Volume du tétraèdre en fonction de ses côtés

PASCAL KAESER

Genève

[redacted]

mai 1999

1 Méthode

Si l'on considère le tétraèdre de sommets : $(0;0;0),(a;0;0),(b;c;0),(d;e;f)$, son volume est naturellement égal à $\mid \frac{acf}{6} \mid$. Grâce au théorème de Pythagore, les longueurs des 6 arêtes peuvent aisément s'exprimer en fonction des 6 variables : a,b,c,d,e,f. Il ne reste alors plus qu'à résoudre un système (non linéaire) de 6 équations à 6 inconnues. J'ai utilisé le logiciel Maple pour effectuer cette résolution et j'ai cherché à la main une manière élégante de simplifier la formule qui s'ensuit pour le volume du tétraèdre.

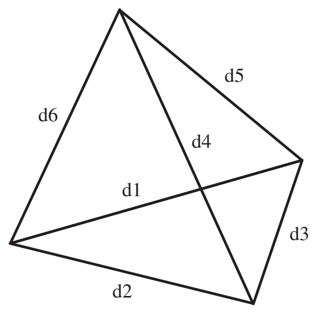
2 Formule

Soient A l'ensemble des 6 arêtes du tétraèdre et $P(A)$ l'ensemble des parties de A. Notons $\bar{t}$ le complément par rapport à A d'un élément t de $P(A)$. Définissons F comme l'ensemble des triples $\{x;y;z\} \in P(A)$, tels que x,y,z forment une face du tétraèdre. Définissons en outre G comme l'ensemble des $(e \cap f) \cup (\overline{e \cup f}) \in P(A)$, tels que $e,f \in F$ et $e \neq f$. G contient 3 éléments qui sont les paires d'arêtes opposées du tétraèdre, c-à-d les arêtes sans sommet commun. Nous avons encore besoin de 3 fonctions. La première, D, associe à une arête x de longueur L la quantité : $(\frac{L}{\sqrt[3]{12}})^2$. La seconde, p, associe à un élément $t \in P(A)$ le produit des $D(x)$ pour tous les $x \in t$. La troisième, s, analogue à la seconde, associe à t la somme des $D(x)$ pour tous les $x \in t$. Alors le volume du tétraèdre est donné par la formule :

$$\sqrt{\sum_{t \in G}(s(\bar{t})-s(t))p(t)-\sum_{t \in F}p(t)}$$

3 Compléments

Si l'on numérote les arêtes du tétraèdre, comme sur le dessin ci-dessous, les ensembles F et G sont les suivants :



$$F = \{\{d1; d2; d3\}; \{d3; d4; d5\}; \{d5; d6; d1\}; \{d2; d4; d6\}\}$$
$$G = \{\{d1; d4\}; \{d2; d5\}; \{d3; d6\}\}$$

Remarquons que F est un $1-(6,3,2)$ design et G un $1-(6,2,1)$ design (G est aussi une partition de A). En outre, il est possible de représenter sur un même graphe F et G, d'une manière très proche du fameux plan projectif de Fano, à la différence qu'il manque un point.