De la suite dans les idées

Une application des suites arithmétiques à la chimie

Dans un atome, le nombre d'orbitales
dont le premier nombre quantique vaut N
est égal à

$$\sum_{L=0}^{L=N-1} 2L+1=N^2$$

(où L représente le deuxième nombre quantique
et 2L+1 le nombre de possibilités pour le troisième nombre quantique).
Et le nombre total d'orbitales
dont le premier nombre quantique est au plus égal à N
donne :

$$\sum_{K=1}^{K=N} K^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Pascal Kaeser 2023

Table des matières

De la suite dans les idées

1. Définition

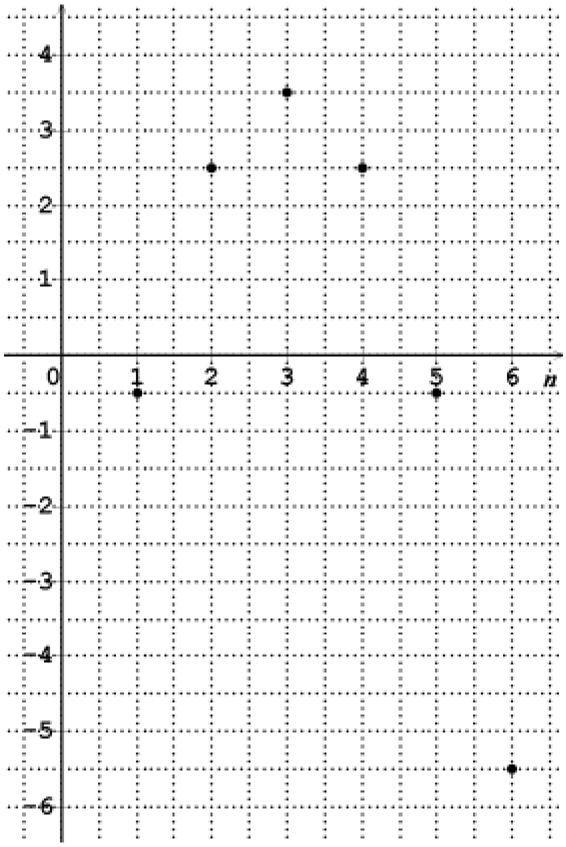
Une suite numérique est une fonction de **N** dans **R** ou de **N*** dans **R**.
Sauf précision contraire, dans ce cours, les suites seront définies de **N*** dans **R**.
La variable indépendante sera souvent notée n.
Les images s'appellent les termes, les pré-images s'appellent les rangs.
Une formule explicite pour l'image de n s'appelle le terme général.

Exemple 1

Soit la suite définie par le terme général $u(n)=6n-n^2-5.5$.
Ses premières images (premiers termes) sont :

$u(1) = -0.5$ $u(2) = 2.5$ $u(3) = 3.5$ $u(4) = 2.5$ $u(5) = -0.5$ $u(6) = -5.5$ etc.

Le début de son graphe est :



Nous pouvons dire par exemple que 3.5 a pour rang 3 ; que 2.5 a pour rangs 2 et 4 ; etc.

*

Quand on parle de suite, au lieu d'utiliser la notation fonctionnelle $u(n)$, il est fréquent de recourir à une autre notation : celle d'une lettre indicée. Nous emploierons couramment u_n , v_n , w_n , x_n , y_n , etc. Un rang est alors une valeur de l'indice.

Avec cette nouvelle notation, reprenons l'exemple 1

Soit la suite définie par le terme général $u_n=6n-n^2-5.5$ .Ses premiers termes sont :

u_1 = −0.5 u_2 = 2.5 u_3 = 3.5 u_4 = 2.5 u_5 = −0.5 u_6 = −5.5 etc.

Il est fréquent d'écrire la liste des premiers termes en omettant la variable indicée :

−0.5 2.5 3.5 2.5 −0.5 −5.5 etc.

Une suite peut aussi être présentée sous forme de tableau :

n	1	2	3	4	5	6	7	...
u_n	−0.5	2.5	3.5	2.5	−0.5	−5.5	−12.5	...

Au rang 1, nous avons : −0.5
Au rang 2, nous avons : 2.5
Au rang 3, nous avons : 3.5
Au rang 4, nous avons : 2.5
Au rang 5, nous avons : −0.5
Au rang 6, nous avons : −5.5
Au rang 7, nous avons : −12.5
etc.

Inversement :

−0.5 se trouve aux rangs 1 et 5
2.5 se trouve aux rangs 2 et 4
3.5 se trouve au rang 3
−5.5 se trouve au rang 6
−12.5 se trouve au rang 7

Exercice 1 Soient les suites :

$$u_n=4n-5 \qquad v_n=(n-1)^2-n \qquad w_n=\frac{149n+2798}{n+2}$$

$$x_n=1.2^n \qquad y_n=\sqrt{n}+31 \qquad z_n=(-1)^{n+1}\cdot(2-10^{-n})$$

a) Pour chacune des suites données, calculer les trois premiers termes et le terme de rang 10.

b) Chercher si le nombre 649 appartient ou non aux suites u_n , x_n et y_n .
Si oui, préciser son rang ou ses rangs.

Exercice 2 *

Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $u_n=2n-5$

2. Récurrence

Une suite u_n peut être construite par récurrence. Pour cela, il faut avoir à disposition une condition initiale, c'est-à-dire un ou plusieurs termes des premiers rangs ;
et une relation de récurrence, c'est-à-dire une formule qui exprime u_n en fonction d'un ou plusieurs termes précédents.

Exemple 2

Condition initiale : $u_1=4$
Relation de récurrence : $u_n=\sqrt{u_{n-1}}+3n$ (pour $n>1$)

Calculons les premiers termes après u_1

$$u_2=\sqrt{u_{2-1}}+3\cdot 2=\sqrt{u_1}+6=\sqrt{4}+6=8$$
$$u_3=\sqrt{u_{3-1}}+3\cdot 3=\sqrt{u_2}+9=\sqrt{8}+9=11.828$$
$$u_4=\sqrt{u_{4-1}}+3\cdot 4=\sqrt{u_3}+12=\sqrt{11.828}+12=15.439$$

Exemple 3

Condition initiale : $v_1=0$ et $v_2=4$
Relation de récurrence : $v_n=\frac{n}{n+3}+5v_{n-1}-7v_{n-2}$ (pour $n>2$)

Calculons les premiers termes après v_1 et v_2

$$v_3=\frac{3}{3+3}+5v_{3-1}-7v_{3-2}=\frac{3}{6}+5v_2-7v_1=1/2+5\cdot 4-7\cdot 0=20.5$$
$$v_4=\frac{4}{4+3}+5v_{4-1}-7v_{4-2}=\frac{4}{7}+5v_3-7v_2=4/7+5\cdot 20.5-7\cdot 4=75.071$$
$$v_5=\frac{5}{5+3}+5v_{5-1}-7v_{5-2}=\frac{5}{8}+5v_4-7v_3=5/8+5\cdot 75.071-7\cdot 20.5=232.482$$

Exercice 3 Calculer tous les termes jusqu'à celui de rang 3

a) Condition initiale : $x_1=4$ Relation de récurrence : $x_n=\frac{-(n+1)^2}{x_{n-1}}$

b) Condition initiale : $y_1=5$ Relation de récurrence : $y_n=y_{n-1}+(-1)^n\cdot 3$

Exercice 4 * *Suite chaotique*

Considérons la relation de récurrence : $z_n=3.9\cdot z_{n-1}\cdot(1-z_{n-1})$

a) Calculer z_{10} avec la condition initiale $z_1=0.100$

b) Calculer z_{10} avec la condition initiale $z_1=0.101$

Exercice 5 * *Nombre d'or*

Calculer tous les termes jusqu'à celui de rang 12

a) Condition initiale : $u_1=2$ Relation de récurrence : $u_n=1+\frac{1}{u_{n-1}}$

b) Condition initiale : $v_1=2$ Relation de récurrence : $v_n=\sqrt{1+v_{n-1}}$

Exercice 6 Calculer tous les termes jusqu'à celui de rang 5

a) Condition initiale : $u_1=4$ et $u_2=13$

Relation de récurrence : $u_n=\frac{u_{n-2}}{n+2}+\frac{u_{n-1}}{n+1}$

b) Condition initiale : $v_1=5$ et $v_2=-7$

Relation de récurrence : $v_n=\frac{v_{n-1}}{2v_{n-2}}+\frac{n}{v_{n-1}}+3$

Exercice 7 Soit une suite vérifiant la relation de récurrence : $u_n=(n+3)u_{n-1}+4n$
Sachant que $u_{57}=18$, calculer u_{58} et u_{56} .

