sont pleins de doute. »

## **Clarifier**

La résolution d'un problème est parfois facilitée quand on prend la peine d'écrire quelques petites phrases entre les calculs, qui commentent et justifient ceux-ci.

## **Intensifier**

Il vaut mieux travailler une heure avec une concentration totale que deux heures avec un esprit facilement distrait.

Il vaut mieux consacrer du temps à examiner avec acharnement une question difficile que de gaspiller votre énergie à faire une multitude d'exercices faciles qui reposent tous sur un algorithme que vous maîtrisez.

## **Relier**

L'intelligence, au sens étymologique, est la faculté de relier des choses de l'esprit. Essayez le plus souvent possible d'établir des liens entre deux notions, aussi éloignées pussent-elles paraître à première vue. En quoi se ressemblent-elles, en quoi diffèrent-elles ?

## **Confronter**

Confrontez vos idées, vos démarches, vos résultats à ceux des autres. Discutez-en afin de mettre vos convictions à l'épreuve et de découvrir d'autre voies.

## **Chercher**

Une réponse que vous trouvez seul est un motif de plaisir et de fierté. N'interrogez jamais votre professeur avant d'avoir cherché vous-même des réponses, de les avoir sérieusement cherchées.

## **Comprendre**

La compréhension n'est pas un phénomène passif. Il ne suffit pas d'écouter une « bonne explication » pour comprendre. On ne comprend qu'à force de construire des modèles mentaux qu'il faut réajuster chaque fois qu'ils se montrent inadéquats. Lorsque vous commettez une erreur, et c'est un phénomène courant chez tout le monde, prenez le temps de l'analyser, d'en cerner l'origine ; reprogrammez votre cerveau pour ne plus la commettre.

## **Consolider**

Avec le temps, tout s'en va... Ne laissez pas s'évaporer les savoirs qui enrichissent votre âme. Durant votre existence, révisez de temps en temps tout ce que vous avez appris. La mémoire a besoin d'être consolidée par des rappels.

## **Éviter**

Évitez certaines conduites très nuisibles à l'efficacité intellectuelle : la consommation de cannabis, l'excès de sucre, la fréquentation de personnes idiotes, déprimées ou toxiques, le manque de sommeil, l'abus d'écrans.