Suites quadratiques

Une suite est dite quadratique quand elle est de la forme $x_n = c + b\cdot(n-1) + a\cdot(n-1)(n-2)$ (avec $a \neq 0$)

Dans une telle suite :

c est le premier terme
b est la différence des deux premiers termes
a est la moitié de toute différence de deux résultats consécutifs d'une différence de deux termes consécutifs (je sais : cette phrase n'est pas facile à comprendre...)

D'autre part, une suite quadratique peut aussi s'écrire $x_n = A n^2 + B n + C$
avec $A = a$
$B = b - 3a$
$C = c - b + 2\mathrm{a}$

Exemple 1

$x_n = 5 + 3(n-1) + 7(n-1)(n-2) = 7n^2 - 18n + 16$ donne :

5 8 25 56 101 160 etc.

Récrivons cette liste ; puis, en-dessous, les différences ; et, encore en-dessous, les différences des différences :

suite	5		8		25		56		101		160
diff		3		17		31		45		59	
diff de diff			14		14		14		14		

Sur la diagonale de gauche, nous avons successivement c = 5, b = 3 et 2a = 14.

Exemple 2

Trouver une formule pour le terme général d'une suite quadratique x_n dont les quatre premiers termes sont : 4 13 48 109

Faisons les différences et les différences de différences :

suite	4		13		48		109
diff		9		35		61	
diff de diff			26		26		

Nous avons c = 4, b = 9 et 2a = 26, c-à-d a = 13. Donc :

$$x_n = 4 + 9(n-1) + 13(n-1)(n-2) = 13n^2 - 30n + 21$$

Exemple 3

Dans le cas particulier où $x_n = c + n^2$, les différences sont tout simplement les nombres impairs à partir de 3 :

suite	c + 1		c + 4		c + 9		c + 16
diff		3		5		7	
diff de diff			2		2		

*

Voici la formule pour la somme d'une suite quadratique :

Soit $u_n = A n^2 + B n + C$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Alors :

$$\boxed{S_n = \frac{n}{6}[2 A n^2 + (3 A + 3 B) n + A + 3 B + 6 C] = \frac{n}{6}[2 a n^2 + (3 b - 6 a) n + 4 a - 3 b + 6 c]}$$

*

Exercice 1 Donner une formule pour le terme général de chacune des suites quadratiques ci-dessous, dont les quatre premiers termes sont donnés.

a)	−4	1	12	29
b)	23	5	−17	−43
c)	5	8	13	20
d)	−1	2	7	14
e)	−19	−16	−11	−4
f)	107	110	115	122

*

Alternance des signes

Soit une suite u_n à termes positifs. Alors $v_n=(-1)^n u_n$ et $w_n=(-1)^{n+1} u_n$ sont des suites où les signes alternent.
v_n commence par un nombre négatif
w_n commence par un nombre positif

Exemple 4

$u_n=2n$ donne :	2	4	6	8	10	etc.
$v_n=(-1)^n 2n$ donne :	−2	4	−6	8	−10	etc.
$w_n=(-1)^{n+1} 2n$ donne :	2	−4	6	−8	10	etc.

Remarques

Pour qu'il y ait alternance des signes, il est essentiel que les termes de u_n soient tous positifs ou tous négatifs.

Une suite peut être alternée sans avoir un facteur $(-1)^n$ ou $(-1)^{n+1}$.

Une suite géométrique de raison négative est toujours alternée.

Pour trouver le terme général d'une suite alternée x_n , il est possible :
a) de supprimer les signes et de chercher le terme général y_n de cette suite à termes positifs
b) d'en déduire $x_n=(-1)^n \cdot y_n$ si le premier terme de la suite x_n est négatif et d'en déduire $x_n=(-1)^{n+1} \cdot y_n$ si le premier terme de la suite x_n est positif

Exemple 5

Soit x_n une suite dont les 5 premiers termes sont :

−7 11 −15 19 −23

En supprimant les signes, nous obtenons la suite y_n dont les 5 premiers termes sont :

7 11 15 19 23

Faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'une suite arithmétique. Alors la raison vaut 3 et le premier terme 7. D'où : $y_n=7+3(n-1)=3n+4$. Comme le premier terme de x_n est négatif, nous obtenons :

$$x_n=(-1)^n \cdot y_n=(-1)^n(3n+4)$$

Exemple 6

$u_n=\frac{35n^3-249n^2+532n-330}{6}$	donne :	-2	3	-5	9	80	etc.
$v_n=(-1)^n u_n$	donne :	2	3	5	9	-80	etc.
$w_n=(-1)^{n+1} u_n$	donne :	-2	-3	-5	-9	80	etc.