*

Dans certains cas, il est possible de trouver une formule directe pour le terme général d'une suite donnée par récurrence.

Exemple 4

Condition initiale : $x_1=11$ Relation de récurrence : $x_n=x_{n-1}+2n+9$

Calculons quelques termes : 11 24 39 56 75 96

Nous pouvons observer que :

11 = 10 + 1	24 = 20 + 4	39 = 30 + 9
56 = 40 + 16	75 = 50 + 25	96 = 60 + 36

Cela suggère la formule suivante pour le terme général : $x_n=10n+n^2$

Cette formule est-elle la bonne ? Pour le savoir, exprimons d'abord x_{n-1} en se basant sur cette formule :

$$x_{n-1}=10(n-1)+(n-1)^2=10n-10+n^2-2\text{n}+1=n^2+8n-9$$

Remplaçons x_{n-1} par cette expression dans le membre de droite de la relation de récurrence :

$$x_{n-1}+2n+9=n^2+8n-9+2n+9=n^2+10n=x_n$$

La relation de récurrence est respectée avec cette formule pour le terme général. Donc cette formule est correcte.

Exemple 5

N'allons pas croire qu'une formule devinée soit nécessairement juste !

Condition initiale : $y_1=2$

Relation de récurrence : $y_n=2(y_{n-1}+1)+\frac{\sqrt{(1000.5-n)^2}}{n-1000.5}y_{n-1}$

Les premiers termes donnent : 2 4 6 8 10 12 14 16

Nous nous disons : « C'est la succession des nombres pairs ! »

Et nous écrivons joyeusement la formule : $y_n=2n$

Eh bien, ce n'est pas juste !

Cette formule fonctionne jusqu'au terme de rang 1000 : $y_{1000}=2000$

Mais : $y_{1001}=2(y_{1000}+1)+\frac{\sqrt{(1000.5-1001)^2}}{1001-1000.5}y_{1000}=2(2000+1)+2000=6002$

Or 6002 n'est pas le double de 1001...

Exercice 8 *

Condition initiale : $u_1=5$ Relation de récurrence : $u_n=3u_{n-1}+2$

Cette suite a-t-elle pour terme général : $u_n=2\cdot 3^n-1$?

Exercice 9 *

Condition initiale : $u_1=1$ Relation de récurrence : $u_n=2u_{n-1}+3$

Cette suite a-t-elle pour terme général : $u_n=2^{n+1}-3$?

3. Suites arithmétiques

Une suite est dite arithmétique quand elle est de la forme $x_n = b + a \cdot (n-1)$ (avec $a \neq 0$)

a s'appelle la raison de la suite

Dans une telle suite, la différence entre deux termes consécutifs est constante : elle est égale à la raison.

Exemple 6 $x_n = 8 + 3 \cdot (n-1)$ donne : 8 11 14 17 20 etc.

Faisons les différences : $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, $x_4 - x_3$, etc.

suite	8		11		14		17		20
différences		3		3		3		3	

La différence de deux termes consécutifs est bien égale à la raison : 3

C'est d'ailleurs facile à prouver. Une telle différence peut s'écrire :

$$x_{n+1} - x_n = [8+3n] - [8+3(n-1)] = 8 + 3\mathrm{n} - 8 - 3n + 3 = 3$$

Exercice 10

Chaque liste ci-dessous représente quatre termes consécutifs (pas nécessairement les premiers) d'une suite arithmétique. Calculer la raison de chacune, puis donner le terme suivant de la suite.

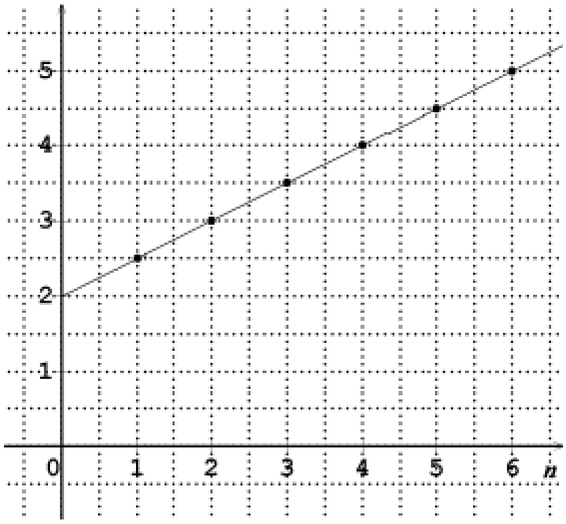
a)	6	11	16	21
b)	18	55	92	129
c)	88	75	62	49
d)	−161	−129	−97	−65
e)	−89	−112	−135	−158
f)	3	1	−1	−3
g)	4	13/3	14/3	5
h)	293/7	291/7	289/7	41
i)	18.2	20.9	23.6	26.3
j)	12	−6.4	−24.8	−43.2

Une suite arithmétique $x_n = b + a \cdot (n-1)$ peut aussi s'écrire $x_n = An + B$
avec $A = a$ et $B = b - a$

Cette forme est parfois nommée <u>forme réduite</u>.

Le graphe d'une suite arithmétique est une succession de points situés sur une droite de pente A et d'ordonnée à l'origine B .

<u>Exemple 7</u> Voici le graphe de $x_n = 2.5 + 0.5 \cdot (n-1) = 0.5n + 2$



*

Si nous connaissons les deux premiers termes x_1 et x_2 d'une suite arithmétique $x_n = b + a \cdot (n-1)$, alors on a :

$$b = x_1 \quad \text{et} \quad a = x_2 - x_1$$

<u>Exemple 8</u>

Soit x_n une suite arithmétique dont les quatre premiers termes sont :
7 10 13 16 i) Que vaut x_{231} ? ii) Quel est le rang de 451 ?

$b = x_1 = 7$ et la raison vaut $a = x_2 - x_1 = 10 - 7 = 3$. Donc $x_n = 7 + 3(n-1) = 3n + 4$

Dès lors : i) $x_{231} = 3 \cdot 231 + 4 = 697$

ii) $x_n = 3n + 4 = 451$ a pour solution : $n = \dfrac{451-4}{3} = 149$.
Le rang de 451 est 149

Exercice 11

Soit u_n une suite arithmétique dont les quatre premiers termes sont :
100 83 66 49

Que vaut u_{412} ? Et quel est le rang de −937 ?

Exercice 12

Soit v_n une suite arithmétique dont les quatre premiers termes sont :
6.5 6.75 7 7.25

Que vaut v_{169} ? Et quel est le rang de 220 ?

Exercice 13

Soit w_n une suite arithmétique dont les quatre premiers termes sont :
−4.6 −7.8 −11 −14.2

Que vaut w_{294} ? Et quel est le rang de −1451 ?

*

Si nous connaissons la raison a et un terme quelconque x_p d'une suite arithmétique, alors nous pouvons calculer b au moyen de la formule : $b=x_p-a\cdot(p-1)$.

Nous avons vu que la raison est la différence entre deux termes consécutifs. Plus généralement, la raison peut être obtenue au moyen de la formule :

$$a=\frac{x_q-x_p}{q-p} \quad (\text{ avec } q\neq p\ )$$

qui est la version, pour les suites, de la formule donnant la pente d'une droite à partir de deux points.

Exemple 9

Soit y_n une suite arithmétique dont nous connaissons $y_{37}=12$ et $y_{162}=58$

i) Que vaut y_{100} ? ii) Quel est le rang de 2.8 ?

