Pascal Kaeser

Possibilités
Probabilités
Populations

2024

—— Le **Ciel** s'est perdu,
—— mais le corps, pardi,
—— rêve du pardon.

– – La **Terre** est sur l'abscisse,
– – où son obéissance
– – écoute la grossesse.

– – Quand la terreur sépare
– – et les voix vitupèrent,
—— le **Tonnerre** a peur.

—— Le **Vent** cherche un but,
—— compose un stabat
– – que les branches débitent.

– – L'**Eau** n'est pas si tranquille.
—— Un plan, mais lequel ?
– – La sainte est dans la cale.

—— Le **Feu** : plus de trac !
– – Une flamme excentrique
—— est le meilleur truc.

—— Au climax du raid,
– – que la **Montagne** est rude !
– – Sur la face : des rides.

– – À l'heure où l'ombre taxe,
—— le **Lac** boit le Styx
—— au fond d'un vortex.

Les 8 trigrammes du Yi-king sont les arrangements avec répétitions de 3 traits, choisis dans un ensemble de 2 traits : le trait de type Yang (continu) et le trait de type Yin (troué). Ce poème combinatoire est soumis aux contraintes suivantes : un trait de type Yang donne lieu à un vers dont les substantifs sont masculins, dont la syllabe finale est masculine et dont le mètre est impair (5 syllabes) ; un trait de type Yin donne lieu à un vers dont les substantifs sont féminins, dont la syllabe finale est féminine et dont le mètre est pair (6 syllabes) ; les trois vers « riment » par contre-assonances ; le nom du trigramme est mentionné dès que possible dans le tercet.

Table des matières

Partie 1 : Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire étudie comment compter des possibilités. Par exemple :

- Combien y a-t-il de possibilités d'ordonner verticalement 10 livres sur une étagère ?
- Combien y a-t-il de possibilités de tirer (sans remise) 5 cartes d'un jeu de 52, si nous n'attachons pas d'importance à l'ordre de tirage ?
- Combien y a-t-il de résultats ordonnés possibles si on lance 10 fois une pièce de monnaie ?
- Combien y a-t-il de résultats ordonnés possibles si on jette 4 fois un dé à jouer ?
- Combien y a-t-il de possibilités de placer 6 pièces différentes sur un échiquier ?
- Combien y a-t-il de possibilités de sélectionner une patrouille de 3 soldats dans un groupe de 14 ?
- Combien y a-t-il de possibilités de répartir 10 personnes dans 3 salles ?
- Combien y a-t-il de schémas possibles à 3 rimes pour une strophe de 10 vers ?
- Combien y a-t-il de possibilités de former un code à 8 caractères si on dispose d'un alphabet de 64 caractères ?
- Combien y a-t-il de codes génétiques possibles ?
- Combien y a-t-il de possibilités pour une molécule d'alcane ?

*

1.1 Quelques principes simples de dénombrement

Un choix est dit ordonné quand nous décidons de classer les éléments choisis dans un ordre particulier. Le résultat d'un choix ordonné s'appelle une liste.

Exemples 1.1.1

[Bleu ; Blanc ; Rouge] est une liste obtenue en choisissant 3 couleurs.
[Blanc ; Bleu ; Rouge] est une autre liste obtenue en choisissant les mêmes couleurs que précédemment, mais dans un ordre qui n'est pas le même.

BEXEETX est une liste obtenue en choisissant 7 lettres qui ne sont pas toutes distinctes (le E et le X sont répétés).

GH438 est une liste obtenue en choisissant d'abord 2 lettres, puis 3 chiffres.

« Le petit chat est mort » est une liste obtenue en choisissant 5 mots.

[do ; fa ; si ; la ; do ; ré] est une liste obtenue en choisissant 6 notes, dont une est répétée.

*

En un premier temps, nous allons développer des outils pour dénombrer des listes.

Considérons un ensemble Ω formé de 9 symboles :

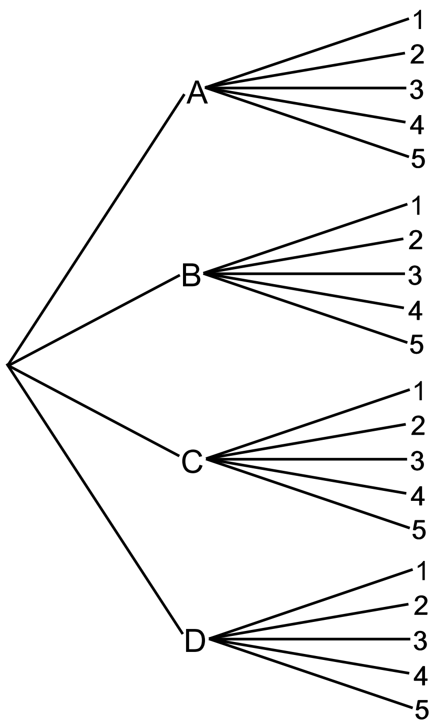
les 4 lettres A, B, C, D et les 5 chiffres 1, 2, 3, 4, 5

Posons-nous plusieurs questions.

Question 1

Si nous voulons former une liste de 2 symboles, le premier étant une lettre et le second étant un chiffre, combien y a-t-il de possibilités ?

Un outil pour nous aider à y voir clair est l'arbre.

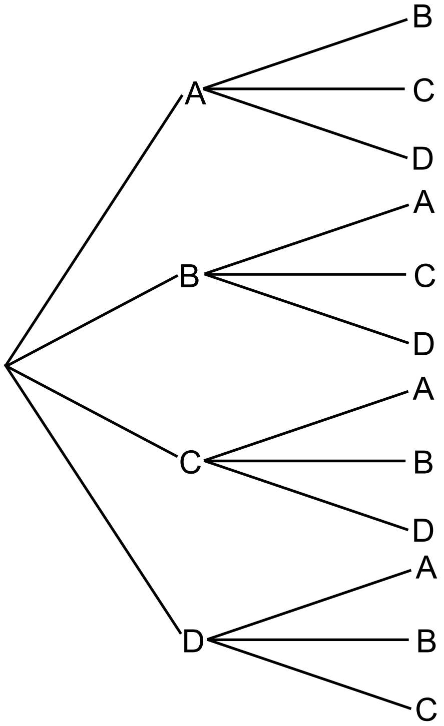


Nous voyons qu'il y a $4 \times 5 = 20$ possibilités, qui sont :

A1, A2, A3, A4, A5
B1, B2, B3, B4, B5
C1, C2, C3, C4, C5
D1, D2, D3, D4, D5

Question 2

Si nous voulons former une liste de 2 lettres différentes, combien y a-t-il de possibilités ?



Nous voyons qu'il y a $4 \times 3 = 12$ possibilités, qui sont :

AB, AC, AD
BA, BC, BD
CA, CB, CD
DA, DB, DC

Un principe se dégage. Si nous voulons former une liste où n_1 possibilités se présentent pour le 1er élément de la liste ; puis, quel que soit le 1er élément choisi, n_2 possibilités se présentent pour le 2e élément de la liste ; puis, quels que soient les 2 éléments choisis avant, n_3 possibilités se présentent pour le 3e élément de la liste ; etc., alors le nombre de listes possibles s'obtient par multiplication :

$$n_1 n_2 n_3 \text{...etc.}$$

Appliquons ce principe à des exemples construits à partir de l'ensemble Ω formé de 9 symboles :

les 4 lettres A, B, C, D et les 5 chiffres 1, 2, 3, 4, 5

Question 3

Si nous voulons former une liste contenant d'abord 2 chiffres différents, puis 3 lettres différentes (par exemple 32DBA), combien y a-t-il de possibilités ?

$$5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 480$$

Question 4

Si nous voulons former une liste de 3 chiffres qui ne sont pas nécessairement différents (par exemple 414), combien y a-t-il de possibilités ?

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

Question 5

Si nous voulons former une liste contenant d'abord 2 lettres qui ne sont pas nécessairement différentes, puis 2 chiffres différents (par exemple CC21), combien y a-t-il de possibilités ?

$$4 \times 4 \times 5 \times 4 = 320$$

*

Exercice 1.1.1

On lance d'abord une pièce de monnaie, puis un dé. Dessiner un arbre pour représenter toutes les listes de résultats. Combien y en a-t-il ?

Exercice 1.1.2

Un code est formé d'une voyelle (a, e, i, o, u, y), suivie d'une consonne. Combien de possibilités ?

Exercice 1.1.3

Jean doit s'habiller pour sortir. Il veut mettre d'abord un pantalon, puis un pull. Il possède 6 pantalons et 15 pulls. Combien de possibilités ?

Exercice 1.1.4

Dessiner un arbre pour représenter toutes les listes de 3 lettres distinctes, en prenant seulement les lettres A, B, C. Combien de possibilités ?

Exercice 1.1.5

Un sac contient quatre jetons. Sur chaque jeton est imprimé un nombre de points, respectivement : 5, 10, 15, 20. Pafnouti pioche des jetons, mais s'arrête dès que la somme des points atteint ou dépasse 20. Représenter cette expérience par un arbre. Combien y a-t-il de déroulements possibles ?

Exercice 1.1.6

La carte d'un restaurant propose une formule avec un choix de 5 entrées, 3 plats principaux et 8 desserts. Combien de possibilités pour composer un menu comportant une entrée, un plat principal et un dessert ?

Exercice 1.1.7

On tire 2 cartes d'un jeu de 52. Combien de listes possibles ?

Exercice 1.1.8

On lance une pièce de monnaie 2 fois. Combien de possibilités pour les couples (ordonnés) de résultats ? Écrire tous ces couples.

Exercice 1.1.9

On lance une pièce de monnaie 3 fois. Combien de possibilités pour les triplets (ordonnés) de résultats ? Écrire tous ces triplets.

Exercice 1.1.10

On lance un dé 3 fois. Combien de possibilités pour les triplets (ordonnés) de résultats ?

Exercice 1.1.11

Considérons l'ensemble Ω formé des 26 lettres majuscules de l'alphabet et des 10 chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Nous voulons former un code contenant d'abord 3 lettres, puis 5 chiffres. Combien y a-t-il de possibilités :

a) si les symboles doivent être différents ?
b) si les symboles ne doivent pas nécessairement être différents ?
c) si les symboles doivent être différents et si le code doit commencer par la lettre Z et finir par le chiffre 4 ?

Exercice 1.1.12

Un modèle simple, voire simpliste, emploie deux paramètres pour catégoriser le bonheur.

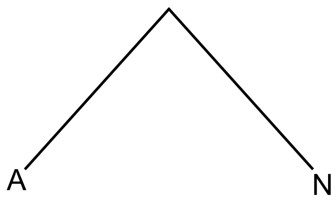
$x = 0$ si extrinsèque
$x = 1$ si intrinsèque

$y = 0$ si excité
$y = 1$ si calme

Représenter sous forme d'un arbre les 4 possibilités de combiner x et y. Trouver des noms qui vous semblent convenir pour caractériser les différentes catégories.

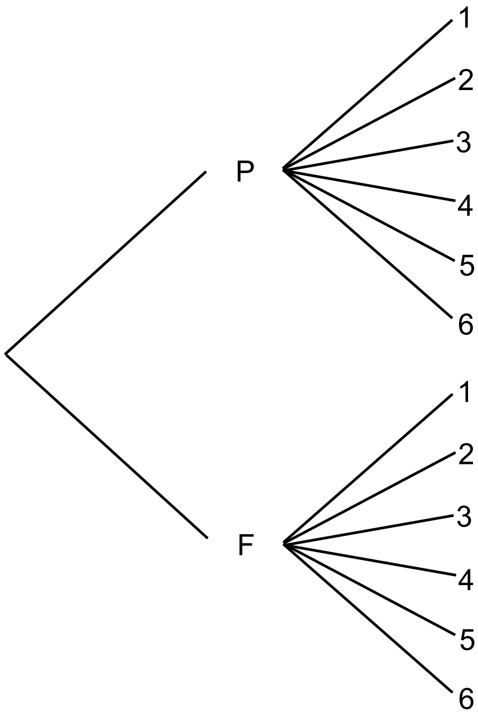
Exercice 1.1.13

Aucassin et Nicolette se lancent un défi au rami. La règle est : « le premier à gagner deux parties de suite ou trois parties en tout aura droit à manger la dernière tranche de tarte aux cerises ». Dessiner un arbre qui donne tous les déroulements possibles de ce défi. Commencer cet arbre par deux traits, l'un avec la lettre A pour symboliser la victoire d'Aucassin lors de la première partie, l'autre avec la lettre N pour symboliser la victoire de Nicolette lors de la première partie. Ajouter des traits et des lettres pour rendre compte des possibilités lors de la deuxième partie, etc.