Aucune de ces suites n'est alternée.

Exemple 7

$u_n=\sin\left(\frac{60°}{n}+n\cdot 180°\right)$ est une suite alternée. Sur le cercle trigonométrique, $\frac{60°}{n}$ est toujours situé dans le premier quadrant. En ajoutant des multiples de 180°, on fait alternativement passer l'angle du 1er au 3^{e} quadrant et inversement, donc le sinus change de signe à chaque fois.

Exercice 2

Induire une formule pour chacune de ces suites dont les premiers termes sont donnés.

a)	$\sqrt{1}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$
b)	-1	4	-9	16	-25
c)	3	-4	5	-6	7
d)	-5	5	-5	5	-5
e)	-10	100	$-1'000$	$10'000$	$-100'000$
f)	0.1	-0.01	0.001	-0.0001	0.00001

Exercice 3

Soit u_n une suite fabriquée à partir d'une suite arithmétique, de manière à la rendre alternée. Les quatre premiers termes de u_n sont :

-21 $\quad$ 33 $\quad$ -45 $\quad$ 57 $\qquad$ Trouver le terme général.

Exercice 4

Soit v_n une suite fabriquée à partir d'une suite arithmétique, de manière à la rendre alternée. Les quatre premiers termes de v_n sont :

1.618 $\quad$ -2.155 $\quad$ 2.692 $\quad$ -3.229 $\qquad$ Trouver le terme général.

Exercice 5

Soit w_n une suite fabriquée à partir d'une suite quadratique simple, de manière à la rendre alternée. Les quatre premiers termes de w_n sont :

16 −19 24 −31 Trouver le terme général.

Exercice 6

Pour chacune des suites ci-dessous, dont sont donnés les cinq premiers termes, trouver le terme général en restreignant l'exploration aux suites arithmétiques, géométriques, quadratiques simples ($c+n^2$), avec la possibilité de jouer sur l'alternance des signes.

a)	4	12	36	108	324
b)	97	86	75	64	53
c)	−800	400	−200	100	−50
d)	243	81	27	9	3
e)	470	−450	430	−410	390
f)	−100	−97	−92	−85	−76
g)	−5	−1	3	7	11
h)	4	−7	12	−19	28
i)	1000	−1200	1440	−1728	2073.6
j)	−7	10	−15	22	−31
k)	−20	40	−80	160	−320
l)	−500	400	−300	200	−100

Quotients

À partir de deux suites p_n et q_n , nous pouvons former la suite : $x_n = \frac{p_n}{q_n}$

Exemple 8

$p_n = n^2$	donne :	1	4	9	16	25	etc.
$q_n = 2n$	donne :	2	4	6	8	10	etc.
$x_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{n^2}{2n}$	donne :	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{25}{10}$	etc.

qui peuvent être simplifiés en :

$x_n = \frac{n}{2}$		$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	etc.

Exercice 7

Soit w_n une suite fabriquée à partir de deux suites arithmétiques, l'une formant les numérateurs et l'autre les dénominateurs. Les quatre premiers termes de w_n sont :

$\frac{2}{5}$ $\quad \frac{9}{11}$ $\quad \frac{16}{17}$ $\quad \frac{23}{23}$ Trouver le terme général.

Exercice 8

Soit x_n une suite fabriquée à partir de deux suites arithmétiques, l'une formant les numérateurs et l'autre les dénominateurs. Les quatre premiers termes de x_n sont :

$\frac{99}{106}$ $\quad \frac{112}{103}$ $\quad \frac{125}{100}$ $\quad \frac{138}{97}$ Trouver le terme général.