La raison vaut $a=\dfrac{y_{162}-y_{37}}{162-37}=\dfrac{58-12}{162-37}=\dfrac{46}{125}=0.368$

b peut se calculer par exemple ainsi : $b=y_{37}-0.368\cdot(37-1)=12-0.368\cdot 36=-1.248$

Donc $y_n=-1.248+0.368(n-1)=0.368n-1.616$

Dès lors : i) $y_{100}=0.368\cdot 100-1.616=35.184$

ii) $y_n=0.368n-1.616=2.8$ a pour solution : $n=\dfrac{2.8+1.616}{0.368}=12$.

Le rang de 2.8 est 12

Exercice 14

Soit x_n une suite arithmétique dont nous connaissons $x_{53}=885$ et $x_{139}=584$

Que vaut x_{916} ?

Exercice 15

Soit y_n une suite arithmétique dont nous connaissons $y_{119}=1$ et $y_{244}=1.65$

Que vaut y_{73} ?

4. Suites géométriques

Une suite est dite géométrique quand elle est de la forme $x_n = b \cdot a^{n-1}$
(avec $b \neq 0$, $a \neq 0$ et $a \neq 1$)

a s'appelle la raison de la suite

Dans une telle suite, le quotient de deux termes consécutifs est constant : il est égal à la raison.

Exemple 10 $x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ donne : 3 6 12 24 48 etc.

Faisons les quotients : $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_2}$, $\frac{x_4}{x_3}$, etc.

suite	3		6		12		24		48
quotients		2		2		2		2	

Le quotient de deux termes consécutifs est bien égal à la raison : 2

C'est d'ailleurs facile à prouver. Un tel quotient peut s'écrire :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = 2$$

Exercice 16

Chaque liste ci-dessous représente quatre termes consécutifs (pas nécessairement les premiers) d'une suite géométrique. Calculer la raison de chacune, puis donner le terme suivant de la suite.

a)	6	60	600	6000
b)	432	144	48	16
c)	−15.75	−110.25	−771.75	−5'402.25
d)	728	−364	182	−91

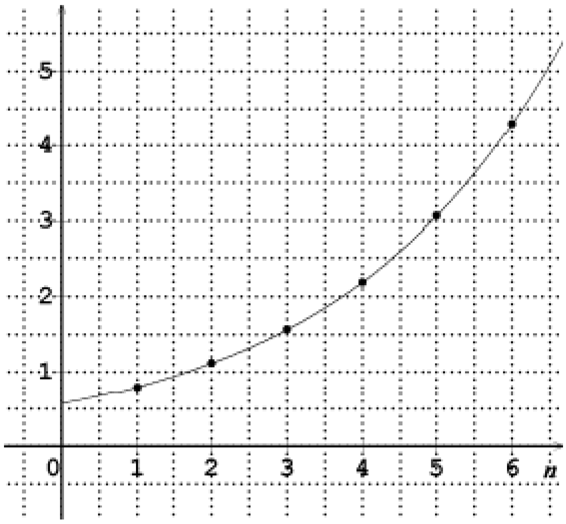
Une suite géométrique $x_n = b \cdot a^{n-1}$ peut aussi s'écrire $x_n = B \cdot A^n$

avec $A = a$ et $B = \frac{b}{a}$

Cette forme est parfois nommée forme réduite.

Le graphe d'une suite géométrique est une succession de points situés sur une exponentielle de base A et d'ordonnée à l'origine B .

Exemple 11 Voici le graphe de $x_n = 0.8 \cdot 1.4^{n-1} = (\frac{4}{7}) \cdot 1.4^n$



*

Si nous connaissons les deux premiers termes x_1 et x_2 d'une suite géométrique $x_n = b \cdot a^{n-1}$, alors on a :

$$b = x_1 \quad \text{et} \quad a = \frac{x_2}{x_1}$$

Exemple 12

Soit x_n une suite géométrique dont les quatre premiers termes sont :
50 60 72 86.4

i) Que vaut x_{21} ? ii) Quel est le rang de 35'440.09375 ?

$b=x_1=50$ et la raison vaut $a=\frac{x_2}{x_1}=\frac{60}{50}=1.2$. Donc $x_n=50\cdot 1.2^{n-1}$

Dès lors : i) $x_{21}=50\cdot 1.2^{20}=1'916.88$

ii) $x_n=50\cdot 1.2^{n-1}=35'440.09375$
donne $1.2^{n-1}=\frac{35'440.09375}{50}=708.8019$,
d'où $n-1=\log_{1.2}(708.8019)=\frac{\log(708.8019)}{\log(1.2)}=36$.
Le rang de 35'440.09375 est 37

Exercice 17

Soit u_n une suite géométrique dont les quatre premiers termes sont :
0.07 0.14 0.28 0.56

Que vaut u_{16} ? Et quel est le rang de 4'697'620.48 ?

Exercice 18

Soit v_n une suite géométrique dont les quatre premiers termes sont :
1000 200 40 8

Que vaut v_{18} ? Et quel est le rang de $\frac{8}{48'828'125}$?

*

Si nous connaissons la raison a et un terme quelconque x_p d'une suite géométrique, alors nous pouvons calculer b au moyen de la formule :

$$b=\frac{x_p}{a^{p-1}}$$

Nous avons vu que la raison est le quotient de deux termes consécutifs. Plus généralement, la raison peut être obtenue au moyen de la formule :

$$a=\sqrt[q-p]{\frac{x_q}{x_p}} \quad \text{(avec } q>p \text{)}$$

Exemple 13

Soit y_n une suite géométrique dont nous connaissons $y_{24}=5$ et $y_{41}=3$

i) Que vaut y_{100} ? ii) Quel est le rang de 2.03 ?

La raison vaut $a=\sqrt[41-24]{\frac{y_{41}}{y_{24}}}=\sqrt[17]{\frac{3}{5}}=0.9704$

b peut se calculer par exemple ainsi : $b=\frac{y_{24}}{0.9704^{23}}=\frac{5}{0.9704^{23}}=9.9793$

Donc $y_n=9.9793\cdot 0.9704^{n-1}$

Dès lors : i) $y_{100}=9.9793\cdot 0.9704^{100-1}=0.5096$

ii) $y_n=9.9793\cdot 0.9704^{n-1}=2.03$ donne $0.9704^{n-1}=\frac{2.03}{9.9793}=0.2034$,

d'où $n-1=\log_{0.9704}(0.2034)=\frac{\log(0.2034)}{\log(0.9704)}=53$.

Le rang de 2.03 est 54

Exercice 19

Soit w_n une suite géométrique dont nous connaissons $w_{21}=0.75$ et $w_{26}=-0.0234375$

Que vaut w_{50} ?

5. Sommes (et produits)

$\sum_{k=p}^{q} u_k$	désigne la somme des termes d'une suite, depuis le rang p jusqu'au rang q
$\prod_{k=p}^{q} u_k$	désigne le produit des termes d'une suite, depuis le rang p jusqu'au rang q

Les symboles pour une somme et pour un produit sont des lettres grecques, respectivement Sigma majuscule et Pi majuscule.

Exemple 14

Soit $u_n = 2n+3$

$$\sum_{k=10}^{13} u_k = \sum_{k=10}^{13} (2k+3) = (2\cdot 10+3)+(2\cdot 11+3)+(2\cdot 12+3)+(2\cdot 13+3) = 23+25+27+29 = 104$$

$$\prod_{k=5}^{7} u_k = \prod_{k=5}^{7} (2k+3) = (2\cdot 5+3)\cdot(2\cdot 6+3)\cdot(2\cdot 7+3) = 13\cdot 15\cdot 17 = 3315$$

Exercice 20 Calculer

a) $\sum_{k=7}^{10} 3k$

b) $\prod_{k=4}^{6} 5k$

c) $\sum_{j=5}^{7} \frac{(-1)^j}{3j^2-1}$

d) $\prod_{j=6}^{9} \frac{j^2}{2j+5}$

e) $\sum_{k=1}^{5} k$

f) $\prod_{k=1}^{5} k$

*

À partir d'une suite u_k , on peut construire les suites :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$$

Les premiers termes de S_n sont :

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

Les premiers termes de P_n sont :

$$P_1 = u_1$$
$$P_2 = u_1 \cdot u_2$$
$$P_3 = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$$
$$P_4 = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4$$

Exemple 15

Partons de $u_n = n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} k$	$P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{n} k$
$S_1 = 1$ $S_2 = 1+2=3$ $S_3 = 1+2+3=6$ $S_4 = 1+2+3+4=10$ $S_5 = 1+2+3+4+5=15$	$P_1 = 1$ $P_2 = 1 \cdot 2 = 2$ $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Dans cet exemple,
S_n s'appelle un nombre triangulaire,
P_n s'appelle la factorielle de n, qui est généralement notée **n!**

Pourquoi S_n s'appelle-t-il un nombre triangulaire ? Simple :

☺	1 +	
☺ ☺	2 +	
☺ ☺ ☺	3 +	
☺ ☺ ☺ ☺	4 +	
☺ ☺ ☺ ☺ ☺	5 =	15

Cherchons une formule pour le centième nombre triangulaire.