Solutions

Exercice 1.1.1



$2 \times 6 = 12$ possibilités

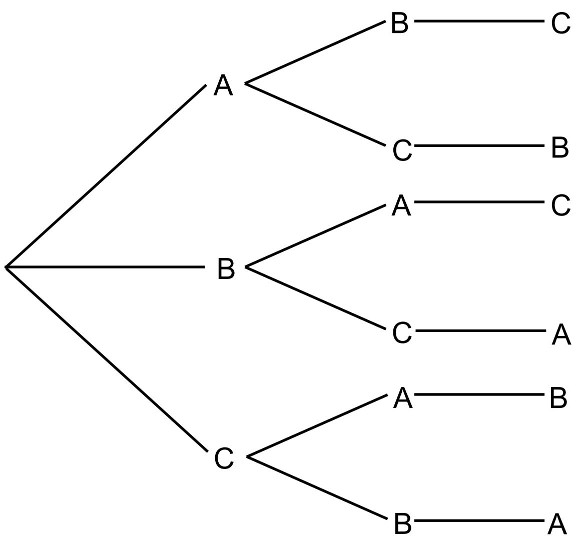
Exercice 1.1.2

$6 \times 20 = 120$

Exercice 1.1.3

$6 \times 15 = 90$

Exercice 1.1.4



Il y a 6 listes possibles qui sont ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA

Exercice 1.1.5

12 déroulements possibles :

5, 10, 15
5, 10, 20
5, 15
5, 20
10, 5, 15
10, 5, 20
10, 15
10, 20
15, 5
15, 10
15, 20
20

Exercice 1.1.6

$$5 \times 3 \times 8 = 120$$

Exercice 1.1.7

$52 \times 51 = 2'652$

Exercice 1.1.8

Notons P pour Pile et F pour Face
PP, PF, FP, FF : 4 possibilités

Exercice 1.1.9

PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF : 8 possibilités

Exercice 1.1.10

$6 \times 6 \times 6 = 216$

Exercice 1.1.11

a) $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 471'744'000$
b) $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1'757'600'000$
c) $1 \times 25 \times 24 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 = 1'814'400$

Exercice 1.1.12

extrinsèque & excité : joie
extrinsèque & calme : contentement
intrinsèque & excité : engagement
intrinsèque & calme : sérénité

Exercice 1.1.13

10 déroulements possibles.

*

L'exercice 1.1.4 illustre une permutation de 3 objets différents, c'est-à-dire le nombre de listes de longueur 3 qu'il est possible d'écrire avec 3 objets différents.

Il y a $3\times2\times1=6$ permutations des lettres ABC. Ce sont :

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA

On note $n!$ le produit de tous les nombres entiers qui descendent un par un de n à 1.
On appelle ce produit *n* factorielle ou factorielle de *n*.
Pour des raisons pratiques, on définit $0! = 1$
$n!$ donne le nombre de permutations de n objets différents.

Exemple

$$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$$

*

Exercice 1.1.14

Calculer :

4! 6! 10! 69! 100!

Exercice 1.1.15

Calculer :

a) $\dfrac{15!}{8!}$

b) $\dfrac{600!}{598!}$

c) $(7+3)!-7!-3!$

d) $(7\cdot 3)!-7!\cdot 3!$

e) $\dfrac{16!}{5!\cdot 9!}$

f) $\dfrac{15!}{3!\cdot 3!\cdot 4!}$

Exercice 1.1.16

Simplifier :

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

b) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

c) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$

d) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

*

Solutions

Exercice 1.1.14

4! = 24
6! = 720
10! = 3'628'800
69! = 1.71 E 98
100! = 9.33 E 157

Exercice 1.1.15

a) $\frac{15!}{8!}=32'432'400$

b) $\frac{600!}{598!}=600\cdot 599=359'400$

c) $(7+3)!-7!-3!=10!-7!-3!=3'623'754$

d) $(7\cdot 3)!-7!\cdot 3!=21!-7!\cdot 3!=5.109\ \text{E}\ 19$

e) $\frac{16!}{5!\cdot 9!}=480'480$

f) $\frac{15!}{3!\cdot 3!\cdot 4!}=1'513'512'000$

Exercice 1.1.16

a) $\frac{n!}{(n-1)!}=n$

b) $\frac{n!}{(n-2)!}=n(n-1)=n^2-n$

c) $\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=(n+1)n=n^2+n$

*

La conjonction de coordination « ou » peut être <u>exclusive</u> ou <u>non exclusive</u>.

Considérons l'ensemble Ψ des nombres formés de 2 chiffres.
Cet ensemble contient les 90 nombres qui vont de 10 à 99
(il y en a bien 90 ; c'est le résultat de $99-9$).

<u>Question 6</u>

Combien y a-t-il de possibilités de choisir un nombre de Ψ si nous fixons comme condition :
« le 1er chiffre est 3 ou le 1er chiffre est 7 » ?

Ce « ou » est exclusif : nous avons soit l'un, soit l'autre.

10 nombres commencent par 3 : **30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39**
10 nombres commencent par 7 : **70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79**

Il y a donc $10+10=20$ possibilités.

<u>Question 7</u>

Combien y a-t-il de possibilités de choisir un nombre de Ψ si nous fixons comme condition :
« le 1er chiffre est 3 ou le 2e chiffre est 7 » ?

Cette fois-ci, le « ou » n'est pas exclusif : un nombre peut à la fois commencer par 3 et finir par 7.

10 nombres commencent par 3 : **30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39**
9 nombres finissent par 7 : **17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97**
1 nombre commence par 3 et finit par 7 : **37**

Il y a donc $10+9-1=18$ possibilités

Un nouveau <u>principe</u> se dégage. Pour une condition de la forme (C1 ou C2) :

<u>si C1 exclut C2</u>, le nombre de possibilités s'obtient en <u>additionnant</u> les possibilités de C1 et les possibilités de C2 ;

<u>si C1 n'exclut pas C2</u>, le nombre de possibilités s'obtient en <u>additionnant</u> les possibilités de C1 et les possibilités de C2, <u>puis en soustrayant</u> les possibilités qui réalisent simultanément C1 et C2.

Exercice 1.1.17

Considérons l'alphabet des 26 lettres majuscules. Nous voulons former des listes de 3 lettres qui ne sont pas nécessairement différentes.

a) Combien de ces listes commencent par A ?
b) Combien commencent par A ou par Z ?
c) Combien commencent par A et finissent par Z ?
d) Combien commencent par A ou finissent par Z ?

*

Solution

Exercice 1.1.17

a) $1 \times 26 \times 26 = 676$
b) $1 \times 26 \times 26 + 1 \times 26 \times 26 = 1'352$
c) $1 \times 26 \times 1 = 26$
d) $1 \times 26 \times 26 + 26 \times 26 \times 1 - 1 \times 26 \times 1 = 1'326$

*

Une tournure comme « au moins un » peut suggérer un dénombrement en employant une soustraction.

Considérons l'alphabet des 26 lettres majuscules. Nous voulons former des listes de 3 lettres qui ne sont pas nécessairement différentes.

Question 8

Combien de ces listes contiennent au moins une fois la lettre A ?

Le plus simple est de soustraire

(au nombre total de listes de 3 lettres)

(le nombre de listes ne contenant pas la lettre A)

$$26 \times 26 \times 26 - 25 \times 25 \times 25 = 1'951$$

Analogie

Si, dans un ensemble de 20 dessins, vous voulez savoir combien de dessins comportent au moins un personnage, ce nombre peut s'obtenir en soustrayant à 20 le nombre de dessins sans aucun personnage.

*

Exercice 1.1.18

Considérons l'alphabet des 26 lettres majuscules.
Nous voulons former des listes de 4 lettres.
Nous nommerons ces listes : « mots ».
Si nous ne précisons pas que nous voulons des lettres différentes, la convention par défaut est que les lettres d'un « mot » ne sont pas nécessairement différentes.

a) Combien de mots existe-t-il ?
b) Combien de mots ont des lettres différentes ?
c) Combien de mots commencent par A ?
d) Combien de mots ont des lettres différentes et commencent par A ?
e) Combien de mots commencent par une consonne ?
f) Combien de mots se terminent par une voyelle ?
g) Combien de mots ne contiennent que des consonnes ?
h) Combien de mots ne contiennent que des voyelles et toutes différentes ?
i) Combien de mots ont au moins une lettre qui se répète ?
j) Combien de mots ont les quatre lettres identiques ?
k) Combien de mots ont au moins une consonne ?
l) Combien de mots ont des lettres différentes et au moins une voyelle ?

Exercice 1.1.19

Un code est composé de 2 lettres suivies de 3 chiffres.
Exemples : **ZE217** **AB667** **ZZ333**

a) Combien de ces codes existe-t-il ?
b) Combien se terminent par 5 ?
c) Combien commencent par une voyelle ?
d) Combien ne se terminent pas par 8 ?
e) Combien se terminent par 3 et commencent par Z ?
f) Combien contiennent trois chiffres impairs ?
g) Combien contiennent deux voyelles ?
h) Combien ne contiennent que des symboles différents ?

Exercice 1.1.20

On dispose des chiffres **3 4 5 6 7** pour former des nombres de 3 chiffres.
Exemples : **765 445 333**

a) Combien peut-on former de tels nombres si les répétitions sont permises ?
b) Combien peut-on former de tels nombres si les répétitions ne sont pas permises ?
c) Combien y a-t-il de ces nombres pairs si les répétitions sont permises ?
d) Combien y a-t-il de ces nombres pairs si les répétitions ne sont pas permises ?
e) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions sont permises ?
f) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions ne sont pas permises ?

*

Solutions

Exercice 1.1.18

a) $26\times26\times26\times26=456'976$
b) $26\times25\times24\times23=358'800$
c) $1\times26\times26\times26=17'576$
d) $1\times25\times24\times23=13'800$
e) $20\times26\times26\times26=351'520$
f) $26\times26\times26\times6=105'456$
g) $20\times20\times20\times20=160'000$
h) $6\times5\times4\times3=360$
i) $26\times26\times26\times26-26\times25\times24\times23=98'176$
j) 26
k) $26\times26\times26\times26-6\times6\times6\times6=455'680$
l) $26\times25\times24\times23-20\times19\times18\times17=242'520$

Exercice 1.1.19

a) $26\times26\times10\times10\times10=676'000$
b) $26\times26\times10\times10\times1=67'600$
c) $6\times26\times10\times10\times10=156'000$
d) $26\times26\times10\times10\times9=608'400$
e) $1\times26\times10\times10\times1=2'600$
f) $26\times26\times5\times5\times5=84'500$
g) $6\times6\times10\times10\times10=36'000$
h) $26\times25\times10\times9\times8=468'000$

Exercice 1.1.20

a) $5\times5\times5=125$
b) $5\times4\times3=60$
c) $5\times5\times2=50$
d) $4\times3\times2=24$
e) $5\times5\times1=25$
f) $4\times3\times1=12$

*

1.2 Arrangements

Un arrangement simple est
une liste de r éléments distincts choisis dans un ensemble de n éléments
(avec $r \leqslant n$)

Exemples 1.2.1

Considérons un ensemble Ω de 7 couleurs :

Ω = {Rouge (R) ; Jaune (J) ; Bleu (B) ; Vert (V) ; Marron (M) ; Orange (O) ; Kaki (K)}

RMK	est un arrangement simple de 3 de ces couleurs
JOVB	est un arrangement simple de 4 de ces couleurs
MKORV	est un arrangement simple de 5 de ces couleurs

Combien y a-t-il d'arrangements simples de 3 de ces couleurs ?