Exercice 9

Soit y_n une suite fabriquée à partir de deux suites arithmétiques, l'une formant les numérateurs et l'autre les dénominateurs, et rendue alternée.
Les quatre premiers termes de y_n sont :

$\frac{3}{4}$ $\quad -\frac{9}{16}$ $\quad \frac{15}{28}$ $\quad -\frac{21}{40}$ Trouver le terme général.

Exercice 10

Soit x_n une suite fabriquée à partir de deux suites, l'une arithmétique ou géométrique formant les numérateurs et l'autre arithmétique ou géométrique formant les dénominateurs. Les quatre premiers termes de x_n sont :

$\frac{3}{7}$ $\frac{11}{91}$ $\frac{19}{1183}$ $\frac{27}{15379}$ Trouver le terme général.

Exercice 11

Soit y_n une suite fabriquée à partir de deux suites, l'une arithmétique ou géométrique formant les numérateurs et l'autre arithmétique ou géométrique formant les dénominateurs. Les quatre premiers termes de y_n sont :

$\frac{4}{2}$ $\frac{-12}{-3}$ $\frac{36}{-8}$ $\frac{-108}{-13}$ Trouver le terme général.

(Remarque : si les fractions avaient été simplifiées en 2, 4, −9/2 et 108/13, la recherche du terme général serait nettement plus difficile...)

Exercice 12

Soit z_n une suite fabriquée à partir de deux suites, l'une arithmétique ou géométrique formant les numérateurs et l'autre arithmétique ou géométrique formant les dénominateurs, et rendue alternée. Les quatre premiers termes de z_n sont :

$-\frac{17}{19}$ $\frac{40}{76}$ $-\frac{63}{304}$ $\frac{86}{1216}$ Trouver le terme général.

Exercice 13

Pour chacune des suites ci-dessous, dont sont donnés les cinq premiers termes, trouver le terme général en restreignant l'exploration des numérateurs et des dénominateurs aux suites arithmétiques, géométriques, quadratiques simples ($c+n^2$), avec la possibilité de jouer sur l'alternance des signes.

a) $\frac{7}{14}$ $\frac{10}{23}$ $\frac{15}{32}$ $\frac{22}{41}$ $\frac{31}{50}$

b) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{16}{13}$ $\frac{32}{17}$ $\frac{64}{21}$

c) $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{4}{14}$ $\frac{4}{21}$ $\frac{4}{30}$

d) $\frac{14}{600}$ $\frac{17}{570}$ $\frac{20}{540}$ $\frac{23}{510}$ $\frac{26}{480}$

e)	$-\frac{6}{10}$	$\frac{9}{20}$	$-\frac{12}{40}$	$\frac{15}{80}$	$-\frac{18}{160}$
f)	$\frac{10}{4}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{13}{19}$	$\frac{14}{28}$
g)	$-\frac{75}{8}$	$\frac{70}{13}$	$-\frac{65}{18}$	$\frac{60}{23}$	$-\frac{55}{28}$
h)	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{125}{12}$	$\frac{625}{24}$
i)	$\frac{7}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{15}{3}$	$-\frac{22}{3}$	$\frac{31}{3}$
j)	$\frac{8}{3}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{22}{11}$	$\frac{29}{18}$	$\frac{36}{27}$
k)	$-\frac{5}{9}$	$\frac{8}{14}$	$-\frac{13}{19}$	$\frac{20}{24}$	-1
l)	$\frac{10}{8}$	$\frac{100}{9}$	$\frac{1000}{10}$	$\frac{10000}{11}$	$\frac{100000}{12}$
m)	$\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{9}{6}$	$-\frac{16}{7}$	$\frac{25}{8}$
n)	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{9}$	$\frac{16}{17}$	$-\frac{32}{33}$

Exercice 14

Soient la suite arithmétique $u_n = 9n + 16$ et la suite géométrique $v_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

a) le nombre 472’148 est-il un terme de la première suite ?

b) le nombre 472’148 est-il un terme de la deuxième suite ?