Écrivons la somme deux fois, une fois à l'endroit, une fois à l'envers :

À l'endroit	1	+	2	+	3	+	...	+	98	+	99	+ 100
À l'envers	100	+	99	+	98	+	...	+	3	+	2	+ 1
Addition par colonnes	101		101		101		...		101		101	101

Donc deux fois S_{100} donne cent fois 101, c'est-à-dire :

$$2 \cdot S_{100} = 100 \cdot 101$$
$$S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Plus généralement, nous obtenons la formule suivante pour un nombre triangulaire :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>Exercice 21 *</u>

Calculer : 6! 10! 15! 69! 70!

<u>Exercice 22 *</u>

381'501 est un nombre triangulaire. Quel est son rang ?

<u>Exercice 23</u>

Soit $u_n = 2n - 1$ la suite des nombres impairs : 1 3 5 7 9 etc.

Donner les 4 premiers termes de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et les 4 premiers termes de $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$

*

Il est parfois possible de trouver une formule explicite
pour le terme général de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ ou pour le terme général de $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.

Exemple 16

Soit $u_n = 2n$ la suite des nombres pairs : 2 4 6 8 10 etc.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{n} 2k = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot\ldots\cdot(2\cdot n) = 2^n\cdot n!$$

Exemple 17

Soit $v_n = 2n-1$ la suite des nombres impairs : 1 3 5 7 9 etc.

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$$

$$\prod_{k=1}^{n} v_k = \prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1) = \frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$$

Exercice 24 *

Compléter les phrases suivantes :

La somme des nombres pairs, depuis 2 jusqu'à ...., est égale à 160'400.

La somme des nombres impairs, depuis 1 jusqu'à ...., est égale à 485'809.

Exercice 25 *

Soit $w_n = 10^{2n-1}$

a) Calculer $\sum_{k=1}^{5} w_k$

b) Trouver une formule pour $\prod_{k=1}^{n} w_k$

*

Que vaut la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ?

Soit $u_n = A \cdot n + B$. Nous avons :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (Ak+B) = A \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} B = A \cdot \frac{n(n+1)}{2} + nB$$

Cette formule peut être simplifiée de deux manières :

$\boxed{S_n = \frac{An^2 + (A+2B)n}{2}}$ ♪ ou $\boxed{S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}}$ ♫

Exemple 18

$$\sum_{k=1}^{n} (3k+8) = \frac{3n^2 + (3+2 \cdot 8)n}{2} = \frac{3n^2 + 19n}{2}$$

Exemple 19

Quelle est la somme des 58 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 4, sachant que le 1er terme vaut $u_1 = 12$?

Nous avons $u_n = b + a \cdot (n-1)$, avec $a = 4$ et $b = 12$

Calculons $u_{58} = 12 + 4 \cdot (58-1) = 240$

La formule ♫ nous dit que : $S_{58} = \frac{58(12+240)}{2} = 7308$

Exemple 20

Calculer 7 + 11 + 15 + ... + 247 + 251

Appelons u_n la suite arithmétique des termes dont nous voulons calculer la somme.

La raison vaut $a = u_2 - u_1 = 11 - 7 = 4$ et nous avons $b = 7$

Donc $u_n = b + a \cdot (n-1) = 7 + 4 \cdot (n-1) = 4n + 3$

Le rang de 251 est la solution de l'équation $4n + 3 = 251$. On trouve $n = \frac{251-3}{4} = 62$

La formule ♫ nous dit que : $S_{62} = \frac{62(7+251)}{2} = 7998$

Si nous préférons utiliser la formule ♪, elle nous donne : $S_{62} = \frac{4 \cdot 62^2 + (4 + 2 \cdot 3) \cdot 62}{2} = 7998$

Exercice 26 Calculer

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-13)$

b) $\sum_{k=1}^{119}(-7k+4)$

c) $\sum_{k=1}^{62}(\frac{k}{4}+3)$

d) $\sum_{k=1}^{100}(\frac{7-3k}{5})$

e) La somme des 98 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2.5 et de premier terme égal à 14.

f) La somme des 119 premiers termes d'une suite arithmétique de raison −3 et de premier terme égal à 8.

g) La somme des 237 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 0.45 et de premier terme égal à 6.35.

h) 18 + 23 + 28 + 33 + 38 + 43 + 48 + 53 + 58

i) 90 + 91 + 92 + ... + 149 + 150

j) 20 + 28 + 36 + ... + 404 + 412

k) 924 + 906 + 888 + ... − 2892 − 2910

l) −2.47 + 0.67 + 3.81 + ... + 289.55 + 292.69

m) La somme des 592 premiers termes d'une suite arithmétique
dont le terme de rang 277 vaut 19 et dont le terme de rang 317 vaut 20.

Exercice 27 *

a) Trouver une formule pour le terme général d'une suite arithmétique
dont le terme de rang 82 vaut 606
et dont la somme des 423 premiers termes vaut 652'266.

b) Trouver une formule pour le terme général d'une suite arithmétique
dont la somme des 93 premiers termes vaut −15'159
et dont la somme des 257 premiers termes vaut −115'650

*

Que vaut la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ?

Soit $u_n = b \cdot a^{n-1}$. Nous avons :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (b \cdot a^{k-1}) = b \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} = \frac{b}{1-a} \sum_{k=1}^{n} (1-a) a^{k-1} = \frac{b}{1-a} \sum_{k=1}^{n} (a^{k-1} - a^k)$$

$$= \frac{b}{1-a}((a^0 - a^1) + (a^1 - a^2) + (a^2 - a^3) + \ldots + (a^{n-1} - a^n)) = \frac{b}{1-a}(a^0 - a^n) = \frac{b(1-a^n)}{1-a}$$

En résumé :

$$\boxed{S_n = \frac{b(1-a^n)}{1-a}}$$

Exemple 21

$$\sum_{k=1}^{n} 4 \cdot 3^{k-1} = \frac{4(1-3^n)}{1-3} = \frac{4(1-3^n)}{-2} = -2(1-3^n) = 2(3^n - 1)$$

Exemple 22

$$\sum_{k=1}^{10} 7 \cdot 0.5^{k-1} = \frac{7(1-0.5^{10})}{1-0.5} = \frac{7(1-0.5^{10})}{0.5} = 14(1-0.5^{10}) = 13.9863$$

Exemple 23

Calculer $8 + 12 + 18 + \ldots + \frac{59'049}{128} + \frac{177'147}{256}$

La raison vaut $a = \frac{12}{8} = 1.5$ et nous avons $b = 8$.

Il reste à trouver le rang de $\frac{177'147}{256}$.