Il y en a : $7\times6\times5=210$

À l'aide de la fonction factorielle, nous aurions pu aussi écrire :

$$7\times6\times5=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=\frac{7!}{4!}=\frac{7!}{(7-3)!}$$

Cela suggère une formule générale pour obtenir
le nombre d'arrangements simples de r éléments parmi n : $\frac{n!}{(n-r)!}$

Ce nombre est généralement noté (dans les pays francophones) : A_r^n

Nous avons donc la formule :

$$A_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Formule 1

Si nous reprenons l'exemple des 7 couleurs, il y a :

$A_1^7=7$	arrangements simples d'une seule couleur
$A_2^7=42$	arrangements simples de 2 couleurs
$A_3^7=210$	arrangements simples de 3 couleurs
$A_4^7=840$	arrangements simples de 4 couleurs
$A_5^7=2'520$	arrangements simples de 5 couleurs
$A_6^7=5'040$	arrangements simples de 6 couleurs
$A_7^7=5'040$	arrangements simples de 7 couleurs

Sur les calculatrices A_3^7 , par exemple, s'obtient en écrivant : 7 nPr 3

Un arrangement avec répétitions est
une liste de *r* éléments, non nécessairement distincts,
choisis dans un ensemble de *n* éléments

Exemples 1.2.2

Considérons à nouveau l'ensemble Ω de 7 couleurs :

Ω = {Rouge (R) ; Jaune (J) ; Bleu (B) ; Vert (V) ; Marron (M) ; Orange (O) ;
Kaki (K)}

RMR	est un arrangement avec répétitions de longueur 3
JOOB	est un arrangement avec répétitions de longueur 4
MMKRRBVJJJJJ	est un arrangement avec répétitions de longueur 12
RMK	est un arrangement avec répétitions de longueur 3

Le dernier exemple RMK ne comporte pas de répétitions. Oui, mais les arrangements simples sont des cas particuliers d'arrangements avec répétitions.

Combien y a-t-il d'arrangements avec répétitions de longueur 3 en choisissant des couleurs dans l'ensemble Ω ?

Il y en a : $7\times7\times7=343$

Cela suggère une formule générale pour obtenir
le nombre d'arrangements avec répétitions de *r* éléments parmi *n* : n^r

Ce nombre est généralement noté (dans les pays francophones) : $\overline{A_r^n}$

Nous avons donc la formule :

$$\overline{A_r^n} = n^r$$

Formule 2

Si nous reprenons l'exemple des 7 couleurs, il y a :

$\overline{A_1^7} = 7^1 = 7$	arrangements avec répétitions d'une seule couleur
$\overline{A_2^7} = 7^2 = 49$	arrangements avec répétitions de 2 couleurs
$\overline{A_3^7} = 7^3 = 343$	arrangements avec répétitions de 3 couleurs
$\overline{A_4^7} = 7^4 = 2'401$	arrangements avec répétitions de 4 couleurs

etc.

*

Complément culturel

Le Yi-King, un jeu divinatoire chinois élaboré au cours du premier millénaire avant JC, repose sur des arrangements (avec répétitions) de 2 symboles :
le trait plein (Yang) : —— et le trait brisé (Yin) : – –
Arrangés par 3, ils forment 8 trigrammes ; arrangés par 6, ils forment 64 hexagrammes. Voici les trigrammes :

——	——	——	——
——	——	– –	– –
——	– –	——	– –

– –	– –	– –	– –
——	——	– –	– –
——	– –	——	– –

Au 13e siècle, Raymond Lulle, associant des mots à des lettres qu'il dispose sur 3 cercles concentriques mobiles, élabore par des arrangements (avec répétitions) un ensemble de questions philosophiques, par exemple: la bonté est-elle grande en ce qu'elle contient des choses différentes ? Giordano Bruno reprend au 16e siècle l'idée des cercles concentriques.

Un hétérogramme est un mot formé de lettres différentes. Au 17e siècle, le savant jésuite suisse Paul Guldin calcule le nombre d'hétérogrammes possibles avec un alphabet de 23 lettres. Il s'agit de sommer, pour k variant de 1 à 23, les arrangements simples de k lettres parmi 23. On obtient environ 7 E 22. Guldin étudie en détail combien de livres il faudrait pour écrire tous ces mots et combien de bibliothèques pour contenir tous ces livres. Il démontre qu'avec des constructions cubiques de 432 pieds de côté, la surface terrestre ne suffirait pas. Clavius, Mersenne et Leibniz ont envisagé des problèmes du même genre.

Raymond Queneau, dans « *Cent mille milliards de poèmes* » (Gallimard, 1961), exploite les 10^{14} arrangements (avec répétitions) de 14 vers variant chacun dans un ensemble de 10.

Le psychologue Sternberg a imaginé un modèle simplifié de l'amour en 8 catégories, selon les arrangements (avec répétitions) de 3 paramètres (passion, intimité, engagement) variant dans un ensemble de 2 valeurs {oui ; non}.

Dans l'ADN, les 64 arrangements (avec répétitions) de 3 bases parmi 4 s'appellent des codons. Chacun code un acide aminé, sauf trois qui font stopper la synthèse de la protéine.

Exercice 1.2.1

Calculer :

A_5^{10} A_3^{100} A_{20}^{30} $\overline{A}_3^8$ $\overline{A}_7^4$

Exercice 1.2.2

On tire successivement trois cartes d'un jeu de 52 cartes.

a) Combien y a-t-il de listes possibles
si, à chaque fois, on remet dans le jeu la carte tirée ?
b) Combien y a-t-il de listes possibles
si on ne remet aucune carte dans le jeu ?

Exercice 1.2.3

On dispose des lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I pour former des codes de 5 lettres.

a) Combien peut-on former de codes si les répétitions sont permises ?
b) Combien peut-on former de codes si les répétitions ne sont pas permises ?
c) Combien peut-on former de codes qui contiennent la lettre A si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 1.2.4

En utilisant exclusivement les chiffres impairs 1, 3, 5, 7 et 9, on désire former un nombre comportant 3 chiffres. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 1.2.5

Le président doit désigner un ministre de la couture, un ministre du jugement dernier et un ministre du vide intérieur. Chaque poste doit être occupé par une personne différente. De combien de manières peut-il les choisir parmi 8 personnes ?

Exercice 1.2.6

Un pays veut se créer un nouveau drapeau à 4 bandes verticales de couleurs différentes. Une commission a décidé que le choix des couleurs devrait s'opérer parmi 8. Déterminer le nombre de possibilités.

Exercice 1.2.7

Combien de possibilités a-t-on de ranger 4 élèves parmi 25 places ?

Exercice 1.2.8

Un bulletin de vote comporte 6 questions. Pour chaque question, il y a 3 réponses possibles : oui, non, vote blanc. Une seule réponse doit être donnée à chaque question. De combien de manières un tel bulletin peut-il être rempli ?

Exercice 1.2.9

On jette 5 fois une pièce de monnaie et on note chaque fois le résultat : Pile ou Face. Combien y a-t-il de listes possibles ?

Exercice 1.2.10

Avec les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5, combien peut-on former

a) de nombres à 7 chiffres ?
b) de nombres à 7 chiffres commençant par 1 ?

Exercice 1.2.11

Un code est composé de trois lettres suivies de quatre chiffres.

Rappel : il y a 26 lettres et 10 chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Exemple : BUS7988

a) Combien peut-on former de codes si les répétitions sont permises ?
b) Combien peut-on former de codes si les répétitions ne sont pas permises ?
c) Combien peut-on former de codes qui commencent par T si les répétitions sont permises ?
d) Combien peut-on former de codes qui se terminent par 6 et ne contiennent que des symboles différents ?
e) Combien peut-on former de codes qui commencent par AA et se terminent par 99 ?
f) Combien peut-on former de codes qui ne se terminent pas par 333 ?

Exercice 1.2.12 (créativité)

Soit Ω = {terre ; eau ; air ; feu} l'ensemble des 4 éléments, selon le philosophe grec Empédocle.

Les 12 arrangements simples de 2 éléments parmi les 4 de l'ensemble Ω sont :

[terre ; eau]	[eau ; terre]	[terre ; air]	[air ; terre]
[terre ; feu]	[feu ; terre]	[eau ; air]	[air ; eau]
[eau ; feu]	[feu ; eau]	[air ; feu]	[feu ; air]

Écrire un texte de 12 phrases où chacun de ces arrangements est présent dans une seule phrase et où nulle phrase n'en contient plusieurs.

Exercice 1.2.13 (créativité)

Soit Ω = {a ; e ; i ; o ; u} un ensemble de 5 voyelles (« y » a été exclu).

Les 25 arrangements, avec répétitions, de 2 éléments parmi les 5 de l'ensemble Ω sont :

[a ; a]	[a ; e]	[a ; i]	[a; o]	[a; u]
[e ; a]	[e ; e]	[e ; i]	[e ; o]	[e ; u]
[i ; a]	[i ; e]	[i ; i]	[i ; o]	[i ; u]
[o ; a]	[o ; e]	[o ; i]	[o ; o]	[o ; u]
[u ; a]	[u ; e]	[u ; i]	[u ; o]	[u ; u]

Écrire un texte où chacun de ces arrangements est présent dans un seul mot et où chaque mot contient 2 voyelles ou aucune voyelle.

*

Solutions

Exercice 1.2.1

$A_5^{10}=30'240$
$A_3^{100}=970'200$
$A_{20}^{30}=7.3\ \text{E}\ 25$
$\overline{A_3^8}=512$
$\overline{A_7^4}=16'384$

Exercice 1.2.2

a) $\overline{A_3^{52}}=52^3=140'608$
b) $A_3^{52}=132'600$

Exercice 1.2.3

a) $\overline{A_5^9}=9^5=59'049$
b) $A_5^9=15'120$
c) $A_5^9-A_5^8=8'400$ ou $5\,A_4^8$

Exercice 1.2.4

$\overline{A_3^5}=5^3=125$

Exercice 1.2.5

$A_3^8=336$

Exercice 1.2.6

$A_4^8=1'680$

Exercice 1.2.7

$A_4^{25}=303'600$

Exercice 1.2.8

$\overline{A_6^3}=3^6=729$

Exercice 1.2.9

$\overline{A_5^2} = 2^5 = 32$

Exercice 1.2.10

a) $\overline{A_7^5} = 5^7 = 78'125$
b) $\overline{A_6^5} = 5^6 = 15'625$

Exercice 1.2.11

a) $\overline{A_3^{26}} \cdot \overline{A_4^{10}} = 26^3 \cdot 10^4 = 175'760'000$
b) $A_3^{26} \cdot A_4^{10} = 78'624'000$
c) $\overline{A_2^{26}} \cdot \overline{A_4^{10}} = 26^2 \cdot 10^4 = 6'760'000$
d) $A_3^{26} \cdot A_3^{9} = 7'862'400$
e) $\overline{A_1^{26}} \cdot \overline{A_2^{10}} = 26^1 \cdot 10^2 = 2'600$
f) $\overline{A_3^{26}} \cdot \overline{A_4^{10}} - \overline{A_3^{26}} \cdot \overline{A_1^{10}} = 26^3 \cdot 10^4 - 26^3 \cdot 10^1 = 175'584'240$

Exercice 1.2.12

Je pète le feu, je me sens libre comme l'air. Le Paradis sur terre, est-ce un loisir perpétuel de s'envoyer en l'air ? Pas de promesse en l'air, jouons avec le feu ! Pour ne pas me noyer dans un verre d'eau, j'ai besoin de changer d'air. En route pour la Terre de feu ! J'y vivrai d'amour et d'eau fraîche, je ferai feu de tout bois. La chasse en plein air, j'en ai l'eau à la bouche. Tout feu tout flamme, je goûterai les fruits de la terre. Je veux chanter sous les eaux de ciel et danser sur la terre qui tremble. On me dit tête en l'air, mais je sais garder les pieds sur terre. Pas question de rentrer sous terre ou de nager entre deux eaux ! Une femme qui a le feu au cul et qui n'a pas inventé l'eau tiède, voilà ce que je souhaite.