Solutions

Exercice 1

a)	−4		1		12		29
diff		5		11		17	
diff de diff			6		6		

terme général : $-4+5(n-1)+6(n-1)(n-2)$

b)	23		5		−17		−43
diff		−18		−22		−26	
diff de diff			-4		-4		

terme général : $23-18(n-1)-2(n-1)(n-2)$

c)	5		8		13		20
diff		3		5		7	
diff de diff			2		2		

terme général : n^2+4

d)	−1		2		7		14
diff		3		5		7	
diff de diff			2		2		

terme général : n^2-2

e)	−19		−16		−11		−4
diff		3		5		7	
diff de diff			2		2		

terme général : n^2-20

f)	107		110		115		122
diff		3		5		7	
diff de diff			2		2		

terme général : n^2+106

Exercice 2

a) $\sqrt{n}$ b) $(-1)^n \cdot n^2$ c) $(-1)^{n+1} \cdot (n+2)$

d) $(-1)^n \cdot 5$ e) $(-1)^n \cdot 10^n$ f) $(-1)^{n+1} \cdot 10^{-n}$

Exercice 3

$$u_n = (-1)^n \cdot (21 + 12 \cdot (n-1))$$

Exercice 4

$$v_n = (-1)^{n+1} \cdot (1.618 + 0.537 \cdot (n-1))$$

Exercice 5

$$w_n = (-1)^{n+1} \cdot (15 + n^2)$$

Exercice 6

a) $4 \cdot 3^{n-1}$

b) $97 - 11 \cdot (n-1)$

c) $(-800) \cdot (-0.5)^{n-1} = (-1)^n \cdot 800 \cdot 0.5^{n-1}$

d) $243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

e) $(-1)^{n+1} \cdot (470 - 20 \cdot (n-1))$

f) $-101 + n^2$

g) $-5 + 4 \cdot (n-1)$

h) $(-1)^{n+1} \cdot (3 + n^2)$

i) $1000 \cdot (-1.2)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot 1000 \cdot 1.2^{n-1}$

j) $(-1)^n \cdot (6 + n^2)$

k) $(-20) \cdot (-2)^{n-1} = (-1)^n \cdot 20 \cdot 2^{n-1}$

l) $(-1)^n \cdot (500 - 100 \cdot (n-1))$

Exercice 7

$$w_n = \frac{2 + 7 \cdot (n-1)}{5 + 6 \cdot (n-1)} = \frac{7n - 5}{6n - 1}$$

Exercice 8

$$x_n = \frac{99 + 13 \cdot (n-1)}{106 - 3 \cdot (n-1)} = \frac{13n + 86}{-3n + 109}$$

Exercice 9

$$y_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{3+6\cdot(n-1)}{4+12\cdot(n-1)}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{6n-3}{12n-8}$$

Exercice 10

$$x_n=\frac{3+8\cdot(n-1)}{7\cdot 13^{n-1}}$$

Exercice 11

$$y_n=\frac{4\cdot(-3)^{n-1}}{2-5\cdot(n-1)}$$

Exercice 12

$$z_n=(-1)^n\cdot\frac{17+23\cdot(n-1)}{19\cdot 4^{n-1}}$$

Exercice 13

a) $\dfrac{6+n^2}{14+9\cdot(n-1)}$

b) $\dfrac{4\cdot 2^{n-1}}{5+4\cdot(n-1)}$

c) $\dfrac{4}{5+n^2}$

d) $\dfrac{14+3\cdot(n-1)}{600-30\cdot(n-1)}$

e) $(-1)^n\cdot\dfrac{6+3\cdot(n-1)}{10\cdot 2^{n-1}}$

f) $\dfrac{n+9}{3+n^2}$

g) $(-1)^n\cdot\dfrac{75-5\cdot(n-1)}{8+5\cdot(n-1)}$

h) $\dfrac{5^{n-1}}{\frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}}$

i) $(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{6+n^2}{3}$

j) $\dfrac{8+7\cdot(n-1)}{2+n^2}$

k) $(-1)^n\cdot\dfrac{4+n^2}{9+5\cdot(n-1)}$

l) $\dfrac{10^n}{n+7}$

m) $(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n^2}{n+3}$

n) $(-1)^n\cdot\dfrac{2^n}{2^n+1}$

Exercice 14

a) Non b) Non