Il faut résoudre l'équation $8 \cdot 1.5^{n-1} = \frac{177'147}{256}$. Cela donne :

$1.5^{n-1} = \frac{177'147}{256} / 8 = \frac{177'147}{2048}$, d'où $n - 1 = \log_{1.5}(\frac{177'147}{2048}) = \frac{\log(\frac{177'147}{2048})}{\log(1.5)} = 11$

Ainsi $n = 12$

Et donc $8 + 12 + 18 + \ldots + \frac{59'049}{128} + \frac{177'147}{256} = \frac{8(1-1.5^{12})}{1-1.5} = 2'059.9414$

Exercice 28 Calculer

a) $\sum_{k=1}^{n} 20\cdot 6^{k-1}$

b) $\sum_{k=1}^{567} 3\cdot(-1)^{k-1}$

c) La somme des 9 premiers termes d'une suite géométrique de raison 10 et de premier terme égal à 6.

d) La somme des 9 premiers termes d'une suite géométrique de raison 0.1 et de premier terme égal à 8.

e) $7+14+28+...+117'440'512+234'881'024$

f) $25+10+4+...+\frac{32'768}{1'220'703'125}+\frac{65'536}{6'103'515'625}$

g) $1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+...+\frac{1}{7^{58}}+\frac{1}{7^{59}}$

h) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{16'384}+\frac{1}{32'768}$

Exercice 29 *

Considérons la formule $\sum_{k=1}^{n} b\cdot a^{k-1}=\frac{b(1-a^n)}{1-a}$. Supposons $|a|<1$

En pareil cas, si n → ∞, alors $a^n \to 0$. Et la formule devient une somme infinie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b\cdot a^{k-1}=\frac{b}{1-a}$$

Appliquer cette formule au calcul de :

a) $1+0.2+0.2^2+0.2^3+...$

b) $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+...$

c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$

d) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...$

e) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...$

6. Problèmes sur les suites arithmétiques et géométriques

Jusqu'à présent, toutes les suites considérées dans ce cours commençaient au rang 1. Cependant il est parfois utile de partir du rang 0, surtout quand on s'intéresse à des lois exponentielles. Ainsi, la formule des intérêts composés :

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

définit une suite géométrique de raison $1+i$, qui démarre à C_0 :

C_0 $C_1 = C_0 \cdot (1+i)$ $C_2 = C_1 \cdot (1+i)$ $C_3 = C_2 \cdot (1+i)$ etc.

Cette formule peut d'ailleurs aussi s'appliquer à la croissance (si $i > 0$) ou à la décroissance (si $0 > i > -1$) de grandeurs très diverses (en physique, chimie, biologie, économie, géographie, etc.).

Exemple 24

Une population initiale de 10^8 bactéries augmente avec un taux journalier de 20%. Quelle taille atteindra cette population au bout d'une semaine ?

Le modèle des cette croissance est une suite géométrique de raison $1+i = 1+20\% = 1+\frac{20}{100} = 1.2$.

Nous connaissons le terme de rang 0 : $C_0 = 10^8$ et nous voulons calculer C_7 .

La formule $C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$ livre : $C_7 = 10^8 \cdot 1.2^7 = 358'318'080$

Exercice 30

Combien une pendule sonne-t-elle de coups en 24 heures si elle ne sonne que les heures ?

Exercice 31

La première marche qui donne accès à une église a une largeur de 20 mètres. Les autres diminuent régulièrement de 70 cm. La dernière a 8.10 mètres de largeur. Combien l'escalier a-t-il de marches ?

Exercice 32

Le roi de Suède jette à la mer 6 lingots d'or. Puis, chaque jour, il double le nombre de lingots d'or jetés à la mer. Au bout de trois semaines, combien de lingots d'or a-t-il en tout jetés à la mer ?

Exercice 33

Chaque fois qu'il reçoit un coup, le boxeur Max perd 2 % des illusions qu'il lui reste. Sachant qu'il avait 50'000 illusions avant d'être frappé une première fois, combien d'illusions conserve-t-il après 46 coups ?

Exercice 34

Pour faire creuser un puits de 29 mètres de profondeur, on a donné à l'entrepreneur 300 francs pour le premier mètre, 450 francs pour le second, 600 francs pour le troisième, etc. Quelle somme totale lui a-t-on versée ?

Exercice 35 *

Dans une fête en plein air, on organise une course aux œufs. Sur la ligne de départ est disposé pour chaque concurrent un panier contenant 12 œufs. La compétition consiste à placer le plus rapidement possible chacun des œufs dans des coquetiers disposés de 5 mètres en 5 mètres, le premier coquetier se trouvant à 20 mètres de la ligne de départ. La règle du jeu interdit de prendre plus d'un œuf à la fois. Quelle distance totale doit parcourir chaque concurrent ?

Exercice 36

La bibliothèque de Babel comporte 886'114 livres au premier étage. Chaque fois qu'on monte d'un étage, le nombre de livres diminue de 999. Au dernier étage, il n'y a plus qu'un seul livre. Combien de livres en tout contient cette bibliothèque ? Précisons que le rez-de-chaussée, siège de l'administration, est dépourvu de livres.

Exercice 37

Sur une île déserte, Robinson dispose de 6 tonneaux contenant chacun 50 litres de rhum sans alcool. Robinson boit chaque jour 0.4 % de la quantité de rhum qu'il reste à son réveil. Combien de litres de rhum reste-t-il au bout de 365 jours (en négligeant l'évaporation) ?

Exercice 38

Le premier jour de son activité, un tueur de moustiques extermine 12 moustiques. Puis il tue chaque jour 46 moustiques de plus que le jour précédent. Combien de jours lui sont nécessaires pour cumuler 19'024 victimes ?

Exercice 39 *

Dans un disque de rayon 1, on inscrit un carré. Dans ce carré, on inscrit un disque ; dans celui-ci, on inscrit un nouveau carré, et ainsi de suite. En appliquant ce procédé à l'infini, calculer :

a) la somme infinie des aires des disques
b) la somme infinie des aires des carrés

7. Le problème de l'induction

Pour chacune des suites ci-dessous, quel est le dixième terme ?

a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b)	2	4	6	8	10	12	14	16	18
c)	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Vous avez probablement répondu :

a) 10

b) 20

c) 34

Pourquoi pas ? Mais aurions-nous pu répondre :

a) 74

b) 37

c) 100

Tout à fait ! Voulez-vous des formules qui correspondent à ces réponses ? En voici :

a) $$n+\frac{64}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$$

b) $$2n+\frac{17}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$$

c) $$3n+4+\frac{66}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$$

De même, si je veux une formule vérifiant les conditions suivantes :

$u_n=n^2$ pour n variant de 1 à 999 et $u_{1000}=1'000'273$,

je peux choisir : $u_n=n^2+\frac{273}{999!}\prod_{k=1}^{999}(n-k)$

*

Voulons-nous une formule qui donne

les termes d'une suite arithmétique jusqu'au rang 999'999'999,

puis les termes d'une suite géométrique à partir du rang 1'000'000'000 ?

C'est possible.

La suite : $v_n = 0.5[(1-\frac{\sqrt{(n-10^9+0.5)^2}}{n-10^9+0.5})(2n-1)+(1+\frac{\sqrt{(n-10^9+0.5)^2}}{n-10^9+0.5})10^{-n\cdot 10^{-8}}]$ donne :

$2n-1$ pour n variant de 1 à 999'999'999 et $10^{-n\cdot 10^{-8}}$ pour n ≥ 1'000'000'000

Bref, elle donne les nombres impairs :

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 etc.

jusqu'à $v_{999'999'999} = 1'999'999'997$,

puis elle passe brusquement à :

$$v_{1'000'000'000} = 0.000'000'000'1$$

*

Est-il toujours possible de trouver une formule qui corresponde aux m premiers termes d'une suite, quelle que soit la valeur de m et quels que soient ces termes ?
La réponse est oui.

Une formule de Newton (dite d'<u>interpolation polynomiale</u>) permet de généraliser le procédé vu pour les suites quadratiques. Examinons cette formule sur un exemple.

À partir d'une suite dont nous connaissons les six premiers termes, construisons les différences, puis les différences de différences, puis les différences de différences de différences, etc.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
11	21	55	125	243	421

10 34 70 118 178

24 36 48 60

12 12 12

0 0

0

Posons : $\alpha_0 = u_1 = 11$
α_1 = 1er nombre de la 1re ligne de différences = 10
α_2 = 1er nombre de la 2e ligne de différences = 24
α_3 = 1er nombre de la 3e ligne de différences = 12
etc.