Exercice 1.2.13

Comment tuer l'instant neuf, bannir l'écart futur, briser l'esprit luron qui distord tout canon moral, honnir avant l'écho l'intrus aux brûlants instincts cochons ? Avec l'Enfer !

*

1.3 Permutations

Une permutation simple est
un arrangement simple de tous les éléments d'un ensemble

Pour un ensemble à n éléments,
le nombre de permutations simples est généralement noté : P^n

$$P^n = A_n^n = n!$$

Formule 3

Exemple 1.3.1

Soit {4 ; 6 ; 8} un ensemble à 3 éléments.
Il y a $P^3 = 3! = 6$ permutations possibles de ces éléments. Ce sont :

468, 486, 648, 684, 846, 864

Exemple 1.3.2

Soit {C ; R ; A ; N ; E} un ensemble de 5 lettres.

Il y a $P^5 = 5! = 120$ permutations possibles de ces éléments.

Écrivons-en quelques unes sous forme de mots (anagrammes) :

ANCRE
CANER
CARNE
CERNA
CRANE
CRENA
ECRAN
ENCRA
NACRE
RANCE

Rappelons qu'on dit **une** anagramme : ce mot est féminin.

*

Une permutation avec répétitions est
une liste d'éléments dont un est présent n_1 fois, un autre est présent n_2 fois, etc.

Pour une liste de $n=n_1+n_2+...$ éléments,
le nombre de permutations avec répétitions est généralement noté : $\overline{P^n_{n_1,n_2,...}}$

$$\overline{P^n_{n_1,n_2,...}}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!...}$$

Formule 4

Exemple 1.3.3

Soit le mot BONOBOS.

Il contient 7 lettres, où la lettre B est présente 2 fois et la lettre O est présente 3 fois.

Il y a $\overline{P^7_{2,3}}=\frac{7!}{2!\cdot 3!}=420$ permutations de ces éléments.

En voici quelques unes sous forme d'anagrammes dépourvues de signification :

SNOBOBO
BONBOSO
SONOBOB
NOBOBOS

*

Complément culturel

Les permutations se rencontrent un peu partout. En physique fondamentale ; dans des jeux comme le cube de Rubik ou le taquin ; en musique ; en arts visuels ; en poésie. Une permutation dite « en spirale » a permis au troubadour Arnaud Daniel d'inventer au 12e siècle une forme poétique appelée « sextine », qu'illustrèrent Dante, Pétrarque, Camões, Pound, l'Oulipo.

*

Exercice 1.3.1

Écrire toutes les anagrammes du mot **TOTOT**.

Exercice 1.3.2

Combien y a-t-il de possibilités de ranger verticalement 4 livres différents sur une étagère ?

Exercice 1.3.3

6 alpinistes (Al, Bob, Carl, Dean, Elie, Fred) veulent gravir le Mt-Blanc.
De combien de manières peuvent-ils s'encorder pour cette ascension ?

Exercice 1.3.4

Nous disposons des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5 et nous voulons former un nombre de 6 chiffres sans répétitions. Combien avons-nous de possibilités ?

Exercice 1.3.5

Un photographe veut aligner 6 personnes : un Suisse, un Israélien, un Belge, un Chinois, un Palestinien et un Espagnol.

a) Dénombrer toutes les possibilités.
b) Quel est le nombre d'alignements possibles si le Suisse et le Belge veulent se retrouver côte à côte ?
c) Quel est le nombre d'alignements possibles si l'Israélien et le Palestinien ne veulent pas se retrouver côte à côte ?

Exercice 1.3.6

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot **TARMACADAMISA** ?
b) Combien commencent par la lettre A ?
c) Combien ont les cinq A côte à côte ?
d) Combien ne commencent pas par T ?
e) Combien finissent par T ou par M ?

Exercice 1.3.7

On considère toutes les anagrammes chiffrées du nombre **132132132**

a) Combien y en a-t-il ?
b) Combien sont paires ?
c) Combien sont plus grandes que 320'000'000 ?

Exercice 1.3.8

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot **ENERVEMENT** ?
b) Combien commencent par la lettre E ?
c) Combien ont les quatre E côte à côte ?
d) Combien ne commencent pas par V ?
e) Combien finissent par T ou par N ?

Exercice 1.3.9

Un collectionneur possède 6 crânes de chat, 4 crânes de cheval et 7 crânes de chien. De combien de manières peuvent-ils être rangés sur une étagère si les crânes d'une même catégorie animale sont placés les uns à côté des autres ?

Exercice 1.3.10 (créativité)

Les 6 permutations de deux fois le mot « bien » et de deux fois le mot « mal » sont les suivantes :

[bien ; bien ; mal ; mal]
[bien ; mal ; bien ; mal]
[bien ; mal ; mal ; bien]
[mal ; bien ; bien ; mal]
[mal ; bien ; mal ; bien]
[mal ; mal ; bien ; bien]

Écrire un texte de 6 phrases où chacune de ces permutations est présente dans une seule phrase.

Exercice 1.3.11 (créativité)

Comme nous l'avons vu dans l'exemple 1.3.1, il y a $P^3 = 3! = 6$ permutations possibles des éléments $\{4 ; 6 ; 8\}$. Ce sont :

468, 486, 648, 684, 846, 864

Écrire un poème de 6 tercets, où chacune de ces permutations donne la succession des mètres (par exemple la permutation 468 conduit à un écrire un tercet dont le premier vers comporte 4 syllabes, le deuxième 6 syllabes et le troisième 8 syllabes).

Exercice 1.3.12 (créativité)

Écrire un texte selon le procédé illustré dans l'exemple suivant, où toutes les lignes du bloc sont des permutations du même groupe de lettres.

LACONTRAINTE
ONLACRAINTET
ONLACRIETANT
ONALETRACINT
ACTONRITENLA
TRIANTENLACO
NTRANTLOIECA
RLATECANONTI
RANTLOINETCA
TOICERNANTLA
TRACEATONNIL
NOIRECLATANT
ATONLARCINTE
RECITANTONLA
CALINETONART

La contrainte, on la craint et on la crie tant.
On a le trac intact, on rit en la triant, en la contrant.
Loi écarlate, canon tirant loin, etc.
À toi cernant la trace, à ton Nil noir éclatant, à ton larcin te récitant !
On l'a câliné, ton art !

*

Solutions

Exercice 1.3.1

$\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ possibilités

OOTTT
OTOTT
OTTOT
OTTTO
TOOTT
TOTOT
TOTTO
TTOOT
TTOTO
TTTOO

Exercice 1.3.2

$P^4=4!=24$

Exercice 1.3.3

$P^6=6!=720$

Exercice 1.3.4

$P^6-P^5=6!-5!=600$

Exercice 1.3.5

a) $P^6=6!=720$
b) $P^5\cdot P^2=5!\cdot 2!=240$
c) $P^6-P^5\cdot P^2=6!-5!\cdot 2!=480$

Exercice 1.3.6

13 lettres, dont 5 A et 2 M

a) $\frac{13!}{5!\cdot 2!}=25'945'920$

b) $\frac{12!}{4!\cdot 2!}=9'979'200$

c) $\frac{9!}{2!}=181'440$

d) $\frac{13!}{5!\cdot 2!}-\frac{12!}{5!\cdot 2!}=23'950'080$

e) $\frac{12!}{5!\cdot 2!}+\frac{12!}{5!}=5'987'520$

Exercice 1.3.7

a) $\frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!}=1'680$

b) doit finir par 2 $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}=560$

c) doit commencer par 32 ou par 33 $\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}+\frac{7!}{3!\cdot 3!}=350$

Exercice 1.3.8

10 lettres, dont 4 E et 2 N

a) $\frac{10!}{4!\cdot 2!}=75'600$

b) $\frac{9!}{3!\cdot 2!}=30'240$

c) $\frac{7!}{2!}=2'520$

d) $\frac{10!}{4!\cdot 2!}-\frac{9!}{4!\cdot 2!}=68'040$

e) $\frac{9!}{4!\cdot 2!}+\frac{9!}{4!}=22'680$

Exercice 1.3.9

$P^3\cdot P^6\cdot P^4\cdot P^7=3!\cdot 6!\cdot 4!\cdot 7!=522'547'200$

Exercice 1.3.10

J'ai bien du mal à ne pas dire du mal du bien. Les apôtres du bien feraient bien de ne pas voir que le mal dans ce qui n'est pas si mal. Le mal est l'obsession de ceux que drogue le bien, ce qui fait du mal à l'intelligence du bien. C'est bien mal servir le bien que l'employer à traquer le mal. Mal comprendre le mal éloigne du vrai bien les gens qui se réclament du bien. Voir dans le mal ce qu'il peut y avoir de bien, voilà tout le bien que je souhaite à ceux qui jugent mal.

Exercice 1.3.11

T'es nul en maths,
tocard qui te dis bath !
Vil imposteur ! tu n'es qu'un fat !

Tu crois peut-être
avoir atteint le rang de maître
en te faisant connaître

auprès des intellos
pas rigolos,
dont les sermons sont des grelots.

L'esprit, c'est autre chose
que de soutenir quelques causes
qu'on te propose.

Pour penser la complexité,
apprends à mieux compter,
à permuter !

Ta philo, c'est du radotage
plein de mirages !
Les maths, ça déménage !

*

1.4 Combinaisons

Une <u>combinaison simple</u> est
un sous-ensemble de r éléments distincts choisis dans un ensemble de n éléments (avec $r \leqslant n$)

La différence avec les arrangements (et avec tout ce que nous avons vu jusqu'à présent), c'est qu'une combinaison n'est pas le résultat d'un choix ordonné. Dans une combinaison, nous nous refusons à voir un ordre particulier, nous ne tenons pas compte d'un ordre d'écriture, d'un ordre temporel ou de tout autre ordre qu'une expérience pourrait nous indiquer.

<u>Exemples 1.4.1</u>

Considérons à nouveau l'ensemble Ω de 7 couleurs :

Ω = {Rouge (R) ; Jaune (J) ; Bleu (B) ; Vert (V) ; Marron (M) ; Orange (O) ; Kaki (K)}

KMR, KRM, MKR, MRK, RKM, RMK

forment 6 arrangements simples de 3 de ces couleurs,
mais ils ne comptent que pour une seule combinaison simple

Combien y a-t-il d'arrangements simples de 3 couleurs de Ω ?

Il y en a : $A_3^7 = 210$

Et combien y a-t-il de combinaisons simples de 3 couleurs de Ω ?

Il y en a : $\frac{210}{6} = 35$

puisque 6 arrangements simples (par exemple KMR, KRM, MKR, MRK, RKM, RMK) ne comptent que pour une seule combinaison simple. Ce nombre 6 résulte de la permutation simple de 3 éléments : $3! = 6$

Cela suggère une formule générale pour obtenir
le nombre de combinaisons simples de r éléments parmi n : $\frac{A_r^n}{P^r} = \frac{A_r^n}{r!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$

Ce nombre est généralement noté (dans les pays francophones) : C_r^n

Nous avons donc la formule :

$$C_r^n = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Formule 5

Si nous reprenons l'exemple des 7 couleurs, il y a :

$C_1^7 = 7$	combinaisons simples d'une seule couleur
$C_2^7 = 21$	combinaisons simples de 2 couleurs
$C_3^7 = 35$	combinaisons simples de 3 couleurs
$C_4^7 = 35$	combinaisons simples de 4 couleurs
$C_5^7 = 21$	combinaisons simples de 5 couleurs
$C_6^7 = 7$	combinaisons simples de 6 couleurs
$C_7^7 = 1$	combinaison simple de 7 couleurs

Sur les calculatrices C_3^7 , par exemple, s'obtient en écrivant : 7 nCr 3

<u>Exemple 1.4.2</u>

Soit Φ = {mais ; ou ; et ; donc ; or ; ni ; car} un ensemble de 7 conjonctions de coordination.

Les $C_2^7 = 21$ combinaisons de 2 éléments parmi les 7 de Φ sont :

{mais ; ou}, {mais ; et}, {mais ; donc}, {mais ; or}, {mais ; ni}, {mais ; car},
{ou ; et}, {ou ; donc}, {ou ; or}, {ou ; ni}, {ou ; car},
{et ; donc}, {et ; or}, {et ; ni}, {et ; car},
{donc ; or}, {donc ; ni}, {donc ; car},
{or ; ni}, {or ; car},
{ni ; car}

*

Les nombres C_r^n ont de nombreuses propriétés. Blaise Pascal les a étudiées en 1654 dans son « Traité du triangle arithmétique ». En voici quelques unes :

$C_n^n = 1$ $\qquad$ $C_{n-r}^n = C_r^n$ $\qquad$ $C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$

Un sac ou un multi-ensemble est une généralisation de la notion d'ensemble. Comme pour les combinaisons simples, nous nous refusons à voir un ordre particulier, mais des éléments peuvent apparaître plusieurs fois. La notation d'un sac utilise les accolades doubles. Un sac de taille *r*, obtenu en sélectionnant des éléments parmi les *n* d'un ensemble donné, s'appelle une combinaison avec répétitions.

Le nombre des combinaisons avec répétitions de *r* éléments parmi *n* se note : $\overline{C_r^n}$

$$\overline{C_r^n}=\frac{(n+r-1)!}{r!\cdot(n-1)!}=C_r^{n+r-1}$$

Formule 6

Exemple 1.4.3

Soit Ψ = {minéral ; végétal ; animal} l'ensemble des 3 règnes.

{{minéral ; minéral; animal}} est un sac de taille 3, tiré de Ψ.

On peut dire aussi que {{minéral ; minéral; animal}}
est une combinaison avec répétitions de 3 éléments parmi les 3 de Ψ

Combien y a-t-il de telles combinaisons ?

$$\overline{C_3^3}=\frac{(3+3-1)!}{3!\cdot(3-1)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$$

Les voici toutes :

{{minéral ; minéral ; minéral}}
{{végétal ; végétal ; végétal}}
{{animal ; animal ; animal}}
{{minéral ; minéral ; végétal}}
{{minéral ; minéral ; animal}}
{{végétal ; végétal ; minéral}}
{{végétal ; végétal ; animal}}
{{animal ; animal ; minéral}}
{{animal ; animal ; végétal}}
{{minéral ; végétal ; animal}}

*

Complément culturel

Les combinaisons interviennent souvent dans les jeux. Ainsi, une main, au poker, est une combinaison simple de 5 cartes parmi 52. Dans le jeu du 421, avec 3 dés, on s'intéresse aux combinaisons avec répétitions de 3 chiffres parmi 6.

François Rabelais, dans le chapitre X de son « Cinquième livre », dénombre les combinaisons (avec répétitions) résultant du jet de deux dés. Il commet une légère erreur, puisqu'il en compte 20, alors qu'il y en a 21.

Dans le génome d'un individu, chaque gène est présent en 2 exemplaires (2 allèles) qui peuvent être identiques ou différents. Si un gène peut exister par exemple en 1000 variantes, il y a $\overline{C_2^{1000}} = 500'500$ possibilités pour une paire d'allèles de ce gène. Et l'être humain possède au moins 20'000 paires de gènes...

*

Exercice 1.4.1

Calculer :

$\dfrac{C_3^7}{C_3^8}$ $\dfrac{C_{98}^{100}}{C_6^4}$ $\dfrac{C_1^{18}}{C_{15}^{20}}$ $\dfrac{C_0^{15}}{C_4^{100}}$ $\dfrac{C_8^{23}}{C_1^n}$

Exercice 1.4.2

Blanche-Neige veut voyager avec trois des sept nains. Combien de choix possibles ?

Exercice 1.4.3

Soit E = {vue ; odorat ; toucher ; goût ; ouïe} l'ensemble des 5 sens. Écrire toutes les combinaisons simples de 2 éléments de E parmi les 5.

Exercice 1.4.4

Soit E = {bleu ; blanc ; rouge} l'ensemble des couleurs du drapeau français. Écrire toutes les combinaisons avec répétitions de 4 éléments parmi les 3 de E.

Exercice 1.4.5

Vérifier par un calcul que le problème de dés dont parle Rabelais (voir Complément culturel) donne 21 combinaisons.

Exercice 1.4.6

Combien y a-t-il de possibilités de former un comité de 4 personnes à partir d'un ensemble de 20 personnes, sachant que l'ordre dans lequel sont choisies les personnes est sans importance ?

Exercice 1.4.7

Un bar propose 10 boissons. La serveuse doit en porter 4 (pas nécessairement différentes) sur son plateau (la manière de les disposer sur le plateau n'a pas d'importance). Combien de possibilités ?

Exercice 1.4.8

Combien de possibilités a-t-on de former des groupes de 5 membres avec 9 personnes ? (l'ordre n'a pas d'importance)

Exercice 1.4.9

On souhaite poster 9 lettres de poids identiques, mais on ne dispose que de 5 timbres. Combien y a-t-il de possibilités de choisir les lettres qu'on va envoyer (chaque timbre a la valeur d'affranchissement d'une seule lettre) ?

Exercice 1.4.10

Combien y a-t-il de possibilités de former des équipes de 4 élèves et 1 professeur, s'il y a 20 élèves et 3 professeurs ? (l'ordre n'a pas d'importance)

Exercice 1.4.11

Un comité (ordre sans importance) est formé en choisissant 7 personnes parmi 12, dont 3 seulement sont des Belges. Combien peut-on former de comités comprenant

a) les 3 Belges ?
b) un seul Belge ?
c) au moins un Belge ?

Exercice 1.4.12

Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos ? Une pièce de domino comporte côte à côte 2 nombres de points, écrits de telle manière que, par exemple, le même domino donnera [3 | 5] et [5 | 3] par rotation de 180°. Chaque nombre peut varier de 0 à 6. Les répétitions sont possibles.

Exercice 1.4.13

Le poker se pratique généralement avec un jeu de 52 cartes (4 couleurs : cœur, carreau, pique et trèfle, comprenant chacune les valeurs : As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi). Une « main » est une distribution de 5 cartes dont l'ordre n'a pas d'importance. Calculer :

a) le nombre total de mains ;
b) le nombre de mains dont toutes les cartes sont de la même couleur ;
c) le nombre de mains comprenant 4 As ;
d) le nombre de mains comprenant exactement 2 valets et ne contenant aucune Dame.

Exercice 1.4.14

Une classe comporte 19 élèves, dont 3 seulement sont des garçons. Le prof veut former un groupe de 7 élèves pour une expérience. L'ordre des élèves dans le groupe n'a aucune importance. De combien de manières peut-il former ce groupe

a) si le prof ne pose aucune condition ?
b) s'il veut que les trois garçons fassent partie du groupe ?
c) s'il veut que le groupe soit entièrement composé de filles ?
d) s'il veut que Bob soit le seul garçon du groupe ?
e) s'il veut qu'un seul des trois garçons fasse partie du groupe ?

Exercice 1.4.15

Un fleuriste propose 10 variétés de roses. Monsieur Martin veut acheter deux bouquets. Pour sa femme, un bouquet composé de 3 roses de variétés différentes ; pour sa maîtresse, un bouquet composé de 5 roses de variétés différentes. Déterminer le nombre de possibilités pour la paire de bouquets.

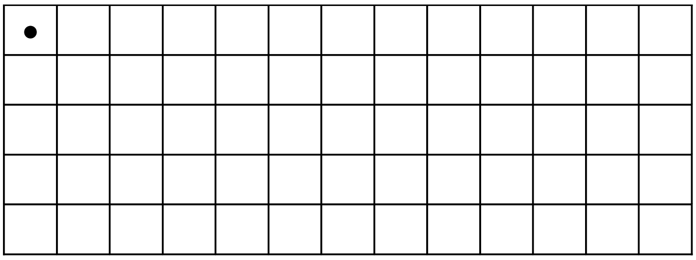
Exercice 1.4.16

Soit le binôme $(x+y)^{30}$. Un élève ou un logiciel de calcul de formel développe ce binôme en effectuant la distributivité, puis réduit l'expression en regroupant les monômes semblables. Quels sont les coefficients de :

a) $x^2 y^{28}$
b) $x^5 y^{25}$
c) $x^{25} y^5$

Exercice 1.4.17

Dans la grille suivante, combien de chemins peut-on faire emprunter au jeton noir pour l'amener dans la case située tout en bas à l'extrême droite, si on fixe comme contrainte que le déplacement d'une case à l'autre n'est possible qu'horizontalement de gauche à droite et verticalement de haut en bas ?



Exercice 1.4.18 (créativité)

Il existe 10 combinaisons simples de 2 voyelles parmi les 5 de l'ensemble {a ; e ; i ; o ; u}. Ce sont les paires :

{a ; e}, {a ; i}, {a ; o}, {a ; u}, {e ; i}, {e ; o}, {e ; u}, {i ; o}, {i ; u}, {o ; u}

Écrire un texte où chaque phrase est construite avec seulement 2 voyelles (qui peuvent être répétées à volonté) et un nombre quelconque de consonnes, de manière à exploiter une et une seule fois chacune de ces combinaisons. Par exemple, avec {a ; e}, il est possible de construire la phrase : « La barbe est attachée à l'arbre. »

*

Solutions

Exercice 1.4.1

$C_3^7 = 35$ $C_{98}^{100} = 4'950$ $C_1^{18} = 18$ $C_0^{15} = 1$ $C_8^{23} = 490'314$
$\overline{C}_3^8 = 120$ $\overline{C}_6^4 = 84$ $\overline{C}_{15}^{20} = 1'855'967'520$ $\overline{C}_4^{100} = 4'421'275$ $\overline{C}_1^n = n$

Exercice 1.4.2

$C_3^7 = 35$

Exercice 1.4.3

$C_2^5 = 10$ possibilités

{vue ; odorat}
{vue ; toucher}
{vue ; goût}
{vue ; ouïe}
{odorat ; toucher}
{odorat ; goût}
{odorat ; ouïe}
{toucher ; goût}
{toucher ; ouïe}
{goût ; ouïe}

Exercice 1.4.4

$\overline{C_4^3} = 15$ possibilités

Pour faire plus court, j'emploie le code : eu = bleu, an = blanc, ou = rouge

{{eu ; eu ; an ; ou}}
{{an ; an ; eu ; ou}}
{{ou ; ou ; an ; eu}}
{{eu ; eu ; eu ; an}}
{{eu ; eu ; eu ; ou}}
{{an ; an ; an ; eu}}
{{an ; an ; an ; ou}}
{{ou ; ou ; ou ; an}}
{{ou ; ou ; ou ; eu}}
{{an ; an ; an ; an}}
{{eu ; eu ; eu ; eu}}
{{ou ; ou ; ou ; ou}}
{{eu ; eu ; an ; an}}
{{eu ; eu ; ou ; ou}}
{{an ; an ; ou ; ou}}