La formule :

$$u_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}(n-1) + \frac{\alpha_2}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{\alpha_3}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) + \ldots \qquad \text{(avec } n \geq 1\text{)}$$

donne tous les termes du tableau.

Dans cet exemple, cette formule devient :

$$u_n = 11 + 10(n-1) + \frac{24}{2}(n-1)(n-2) + \frac{12}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = 2n^3 - 4n + 13$$

Si, maintenant, nous voulons prolonger la suite par un septième terme quelconque $u_7 = T$, nous pouvons prendre la formule suivante :

$$u_n = 2n^3 - 4n + 13 + \frac{(T-671)}{6!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$$

où 671 est la valeur de $2n^3 - 4n + 13$ pour $n = 7$.

Cela signifie que, si nous connaissons les m premiers termes d'une suite, il est possible de la prolonger n'importe comment et nous disposons d'une infinité de formules polynomiales pour le faire.

À un autre niveau, celui de l'épistémologie, nous pouvons dire que, pour rendre compte en science d'un nombre fini de données, il existe une infinité de modèles possibles.

C'est le problème de l'induction, étudié par des philosophes comme Sextus Empiricus, David Hume, Nelson Goodman, Karl Popper, Willard Van Orman Quine, etc.

À la question : « Quel terme prolonge la suite 2, 4, 6, 8, 10, ... ? », il est important de comprendre que <u>12 n'est pas la bonne réponse</u>, tant que nous n'avons aucune information sur la nature de la suite.

Pour cela, l'histoire de la dinde de Russell est exemplaire. Une dinde est toute joyeuse, car elle constate que sa ration de nourriture augmente chaque jour. Dans sa conscience de dinde, elle se dit (je traduis en français pour ceux qui ne connaissent pas la langue dinde) : « L'expérience me confirme une loi générale : ma quantité de nourriture augmente chaque jour. Donc, demain, je recevrai davantage de nourriture qu'aujourd'hui. » Eh bien non ! car le lendemain, c'est Noël et la dinde est tuée pour être mangée...

Trouver un terme général possible pour une suite dont les cinq premiers termes sont :
2, 4, 6, 8, 10

Voici de nombreuses réponses intéressantes.

<u>Suite presque partout nulle</u> :

$$u_n = \begin{cases} 2 & si \quad n=1 \\ 4 & si \quad n=2 \\ 6 & si \quad n=3 \\ 8 & si \quad n=4 \\ 10 & si \quad n=5 \\ 0 & si \quad n>5 \end{cases}$$

<u>Suite périodique</u> :

$$u_n = \begin{cases} 2 & si \quad n \equiv 1 \pmod 5 \\ 4 & si \quad n \equiv 2 \pmod 5 \\ 6 & si \quad n \equiv 3 \pmod 5 \\ 8 & si \quad n \equiv 4 \pmod 5 \\ 10 & si \quad n \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$$

<u>Suite polynomiale</u>, par exemple :

$$u_n = 2n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

<u>Suite exponentielle</u>, par exemple :

$$u_n = \left(\frac{-16}{135}\right) \cdot 2^{n-1} + \left(\frac{31}{8}\right) \cdot 3^{n-1} + \left(\frac{-23}{9}\right) \cdot 5^{n-1} + \left(\frac{17}{20}\right) \cdot 7^{n-1} + \left(\frac{-11}{216}\right) \cdot 11^{n-1}$$

*

La réalité scolaire fait que vous serez peut-être amenés dans un examen à devoir résoudre des tâches telles que :

Soit la suite u_n dont les 5 premiers termes sont :

7	10	13	16	19

Trouver le terme général de cette suite.

Il y a une infinité de réponses possibles. Mais, dans le cadre scolaire qui est le nôtre, il est attendu de vous une exploration restreinte aux types de suites que nous avons étudiées, à savoir les suites arithmétiques et géométriques.

Ainsi, dans la suite ci-dessus, le but est :

de constater que la différence de deux termes consécutifs vaut 3 ;
d'en induire que u_n est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 7 ;
de livrer la formule : $u_n = 7 + 3 \cdot (n-1) = 3n + 4$.

Exercice 40

Pour chacune des suites ci-dessous, dont sont donnés les cinq premiers termes, trouver le terme général en restreignant l'exploration aux suites arithmétiques et géométriques.

a)	16	24	36	54	81
b)	1'250	500	200	80	32
c)	−7	−3	1	5	9
d)	11	−26	−63	−100	−137
e)	−53	−45	−37	−29	−21
f)	5	−15	45	−135	405
g)	−4	−6	−9	−13.5	−20.25
h)	128	64	0	−64	−128
i)	128	64	32	16	8
j)	−128	64	−32	16	−8
k)	−3	75	153	231	309
l)	1'250	250	50	10	2

Solutions

Exercice 1

a)

$u_1=-1$	$u_2=3$	$u_3=7$	$u_{10}=35$
$v_1=-1$	$v_2=-1$	$v_3=1$	$v_{10}=71$
$w_1=982.\overline{3}$	$w_2=774$	$w_3=649$	$w_{10}=357.\overline{3}$
$x_1=1.2$	$x_2=1.44$	$x_3=1.728$	$x_{10}\approx 6.192$
$y_1=32$	$y_2\approx 32.414$	$y_3\approx 32.732$	$y_{10}\approx 34.162$
$z_1=1.9$	$z_2=-1.99$	$z_3=1.999$	$z_{10}=-1.9999999999$

b)

$649=4n-5 \qquad n=\frac{649+5}{4}=163.5$

n n'est pas entier, donc 649 n'appartient pas à la suite u_n

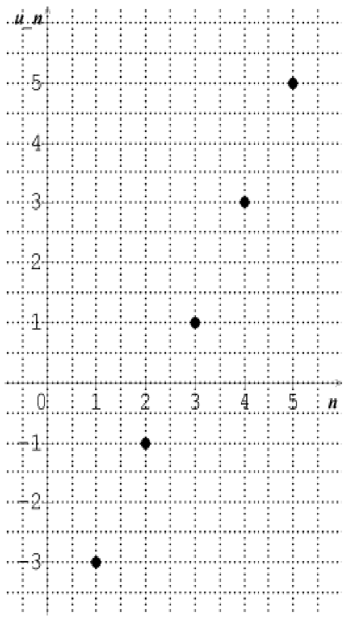
$649=1.2^n \qquad n=\frac{\log(649)}{\log(1.2)}\approx 35.517$

n n'est pas entier, donc 649 n'appartient pas à la suite x_n

$649=\sqrt{n}+31 \qquad n=(649-31)^2=381'924$

le rang de 649 dans y_n est 381'924

Exercice 2 *



Exercice 3

a) $x_1 = 4$ $x_2 = -2.25$ $x_3 = 7.\overline{1}$

b) $y_1 = 5$ $y_2 = 8$ $y_3 = 5$

Exercice 4 * *Suite chaotique*

Avec la calculatrice Casio fx-92, on trouve :

a) $z_{10} \approx 0.537949$ avec la condition initiale $z_1 = 0.100$

b) $z_{10} \approx 0.149992$ avec la condition initiale $z_1 = 0.101$

Exercice 5 * *Nombre d'or*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	2	1.5	1.667	1.6	1.625	1.615	1.619	1.6176	1.6182	1.6180	1.6181	1.6180
v_n	2	1.732	1.653	1.629	1.621	1.619	1.6184	1.6181	1.6181	1.6180	1.6180	1.6180

Exercice 6

n	1	2	3	4	5
u_n	4	13	4.05	2.976667	1.074683
v_n	5	–7	1.871429	5.003711	5.336129

Exercice 7

$$u_{58} = (58+3)u_{58-1} + 4 \cdot 58 = 61 u_{57} + 232 = 61 \cdot 18 + 232 = 1330$$

$u_{57} = (57+3)u_{57-1} + 4 \cdot 57 = 60 u_{56} + 228$ donc $u_{56} = \dfrac{u_{57} - 228}{60} = \dfrac{18-228}{60} = -3.5$

Exercice 8 *

$$u_1 = 2 \cdot 3^1 - 1 = 5$$

$3 u_{n-1} + 2 = 3 \cdot (2 \cdot 3^{n-1} - 1) + 2 = 2 \cdot 3^n - 3 + 2 = 2 \cdot 3^n - 1 = u_n$ Oui.