Exercice 1.4.5

$\overline{C_2^6} = 21$

Exercice 1.4.6

$C_4^{20} = 4'845$

Exercice 1.4.7

$\overline{C_4^{10}} = 715$

Exercice 1.4.8

$C_5^9 = 126$

Exercice 1.4.9

$C_5^9 = 126$

Exercice 1.4.10

$C_4^{20} \cdot C_1^3 = 14'535$

Exercice 1.4.11

a) $C_3^3 \cdot C_4^9 = 126$
b) $C_1^3 \cdot C_6^9 = 252$
c) $C_7^{12} - C_7^9 = 756$

Exercice 1.4.12

$\overline{C_2^7} = 28$

Exercice 1.4.13

a) $C_5^{52} = 2'598'960$
b) $C_1^4 \cdot C_5^{13} = 5'148$
c) $C_4^4 \cdot C_1^{48} = 48$
d) $C_2^4 \cdot C_3^{44} = 79'464$

Exercice 1.4.14

a) $C_7^{19} = 50'388$
b) $C_3^3 \cdot C_4^{16} = 1'820$
c) $C_7^{16} = 11'440$
d) $C_1^1 \cdot C_6^{16} = 8'008$
e) $C_1^3 \cdot C_6^{16} = 24'024$

Exercice 1.4.15

$C_3^{10} \cdot C_5^{10} = 30'240$

Exercice 1.4.16

a) $C_2^{30} = 435$
b) $C_5^{30} = 142'506$
c) $C_5^{30} = 142'506$

Exercice 1.4.17

$C_4^{16} = 1'820$

Exercice 1.4.18

Né à Genève, Pascal Kaeser amalgame les maths et les lettres. Ce colonel des poètes formels orchestre l'ombre et le nombre, le héros et le zéro. Cet esprit libre chiffre le délire et le délice, rêve de science en liesse, relève mille défis, rit de tisser ici-même dix liens entre cinq signes. Ce bretteur brûle de tuer les erreurs les plus têtues. D'instinct, il occit l'idiot, tord l'infini, vomit l'opinion. Il a faim d'art malin, d'air marin, d'assassinats marrants. Il vit sur un pic, il fuit plus d'un bruit, il s'instruit. Pas bavard, plus pacha qu'un chat, plus savant qu'un fana du Gradus, Pascal a l'aura d'un truand. Gascon dans son salon, Pascal sort sans galons. Goûtons-nous son humour ?

*

1.5 Prolongements et rétrospective

Ce rapide tour d'horizon est bien loin d'épuiser les possibilités de l'analyse combinatoire.

Dénombrer des ensembles, des sacs, des listes ou des objets plus complexes, qui vérifient certaines conditions, peut s'avérer difficile, voire constituer des problèmes non résolus à ce jour. Par exemple, aucune formule n'a été trouvée pour dénombrer les carrés latins.

Parmi les choses connues, mentionnons :

Le dénombrement des schémas de rimes, grâce aux nombres de Stirling et de Bell.

Le problème des dérangements : permutations sans point fixe.

Les permutations autour d'une table ronde ou autour d'une table carrée (si le nombre de personnes est un multiple de 4).

Le problème des ménages : de combien de manières peut-on placer un nombre donné de couples (hétérosexuels et monogames) autour d'une table ronde, si on veut alterner hommes et femmes et ne placer aucun homme à côté de son épouse ?

Le dénombrement des graphes eulériens.

Le dénombrement des alcanes (ou hydrocarbures saturés) en chimie organique. D'un point de vue mathématique, ces molécules sont des arbres dont partent 1 ou 4 arêtes de chaque nœud.

*

Passons en revue les combinaisons, arrangements et permutations

Choix non ordonnés

aucun élément ne peut être répété

C_r^n

chaque élément peut être répété, en laissant libre le nombre d'occurrences (jusqu'au maximum *r*)

$\overline{C_r^n}$

les éléments peuvent être répétés, mais les nombres d'occurrences ne sont pas tous laissés libres ni fixés à 1 chacun

non étudié ici

Choix ordonnés

aucun élément ne peut être répété

A_r^n

cas particulier $n=r$: P^n

chaque élément peut être répété, en laissant libre le nombre d'occurrences (jusqu'au maximum *r*)

$\overline{A_r^n}$

les éléments peuvent être répétés

et tous les nombres d'occurrences sont fixés

cas particulier $n=r$: $\overline{P_{n_1, n_2, \ldots}^n}$

mais les nombres d'occurrences ne sont pas tous laissés libres ni fixés à 1 chacun

cas non étudiés ici

*

Dans l'ouvrage Formulaires et tables, des Commissions romandes de mathématiques, de physique et de chimie, on trouve les définitions suivantes :

Arrangement simple

Si, parmi *n* éléments distincts, on choisit *r* éléments distincts ($r \leqslant n$) en les classant dans un ordre particulier, on forme un arrangement simple (de *r* éléments choisis parmi *n*). Le nombre d'arrangements simple est noté : A_r^n

Arrangement avec répétitions

Si, parmi *n* éléments distincts, on choisit *r* éléments distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même) en les classant dans un ordre particulier, on forme un arrangement avec répétitions (de *r* éléments choisis parmi *n*). Le nombre d'arrangements avec répétitions est noté : $\overline{A_r^n}$

Permutation simple

Si on classe dans un ordre particulier *n* éléments distincts, on forme une permutation simple (de ces *n* éléments). Le nombre de permutations simples est noté : P^n

Permutation avec répétitions

Si on classe dans un ordre particulier *n* éléments dont n_1 sont identiques de type 1, n_2 identiques de type 2, ..., n_p identiques de type *p* ($n_1+n_2+...+n_p=n$), on forme une permutation avec répétitions (de ces *n* éléments). Le nombre de permutations avec répétitions est noté : $\overline{P_{n_1, n_2, ...}^n}$

Combinaison simple

Si, parmi *n* éléments distincts, on choisit *r* éléments distincts ($r \leqslant n$) sans les classer dans un ordre particulier, on forme une combinaison simple (de *r* éléments choisis parmi *n*). Le nombre de combinaisons simples est noté : C_r^n

Combinaison avec répétitions

Si, parmi *n* éléments distincts, on choisit *r* éléments distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même) sans les classer dans un ordre particulier, on forme une combinaison avec répétitions (de *r* éléments choisis parmi *n*). Le nombre de combinaisons avec répétitions est noté : $\overline{C_r^n}$

<u>Justification des formules</u>

Les formules 1, 2, 3 et 5 ont déjà été justifiées.

La formule 4 peut se comprendre en constatant que, dans une liste de taille fixe, un élément présent n_1 fois divise les possibilités par $n_1!$, c'est-à-dire par le nombre de permutations des positions qu'il occupe dans la liste.

La formule 6 est équivalente à : $\overline{C_r^n} = C_{n-1}^{r+n-1}$

Pour la comprendre, examinons des sacs de taille 5 construits avec les lettres a, b, c. À côté de chaque sac, écrivons une liste (ordonnée alphabétiquement) avec des barres verticales pour marquer les transitions d'une lettre à une lettre différente. Une barre est aussi écrite pour marquer l'absence d'une lettre.

{{a ; a ; b ; c ; c}}	aa|b|cc
{{a ; a ; a ; c ; c}}	aaa||cc
{{b ; b ; c ; c ; c}}	|bb|ccc
{{c ; c ; c ; c ; c}}	||ccccc

Nous voyons que le problème se ramène à trouver les $n-1=3-1=2$ emplacements possibles pour les barres dans des séquences d'une longueur $r+n-1=5+3-1=7$.
Nous avons bien : $\overline{C_5^3} = C_2^7$

Enfin, signalons un lien entre la formule 4 et la formule 5.

Si $n_1+n_2+n_3+...+n_k=n$,
alors $\overline{P^n_{n_1, n_2, n_3, ..., n_k}} = C^n_{n_1} \cdot C^{n-n_1}_{n_2} \cdot C^{n-n_1-n_2}_{n_3} \cdot ... C^{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}_{n_k}$

<u>Exemple</u>

SUISSESSES comporte 10 lettres, qui se répartissent en 6 S, 2 E, 1 U, 1 I

$n=10 \qquad n_1=6 \qquad n_2=2 \qquad n_3=1 \qquad n_4=1$

$\frac{10!}{6!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 2'520$ ou $C_6^{10} \cdot C_2^4 \cdot C_1^2 \cdot C_1^1 = 2'520$

Cela revient à choisir d'abord 6 positions pour les S ; puis choisir, parmi les 4 positions restantes, 2 positions pour les E ; etc.

La question du manque de clarté des énoncés

En analyse combinatoire, il arrive assez fréquemment – que ce soit dans des cours, des livres ou même des examens – que des énoncés manquent de clarté, en général par volonté d'être bref. Voici un exemple d'énoncé peu clair :

On lance trois dés. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Le manque de précision nous contraint à faire des hypothèses. Voici trois réponses possibles selon les hypothèses que nous adoptons.

Première réponse :

Si nous supposons que seuls les numéros nous intéressent (peu nous importe de savoir quel dé livre quel numéro), nous prenons la décision de dénombrer des sacs de 3 nombres, comme {{3 ; 3 ; 5}}. Nous avons affaire à des combinaisons avec répétitions (de 3 parmi 6). Il y en a 56.

Deuxième réponse :

Si nous supposons que nous devons distinguer les 3 dés (notons-les A, B, C) et qu'il nous importe de savoir quel dé livre quel numéro, nous prenons la décision de dénombrer des ensembles de couples, comme {A2 ; B4 ; C4}. Nous avons affaire à des arrangements avec répétitions (de 3 parmi 6). Il y en a 216.

Troisième réponse :

Si nous supposons que nous devons non seulement distinguer les 3 dés (A, B, C), mais aussi distinguer l'ordre de ces 3 dés (par exemple selon la distance de chaque dé à un point fixe, avec l'hypothèse supplémentaire que deux dés ne peuvent pas être exactement à la même distance), nous prenons la décision de dénombrer des listes de couples, comme [B3 ; A4 ; C3]. Nous avons affaire à une composition d'arrangements avec répétitions (de 3 parmi 6) et de permutations (de 3). Il y en a 1'296.

Autre exemple

D'une urne contenant 20 boules numérotées de 1 à 20,
on tire successivement (sans remise) 3 boules.
Combien y a-t-il de possibilités ?

Est-il évident qu'il convient de dénombrer des arrangements et non pas des combinaisons ? Il me semble que non. L'énoncé ne précise pas si les possibilités que nous souhaitons considérer sont des listes ordonnées ou des ensemble non ordonnés. Prenons le cas de la loterie à numéros. C'est un jeu qui se déroule selon une procédure de tirage ordonné (sans remise) de boules numérotées; mais, en fin de compte, on s'intéresse à des combinaisons et non pas à des arrangements. Cet exemple (ou celui des mains au poker) me donne à penser qu'une procédure de tirage ne suffit pas nécessairement à déterminer si l'ordre compte ou non. Attribuer ou non de l'importance à l'ordre dépend de la « règle du jeu » que nous voulons fixer.

Encore un exemple

Une salle de classe comporte 24 pupitres, disposés en 4 rangées de 6.
Dans le cours MA2-09, il y a 15 élèves.
Le professeur décide de choisir 6 élèves pour remplir le premier rang.
Combien a-t-il de possibilités ?

Il se peut que le professeur n'accorde de l'importance qu'au fait que le premier rang soit plein, sans se soucier de l'ordre dans lequel les élèves soient assis. Dans ce cas, la réponse est C_6^{15} . Il se peut que le professeur accorde aussi de l'importance à la disposition des élèves dans cette rangée. Dans ce cas, la réponse est A_6^{15} .

Et un dernier

Dans un ensemble de 10 personnes, on veut en choisir 3 pour une mission.
Combien y a-t-il de possibilités ?

Si les personnes ne doivent pas remplir des fonctions différentes : C_3^{10}
Si un chef de mission doit être désigné, mais que les deux autres personnes ne doivent pas remplir de fonctions particulières : $3 \cdot C_3^{10}$
Si les 3 personnes doivent remplir 3 fonctions différentes : A_3^{10}
Si les 3 personnes doivent remplir 3 fonctions différentes, mais que ces fonctions seront attribuées ultérieurement et que, dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à des ensembles de 3 : C_3^{10}

*

Exercices variés

Exercice 1.5.1

Une boîte comporte 30 objets, dont 10 noirs et 20 blancs. On distingue les objets d'une même couleur. On veut sortir 7 objets. Déterminer le nombre de possibilités dans chacun des cas suivants :

a) L'ordre est important et on ne veut sortir que des objets blancs.
b) L'ordre est sans importance et on veut sortir 4 objets noirs et 3 blancs.

Exercice 1.5.2

Dans une classe de 20 élèves, chacun serre une seule fois la main de tous. Combien cela fait-il de poignées de mains ?

Exercice 1.5.3

La section du lieutenant Wittwer compte 18 soldats, dont deux seulement sont des tireurs d'élite : Ignace et Isidore. Le lieutenant veut former un groupe de 5 soldats pour accomplir une mission dangereuse. L'ordre des soldats dans le groupe n'a aucune importance. De combien de manières peut-il former ce groupe

a) s'il ne pose aucune condition ?
b) s'il veut que les deux tireurs d'élite fassent partie du groupe ?
c) s'il ne veut prendre ni Ignace ni Isidore dans ce groupe ?
d) s'il veut qu'un seul des deux tireurs d'élite fasse partie du groupe ?

Exercice 1.5.4

Combien y a-t-il de possibilités d'écrire une expression algébrique avec les lettres a, b, c, d, e, f, dans n'importe quel ordre, chaque lettre n'étant prise qu'une seule fois, sachant qu'entre deux lettres doit figurer un signe + ou un signe – ?

Exemples :

$d + b - f - a + c + e$
$c - d - b - e + a + f$

Exercice 1.5.5

Une élève doit choisir 3 animaux qu'elle pourra emmener demain avec elle à l'école (ordre sans importance). Elle possède 13 animaux : 7 éléphants roses et 6 dragons.

a) De combien de façons différentes peut-elle choisir ces 3 animaux ?
b) Combien a-t-elle de choix possibles si elle désire prendre 1 dragon et 2 éléphants roses ?

Exercice 1.5.6

On dispose des lettres de A à Z et des chiffres de 0 à 9 pour former des codes de 6 caractères.

a) Si les répétitions sont permises, combien peut-on former de codes ?
b) Si les répétitions ne sont pas permises, combien peut-on former de codes ?
c) Si les répétitions sont permises, combien peut-on former de codes qui contiennent la lettre Q ?
d) Si les répétitions ne sont pas permises, combien peut-on former de codes qui contiennent la lettre Q ?

Exercice 1.5.7

Combien de jurys de 3 hommes et 4 femmes peut-on former à partir de 8 hommes et de 6 femmes ? On suppose que l'ordre est sans importance.

Exercice 1.5.8

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot **ENTETEMENTS** ?
b) Combien commencent par la lettre E ?
c) Combien ne commencent pas par N ?
d) Combien finissent par S ou par T ?
e) Combien ont les trois T côte à côte ?

Exercice 1.5.9

a) Combien y a-t-il de possibilités de programmer 4 examens sur une période de 8 jours, à raison d'un seul par jour ?
b) Et si le dernier examen doit obligatoirement être passé le 8e jour ?

On suppose que l'ordre est sans importance.

Exercice 1.5.10

a) Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former, si chaque chiffre doit être plus grand que le précédent (de gauche à droite) ?
b) Et si chaque chiffre doit être plus petit que le précédent ?

Exercice 1.5.11

Calculer le nombre de possibilités pour un tiercé avec 15 chevaux. Distinguer :

a) le tiercé dans l'ordre ;
b) le tiercé dans le désordre.

Exercice 1.5.12

D'un jeu de 36 cartes, Pierre tire 5 cartes.
Valeurs : (6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As)
avec 4 catégories (cœur, carreau, trèfle et pique).
L'ordre des 5 cartes est jugé sans importance.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
b) Combien contiennent exactement un As ?
c) Combien contiennent au moins un As ?
d) Combien contiennent au moins 3 As ?
e) Combien contiennent l'As de pique ?
f) Combien ne contiennent pas l'As de carreau ?
g) Combien contiennent 3 piques et 2 cœurs ?
h) Combien ne contiennent pas de trèfles ?
i) Combien contiennent au moins un cœur ?
j) Combien contiennent exactement un cœur ?

Exercice 1.5.13

Soient Jean, Pierre, Hugues, Anne, Chantal et Sophie : 6 personnes qui vont s'asseoir sur un banc (banc rectiligne à six places).

a) Combien y a-t-il de possibilités ?
b) Et si Jean veut être à côté de Sophie ?
c) Et si les garçons veulent être à gauche et les filles à droite ?
d) Et si les garçons veulent rester groupés ?
e) Et si les garçons veulent occuper les places paires ?
f) Et si Jean veut être placé tout à gauche du banc ?
g) Et si Jean veut être près de Sophie et à sa droite ?
h) Et si Jean ne veut pas être à côté de Chantal ?
i) Et si les personnes sont placées dans l'ordre alphabétique ?
j) Et si Pierre veut être entre Anne et Chantal ?
k) Et si Pierre ne veut pas être en bout de banc ?
l) Et si Jean, Pierre et Hugues veulent rester ensemble et dans cet ordre là ?

Exercice 1.5.14

Dans un ensemble de 25 personnes, de combien de manières peut-on en sélectionner 3 pour former un comité composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier ?

Exercice 1.5.15

a) Combien d'anagrammes du mot **ANAGRAMMES** existe-t-il ?
b) Combien commencent par A ?
c) Combien finissent par N ?
d) Combien commencent par M ?
e) Combien commencent par AME ?
f) Combien commencent par ANA ?
g) Combien commencent par A et finissent par S ?
h) Combien ont les voyelles au début ?
i) Combien ne commencent pas par G ?
j) Combien finissent par M ou par S ?
k) Combien ont les trois A côte à côte (groupés) ?
l) Combien ont les lettres classées dans l'ordre alphabétique ?
m) Combien commencent par A ou finissent par S ?
n) Combien commencent par RARE ?

Exercice 1.5.16

Combien y a-t-il de nombres entiers de 3 chiffres ?

Exercice 1.5.17

De combien de manières un enfant peut-il aligner 10 cubes de couleurs différentes ?

Exercice 1.5.18

15 filles et 9 garçons forment une classe.
Le professeur veut envoyer la moitié des élèves travailler à la bibliothèque.
Dénombrer les possibilités s'il veut que cette moitié :

a) comporte 3 filles et 9 garçons ;
b) ne comporte que des filles ;
c) comporte 6 filles et 6 garçons ;
d) comporte au moins un garçon ;
e) comporte au plus 5 filles.

Exercice 1.5.19

D'une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires, on extrait successivement toutes les boules. On s'intéresse à l'ordre dans lequel peuvent apparaître les boules. Combien y a-t-il de possibilités si on ne distingue pas entre elles les boules d'une même couleur ?

Exercice 1.5.20

À l'écrit d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10 qui figurent sur une feuille.

a) Combien de possibilités a-t-il ?
b) Combien de possibilités a-t-il s'il doit répondre aux 3 premières questions ?

Exercice 1.5.21

On désire que 5 hommes et 4 femmes s'assoient sur un banc de neuf places, de manière à ce que les femmes occupent les places paires. Combien y a-t-il de dispositions satisfaisant cette condition ?

Exercice 1.5.22

Sachant que les personnes de même nationalité s'assoient les unes à côté des autres, de combien de façons 3 Américains, 4 Français, 4 Danois et 2 Italiens peuvent-ils prendre place sur un banc ?

Exercice 1.5.23

On veut permuter les lettres du mot **ATRABILAIRE**
Combien y a-t-il de possibilités

a) sans contrainte supplémentaire ?
b) avec un A au début ou à la fin ?
c) avec une autre lettre que R en troisième position ?
d) avec les voyelles contiguës ?
e) avec les trois A contigus et les deux R contigus ?

Exercice 1.5.24

Parmi 12 personnes, il faut en choisir 5 pour former un groupe de travail. Ce groupe devra comporter un président, un secrétaire et trois personnes sans fonction particulière. Chacune des 12 personnes est considérée comme digne de remplir n'importe quelle fonction dans ce groupe. Combien y a-t-il de possibilités de le former ?

Exercice 1.5.25

a) Devant un troupeau de 20 moutons, un loup se dit : « Je vais en tuer 7 au hasard ». Combien de choix possibles, si l'ordre n'a pas d'importance ?

b) Devant un troupeau de 20 moutons, un loup se dit : « Je ne vais en laisser vivants que 13 au hasard ». Combien de choix possibles, si l'ordre n'a pas d'importance ?

c) En déduire la formule : $C_r^n = C_{n-r}^n$

Exercice 1.5.26

On veut aligner 3 pièces de monnaie : une de 1 Franc, une de 2 Francs et une de 5 Francs. Chaque pièce peut être posée côté Pile ou côté Face. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 1.5.27

La langue française comporte 31'000 noms communs, dont 17'000 de genre masculin et 14'000 de genre féminin. Pour réaliser l'égalité des genres, une militante de la parité souhaite transformer 1'500 noms masculins en noms féminins. Donner une formule, sans la calculer, permettant de dénombrer les possibilités d'effectuer cette opération, sachant que le changement de genre est envisageable pour n'importe quel mot.

Exercice 1.5.28

Un vieillard dispose de deux bocaux de bonbons empoisonnés : des bleus et des roses. Il veut puiser dans ces bocaux pour composer des sachets de 10 bonbons, qu'il compte offrir à ses petits-enfants. Combien de sortes de sachets peut-il préparer ?

Exercice 1.5.29

Avec un alphabet de 64 symboles, on veut construire des codes dont la longueur ne dépasse pas 1'000 symboles. Donner le nombre de possibilités en notation scientifique avec 3 chiffres significatifs.

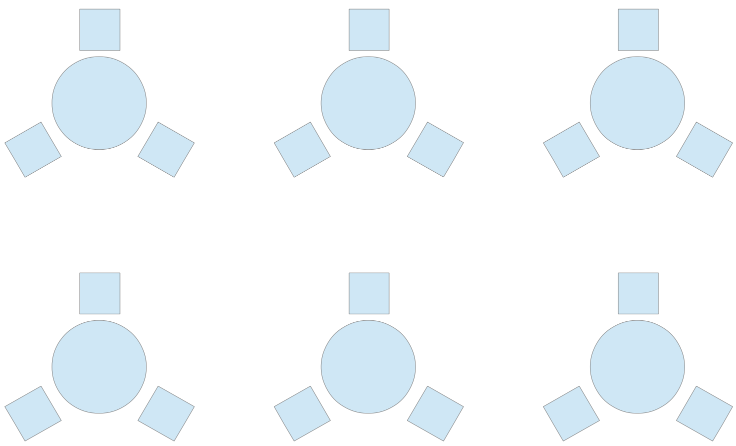
Exercice 1.5.30

Une Hydre à 9 têtes rencontre un Balaur à 12 têtes. De combien de manières peuvent-ils se faire des baisers sur les bouches ?

[*Décomposer en plusieurs cas. Une bouche contre une bouche ; deux bouches contre deux bouches ; trois bouches contre trois bouches ; etc.*]

Exercice 1.5.31

Disposer de toutes les manières possibles 3 personnes A, B, C autour de cette table.



Si nous ne voulons pas différencier les dispositions qui restent les mêmes après une rotation, combien avons-nous de possibilités ?