Exercice 9 *

$$u_1 = 2^{1+1} - 3 = 1$$

$2 u_{n-1} + 3 = 2 \cdot (2^n - 3) + 3 = 2^{n+1} - 6 + 3 = 2^{n+1} - 3 = u_n$ Oui

Exercice 10

a)	raison = 5	terme suivant = 26
b)	raison = 37	terme suivant = 166
c)	raison = −13	terme suivant = 36
d)	raison = 32	terme suivant = −33
e)	raison = −23	terme suivant = −181
f)	raison = −2	terme suivant = −5
g)	raison = 1/3	terme suivant = 16/3
h)	raison = −2/7	terme suivant = 285/7
i)	raison = 2.7	terme suivant = 29
j)	raison = −18.4	terme suivant = −61.6

Exercice 11

$u_n=100-17\cdot(n-1)$

$u_{412}=100-17\cdot(412-1)=-6887$

$u_n=100-17\cdot(n-1)=-937$ donne $n=\dfrac{-937-100}{-17}+1=62$

Exercice 12

$v_n=6.5+0.25\cdot(n-1)$

$v_{169}=6.5+0.25\cdot(169-1)=48.5$

$v_n=6.5+0.25\cdot(n-1)=220$ donne $n=\dfrac{220-6.5}{0.25}+1=855$

Exercice 13

$w_n=-4.6-3.2\cdot(n-1)$

$w_{294}=-4.6-3.2\cdot(294-1)=-942.2$

$w_n=-4.6-3.2\cdot(n-1)=-1451$ donne $n=\dfrac{-1451+4.6}{-3.2}+1=453$

Exercice 14

$a=\dfrac{x_{139}-x_{53}}{139-53}=-3.5$ $b=x_{53}-a\cdot(53-1)=1067$ $x_n=1067-3.5\cdot(n-1)$

$x_{916}=1067-3.5\cdot(916-1)=-2135.5$

Exercice 15

$a=\frac{y_{244}-y_{119}}{244-119}=0.0052$ $b=y_{119}-a\cdot(119-1)=0.3864$ $y_n=0.3864+0.0052\cdot(n-1)$

$y_{73}=0.3864+0.0052\cdot(73-1)=0.7608$

Exercice 16

a) raison = 10 terme suivant = 60’000
b) raison = 1/3 terme suivant = 16/3
c) raison = 7 terme suivant = −37’815.75
d) raison = −0.5 terme suivant = 45.5

Exercice 17

$u_n=0.07\cdot 2^{n-1}$ $u_{16}=0.07\cdot 2^{16-1}=2'293.76$

$u_n=0.07\cdot 2^{n-1}=4'697'620.48$ donne $n=1+\log_2(\frac{4'697'620.48}{0.07})=27$

Exercice 18

$v_n=1000\cdot 0.2^{n-1}$ $v_{18}=1000\cdot 0.2^{18-1}=1.31072\cdot 10^{-9}$

$v_n=1000\cdot 0.2^{n-1}=\frac{8}{48'828'125}$ donne $n=1+\log_{0.2}(\frac{\frac{8}{48'828'125}}{1000})=15$

Exercice 19

$a=\sqrt[26-21]{\frac{w_{26}}{w_{21}}}=\sqrt[5]{\frac{w_{26}}{w_{21}}}=-0.5$ $b=\frac{w_{21}}{a^{21-1}}=786'432$ $w_n=786'432\cdot(-0.5)^{n-1}$

$w_{50}=786'432\cdot(-0.5)^{50-1}\approx-1.39698\cdot 10^{-9}$

Exercice 20

a) $\sum_{k=7}^{10} 3k = 3\cdot7+3\cdot8+3\cdot9+3\cdot10 = 102$

b) $\prod_{k=4}^{6} 5k = 5\cdot4\cdot5\cdot5\cdot5\cdot6 = 15'000$

c) $\sum_{j=5}^{7} \frac{(-1)^j}{3j^2-1} = \frac{(-1)^5}{3\cdot5^2-1}+\frac{(-1)^6}{3\cdot6^2-1}+\frac{(-1)^7}{3\cdot7^2-1} = \frac{-1}{74}+\frac{1}{107}+\frac{-1}{146} \approx -0.011017$

d) $\prod_{j=6}^{9} \frac{j^2}{2j+5} = \frac{6^2}{2\cdot6+5}\cdot\frac{7^2}{2\cdot7+5}\cdot\frac{8^2}{2\cdot8+5}\cdot\frac{9^2}{2\cdot9+5} = \frac{36}{17}\cdot\frac{49}{19}\cdot\frac{64}{21}\cdot\frac{81}{23} \approx 58.615695$

e) $\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15$

f) $\prod_{k=1}^{5} k = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$

Exercice 21 *

6! = 720 10! = 3’628’800 15! = $1.30767 \cdot 10^{12}$
69! = $1.71122 \cdot 10^{98}$ 70! = $1.19786 \cdot 10^{100}$

Exercice 22 *

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = 381'501$ $\qquad n^2+n-763'002 = 0$

La résolution donne : n = 873 ou n = –874. Le rang est donc 873.

Exercice 23

$S_1 = 1$ $\qquad S_2 = 1+3 = 4$ $\qquad S_3 = 1+3+5 = 9$ $\qquad S_4 = 1+3+5+7 = 16$

$P_1 = 1$ $\qquad P_2 = 1\cdot3 = 3$ $\qquad P_3 = 1\cdot3\cdot5 = 15$ $\qquad P_4 = 1\cdot3\cdot5\cdot7 = 105$

Exercice 24 *

La somme des nombres pairs, depuis 2 jusqu’à ....800.........., est égale à 160’400.

La somme des nombres impairs, depuis 1 jusqu’à ....1393........., est égale à 485’809.

Exercice 25 *

a) $\sum_{k=1}^{5} w_k = 10+10^3+10^5+10^7+10^9 = 1'010'101'010$

b) $\prod_{k=1}^{n} w_k = \prod_{k=1}^{n} 10^{2k-1} = 10^{\sum_{k=1}^{n} 2k-1} = 10^{(n^2)}$

Exercice 26

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-13)=\frac{2n^2+(2+2\cdot(-13))n}{2}=\frac{2n^2-24n}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{119}(-7k+4)=\frac{-7\cdot 119^2+(-7+2\cdot 4)\cdot 119}{2}=-49'504$

c) $\sum_{k=1}^{62}(\frac{k}{4}+3)=\frac{0.25\cdot 62^2+(0.25+2\cdot 3)\cdot 62}{2}=674.25$

d) $\sum_{k=1}^{100}(\frac{7-3k}{5})=\sum_{k=1}^{100}(-0.6k+1.4)=\frac{-0.6\cdot 100^2+(-0.6+2\cdot 1.4)\cdot 100}{2}=-2'890$

e) La somme des 98 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2.5 et de premier terme égal à 14.

$u_1=14$ $u_n=14+2.5\cdot(n-1)$ $u_{98}=14+2.5\cdot(98-1)=256.5$

$S_{98}=\frac{98\cdot(14+256.5)}{2}=13'254.5$

f) La somme des 119 premiers termes d'une suite arithmétique de raison −3 et de premier terme égal à 8.

$u_1=8$ $u_n=8-3\cdot(n-1)$ $u_{119}=8-3\cdot(119-1)=-346$

$S_{119}=\frac{119\cdot(8-346)}{2}=-20'111$

g) La somme des 237 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 0.45 et de premier terme égal à 6.35.

$u_1=6.35$ $u_n=6.35+0.45\cdot(n-1)$ $u_{237}=6.35+0.45\cdot(237-1)=112.55$

$S_{237}=\frac{237\cdot(6.35+112.55)}{2}=14'089.65$

h) 18 + 23 + 28 + 33 + 38 + 43 + 48 + 53 + 58

$u_1=18$ $u_9=58$ $S_9=\frac{9\cdot(18+58)}{2}=342$

i) 90 + 91 + 92 + ... + 149 + 150

$u_1 = 90 \qquad u_{61} = 150 \qquad S_{61} = \frac{61 \cdot (90 + 150)}{2} = 7'320$

j) 20 + 28 + 36 + ... + 404 + 412

$b = u_1 = 20 \qquad a = 28 - 20 = 8 \qquad u_n = b + a \cdot (n-1) = 20 + 8 \cdot (n-1) = 8n + 12$

$8n + 12 = 412$ donne $n = \frac{412 - 12}{8} = 50$

$S_{50} = \frac{50 \cdot (20 + 412)}{2} = 10'800$

k) 924 + 906 + 888 + ... − 2892 − 2910

$b = u_1 = 924 \qquad a = 906 - 924 = -18 \qquad u_n = b + a \cdot (n-1) = 924 - 18 \cdot (n-1) = -18n + 942$

$-18n + 942 = -2910$ donne $n = \frac{-2910 - 942}{-18} = 214$

$S_{214} = \frac{214 \cdot (924 - 2910)}{2} = -212'502$

l) −2.47 + 0.67 + 3.81 + ... + 289.55 + 292.69

$b = u_1 = -2.47 \qquad a = 0.67 - (-2.47) = 3.14$

$u_n = b + a \cdot (n-1) = -2.47 + 3.14 \cdot (n-1) = 3.14n - 5.61$

$3.14n - 5.61 = 292.69$ donne $n = \frac{292.69 + 5.61}{3.14} = 95$

$S_{95} = \frac{95 \cdot (-2.47 + 292.69)}{2} = 13'785.45$

m) La somme des 592 premiers termes d’une suite arithmétique
dont le terme de rang 277 vaut 19 et dont le terme de rang 317 vaut 20.

$a = \frac{u_{317} - u_{277}}{317 - 277} = 0.025 \qquad b = u_{277} - a \cdot (277 - 1) = 12.1 \qquad u_n = 12.1 + 0.025 \cdot (n-1)$

$u_{592} = 12.1 + 0.025 \cdot (592 - 1) = 26.875 \qquad S_{592} = \frac{592 \cdot (12.1 + 26.875)}{2} = 11'536.6$

Exercice 27 *

a) Trouver une formule pour le terme général d'une suite arithmétique
dont le terme de rang 82 vaut 606
et dont la somme des 423 premiers termes vaut 652'266.

Soit $u_n = An + B$. Il faut résoudre le système :

$$\begin{Bmatrix} u_{82} = 606 \\ S_{423} = 652'266 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 82A + B = 606 \\ \dfrac{A \cdot 423^2 + (A + 2B) \cdot 423}{2} = 652'266 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 82A + B = 606 \\ 89'676\,A + 423\,B = 652'266 \end{Bmatrix}$$

On trouve $A = 7.2$ et $B = 15.6$, donc $u_n = 7.2\,n + 15.6$

b) Trouver une formule pour le terme général d'une suite arithmétique
dont la somme des 93 premiers termes vaut −15'159
et dont la somme des 257 premiers termes vaut −115'650

Soit $u_n = An + B$. Il faut résoudre le système :

$$\begin{Bmatrix} S_{93} = -15'159 \\ S_{257} = -115'650 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{A \cdot 93^2 + (A + 2B) \cdot 93}{2} = -15'159 \\ \dfrac{A \cdot 257^2 + (A + 2B) \cdot 257}{2} = -115'650 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 4371\,A + 93\,B = -15'159 \\ 33'153\,A + 257\,B = -115'650 \end{Bmatrix}$$

On trouve $A = -3.5$ et $B = 1.5$, donc $u_n = -3.5\,n + 1.5$

Exercice 28

a) $$\sum_{k=1}^{n} 20\cdot 6^{k-1}=\frac{20\cdot\left(1-6^{n}\right)}{1-6}=-4\cdot\left(1-6^{n}\right)$$

b) $$\sum_{k=1}^{567} 3\cdot(-1)^{k-1}=\frac{3\cdot\left(1-(-1)^{567}\right)}{1-(-1)}=3$$

c) La somme des 9 premiers termes d'une suite géométrique de raison 10 et de premier terme égal à 6.

$$S_9=\frac{6\cdot\left(1-10^{9}\right)}{1-10}=666'666'666$$

d) La somme des 9 premiers termes d'une suite géométrique de raison 0.1 et de premier terme égal à 8.

$$S_9=\frac{8\cdot\left(1-0.1^{9}\right)}{1-0.1}=8.88888888$$

e) $$7+14+28+...+117'440'512+234'881'024$$

$u_n=7\cdot 2^{n-1}=234'881'024$ donne $n=1+\log_2\left(\frac{234'881'024}{7}\right)=26$

$$S_{26}=\frac{7\cdot\left(1-2^{26}\right)}{1-2}=469'762'041$$

f) $$25+10+4+...+\frac{32'768}{1'220'703'125}+\frac{65'536}{6'103'515'625}$$

$u_n=25\cdot 0.4^{n-1}=\frac{65'536}{6'103'515'625}$ donne $n=1+\log_{0.4}\left(\frac{\frac{65'536}{6'103'515'625}}{25}\right)=17$

$$S_{17}=\frac{25\cdot\left(1-0.4^{17}\right)}{1-0.4}\approx 41.66666$$

g) $$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+...+\frac{1}{7^{58}}+\frac{1}{7^{59}}=\frac{1-\frac{1}{7^{60}}}{1-\frac{1}{7}}\approx 1.16666$$

h) $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{16'384}+\frac{1}{32'768}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{2^{15}}=\frac{1-\frac{1}{2^{16}}}{1-\frac{1}{2}}\approx 1.999969$$

Exercice 29 *

a) $1+0.2+0.2^2+0.2^3+...=\frac{1}{1-0.2}=1.25$

b) $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=1.2$

c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

d) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}$

e) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...=\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})}=0.75$

Exercice 30

2 • (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) = 156

Exercice 31

$x_n=20-0.7(n-1)=-0.7n+20.7=8.1$ donne $n=\frac{8.1-20.7}{-0.7}=18$

Exercice 32

$S_{21}=\frac{6\cdot(1-2^{21})}{(1-2)}=12'582'906$

Exercice 33

$50'000\cdot 0.98^{46}\approx 19741$

Exercice 34

$u_1=300$ $u_{29}=300+150\cdot(29-1)=4500$ $S_{29}=\frac{29\cdot(300+4500)}{2}=69'600$

Exercice 35 *

2•(20 + 20 + 5•1 + 20 + 5•2 + 20 + 5•3 + ... + 20 + 5•10) + 20 + 5•11 =
2•(20•11 + 5•(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 10)) + 20 + 5•11 =
2•(220 + 5•55) + 20 + 55 = 1065 mètres

Exercice 36

$b=u_1=886'114 \qquad a=-999 \qquad u_n=b+a\cdot(n-1)=886'114-999\cdot(n-1)=-999n+887'113$

$-999n+887'113=1$ donne $n=\dfrac{1-887'113}{-999}=888$

$S_{888}=\dfrac{888\cdot(886'114+1)}{2}=393'435'060$

Exercice 37

$300\cdot 0.996^{365}\approx 69.467$

Exercice 38

$u_n=12+46\cdot(n-1)=46n-34$

$S_n=19'024$ donne $\dfrac{n\cdot(12+46n-34)}{2}=19'024$. Simplifions cette équation :

$23n^2-11n-19'024=0$ Sa solution positive est $n=29$

Exercice 39 *

a) la somme infinie des aires des cercles $=\dfrac{\pi}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\pi$

b) la somme infinie des aires des carrés $=\dfrac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

Exercice 40

a) $16\cdot 1.5^{n-1}$

b) $1250\cdot 0.4^{n-1}$

c) $-7+4(n-1)$

d) $11-37(n-1)$

e) $-53+8(n-1)$

f) $5\cdot(-3)^{n-1}$

g) $-4\cdot 1.5^{n-1}$

h) $128-64(n-1)$

i) $128\cdot 0.5^{n-1}$

j) $-128\cdot(-0.5)^{n-1}$

k) $-3+78(n-1)$

l) $1250\cdot 0.2^{n-1}$