Nous parlons alors de permutations circulaires.

Le nombre de permutations circulaires s'obtient ici en divisant 6 par ....

Généralisation : Le nombre de permutations circulaires de *n* objets différents vaut :

n! divisé par ...., ce qui donne ....

Exercice 1.5.32

En guise de clin d'œil au « Bourgeois gentilhomme » de Molière, parmi les permutations des 4 éléments de la phrase suivante :

vos yeux 1	me font 2	mourir 3	d'amour 4

trouver toutes celles qui ne laissent aucun élément à sa place d'origine.

De telles permutations s'appellent des dérangements.

Le nombre de dérangements de *n* éléments s'appelle la sous-factorielle de *n*.

On la note $!n$

La formule suivante permet son calcul :

$$!n = n! \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

on peut aussi l'obtenir grâce à une relation de récurrence :

$!1=0$ et $!n = n \cdot \{!(n-1)\} + (-1)^n$

Exercice 1.5.33

De combien de manières peuvent rimer ou ne pas rimer les vers d'une strophe

a) de 3 vers (tercet) ?
b) de 4 vers (quatrain) ?
c) de 5 vers (quintil) ?

Exercice 1.5.34

Considérons un ensemble formé de 7 personnes de sexe masculin et de 5 personnes du beau sexe. Combien y a-t-il de possibilités de choisir parmi elles :
a) un président et un trésorier ?
b) une présidente et une trésorière ?
c) un président et une trésorière ?
d) un président et un trésorier mâle ?
e) un président et un trésorier mâles ?

Exercice 1.5.35

Parmi les $\frac{14!}{5!3!3!}=20'180'160$ anagrammes de **DABADABADABOUM**, combien contiennent au moins une fois :

a) la séquence **BOUM**
b) la séquence **DABA**
c) la séquence **BAD**
d) la séquence **AAA**
e) la séquence **AA**

Exercice 1.5.36

En puisant dans les 15 lettres qui forment le mot **ASSASSINASSIONS**, combien peut-on former de mots de 8 lettres ?

Exercice 1.5.37

Parmi les nombres entiers compris entre 1 et 1 milliard, combien ne contiennent aucun chiffre plus de 3 fois ?

Exercice 1.5.38

À partir d'un ensemble de 26 lettres et de 10 chiffres, on veut composer un code de longueur 13. Il doit contenir 8 lettres et 5 chiffres. Les répétitions sont permises. Toute position dans le code peut recevoir une lettre ou un chiffre. Dénombrer les possibilités.

Exercice 1.5.39

Soit l'alphabet de 26 lettres. Combien y a-t-il de mots d'une longueur de 15 lettres, sachant que les répétitions ne sont autorisées que pour les 6 voyelles et qu'une lettre répétée ne peut pas être présente plus de 5 fois dans un mot ?

Exercice 1.5.40

Combien y a-t-il d'anagrammes de AAAABBBCDEFGHIJK si on fixe comme contrainte que deux lettres identiques ne doivent jamais être voisines ?

Exercice 1.5.41

10 serpents de 10 couleurs différentes sont dans une fosse. Chaque bouche mord une queue. Sachant qu'un serpent peut mordre sa propre queue ou celle d'un autre serpent, dénombrer toutes les configurations possibles (on différencie les serpents, mais l'ensemble des multiples cycles qui forment une configuration n'est pas ordonné). Par exemple, le nombre de configurations dans le cas {1 cycle de 6 serpents et 1 cycle de 4 serpents} vaut $C_6^{10} \cdot 5!\,3!$

*

Solutions

Exercice 1.5.1

a) $A_7^{20}=390'700'800$
b) $C_4^{10}\cdot C_3^{20}=239'400$

Exercice 1.5.2

$C_2^{20}=190$

Exercice 1.5.3

a) $C_5^{18}=8'568$
b) $C_2^{2}\cdot C_3^{16}=560$
c) $C_5^{16}=4'368$
d) $C_1^{2}\cdot C_4^{16}=3'640$

Exercice 1.5.4

$P^6\cdot\overline{A_5^2}=6!\cdot 2^5=23'040$

Exercice 1.5.5

a) $C_3^{13}=286$
b) $C_1^{6}\cdot C_2^{7}=126$

Exercice 1.5.6

a) $\overline{A_6^{36}}=36^6=2'176'782'336$
b) $A_6^{36}=1'402'410'240$
c) $\overline{A_6^{36}}-\overline{A_6^{35}}=36^6-35^6=338'516'711$
d) $A_6^{36}-A_6^{35}=233'735'040$

Exercice 1.5.7

$C_3^{8}\cdot C_4^{6}=840$

Exercice 1.5.8

11 lettres, dont 4 E, 2 N et 3 T

a) $\frac{11!}{4!\cdot 2!\cdot 3!}=138'600$

b) $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 3!}=50'400$

c) $\frac{11!}{4!\cdot 2!\cdot 3!}-\frac{10!}{4!\cdot 3!}=113'400$

d) $\frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 3!}+\frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}=50'400$

e) $\frac{9!}{4!\cdot 2!}=7'560$

Exercice 1.5.9

a) $C_4^8=70$

b) $C_3^7=35$

Exercice 1.5.10

a) $C_4^9=126$

b) $C_4^{10}=210$

Exercice 1.5.11

a) $A_3^{15}=2'730$

b) $C_3^{15}=455$

Exercice 1.5.12

a) $C_5^{36}=376'992$
b) $C_1^4 \cdot C_4^{32}=143'840$
c) $C_5^{36}-C_5^{32}=175'616$
d) $C_3^4 \cdot C_2^{32}+C_4^4 \cdot C_1^{32}=2'016$
e) $C_1^1 \cdot C_4^{35}=52'360$
f) $C_5^{35}=324'632$
g) $C_3^9 \cdot C_2^9=3'024$
h) $C_5^{27}=80'730$
i) $C_5^{36}-C_5^{27}=296'262$
j) $C_1^9 \cdot C_4^{27}=157'950$

Exercice 1.5.13

a) $P^6=6!=720$
b) $P^5 \cdot P^2=5! \cdot 2!=240$
c) $P^3 \cdot P^3=3! \cdot 3!=36$
d) $P^4 \cdot P^3=4! \cdot 3!=144$
e) $P^3 \cdot P^3=3! \cdot 3!=36$
f) $P^5=5!=120$
g) $P^5=5!=120$
h) $P^6-P^5 \cdot P^2=6!-5! \cdot 2!=480$
i) 1
j) $2 \cdot P^4=2 \cdot 4!=48$
k) $P^6-2 \cdot P^5=6!-2 \cdot 5!=480$
l) $P^4=4!=24$

Exercice 1.5.14

$A_3^{25}=13'800$

Exercice 1.5.15

10 lettres, dont 3 A et 2 M

a) $\frac{10!}{3!\cdot 2!}=302'400$

b) $\frac{9!}{2!\cdot 2!}=90'720$

c) $\frac{9!}{3!\cdot 2!}=30'240$

d) $\frac{9!}{3!}=60'480$

e) $\frac{7!}{2!}=2'520$

f) $\frac{7!}{2!}=2'520$

g) $\frac{8!}{2!\cdot 2!}=10'080$

h) $\frac{4!}{3!}\cdot\frac{6!}{2!}=1'440$

i) $\frac{10!}{3!\cdot 2!}-\frac{9!}{3!\cdot 2!}=272'160$

j) $\frac{9!}{3!}+\frac{9!}{3!\cdot 2!}=90'720$

k) $\frac{8!}{2!}=20'160$

l) 1

m) commençant par A : $\frac{9!}{2!\cdot 2!}$

finissant par S : $\frac{9!}{3!\cdot 2!}$

commençant par A et finissant par S : $\frac{8!}{2!\cdot 2!}$

en tout : $\frac{9!}{2!\cdot 2!}+\frac{9!}{3!\cdot 2!}-\frac{8!}{2!\cdot 2!}=110'880$

n) 0

Exercice 1.5.16

Ce sont les nombres de 100 à 999. Il y en a $999-99=900$

Exercice 1.5.17

$P^{10}=10!=3'628'800$

Exercice 1.5.18

a) $C_3^{15}\cdot C_9^9=455$
b) $C_{12}^{15}=455$
c) $C_6^{15}\cdot C_6^9=420'420$
d) $C_{12}^{24}-C_{12}^{15}=2'703'701$
e) $C_9^9\cdot C_3^{15}+C_8^9\cdot C_4^{15}+C_7^9\cdot C_5^{15}=120'848$

Exercice 1.5.19

$\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$

Exercice 1.5.20

a) $C_8^{10}=45$
b) $C_5^7=21$

Exercice 1.5.21

$P^4\cdot P^5=4!\cdot 5!=2'880$

Exercice 1.5.22

$P^4\cdot P^3\cdot P^4\cdot P^4\cdot P^2=4!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!=165'888$

Exercice 1.5.23

a) $\frac{11!}{3!2!2!}=1'663'200$
b) $2\cdot\frac{10!}{2!2!2!}-\frac{9!}{2!2!}=816'480$
c) $\frac{11!}{3!2!2!}-\frac{10!}{3!2!}=1'360'800$
d) $\frac{6!}{2!}\cdot\frac{6!}{3!2!}=21'600$
e) $\frac{8!}{2!}=20'160$

Exercice 1.5.24

$$A_2^{12} \cdot C_3^{10} = 15'840$$

Exercice 1.5.25

a) $C_7^{20} = 77'520$
b) $C_{13}^{20} = 77'520$
c) tuer r moutons parmi n revient au même que laisser vivants $n-r$ moutons parmi n

Exercice 1.5.26

$$3! \cdot 2^3 = 48$$

Exercice 1.5.27

$$C_{1500}^{17000}$$

Exercice 1.5.28

$$\overline{C_{10}^{2}} = 11$$

Exercice 1.5.29

$$\sum_{j=1}^{1000} 64^j = 64 \cdot \frac{64^{1000}-1}{64-1} = \frac{64^{1001}}{63} - \frac{64}{63}$$

La fraction $\frac{64}{63}$, proche de 1, est négligeable si on la compare à $\frac{64^{1001}}{63}$

Calculons : $\log\left(\frac{64^{1001}}{63}\right) = 1001 \cdot \log 64 - \log(63) = 1806.1868$

Ainsi, le nombre cherché est : $10^{1806.1868} = 10^{0.1868} \cdot 10^{1806} = 1.54 \cdot 10^{1806}$

Exercice 1.5.30

$$\sum_{j=1}^{9} C_j^9 \cdot C_j^{12} \cdot P^j = 472'630'860$$

Exercice 1.5.31

(2 permutations circulaires de 3 personnes) $=\frac{P^3}{3}$

Généralisation : $\frac{P^n}{n}=(n-1)!$

Exercice 1.5.32

me font vos yeux d'amour mourir
me font mourir d'amour vos yeux
me font d'amour vos yeux mourir
mourir vos yeux d'amour me font
mourir d'amour vos yeux me font
mourir d'amour me font vos yeux
d'amour vos yeux me font mourir
d'amour mourir vos yeux me font
d'amour mourir me font vos yeux

Exercice 1.5.33

Réponse sous forme de poème

Combien de systèmes de rimes,
De l'emploi de vers monorimes
À l'abandon de toute rime,

Est-il possible d'appliquer
À une strophe de j vers ?
Le résultat est compliqué :

Il s'agit – et je suis formel –
Du j-ème nombre de Bell
(Étudiez la combinatoire !).

Il est à croissance rapide :
Il vaut quinze pour un quatrain,
Cinquante-deux pour un cinquain.

Pour un tercet, voyez vous-même !
Le décompte est vraiment facile,
Si vous m'avez lu jusque là.

Les $B_5 = 52$ manières de rimer ou de ne pas rimer les vers d'une strophe de 5 vers sont représentés par des diagrammes dans un classique de la littérature japonaise : « *Le Dit de Genji* », écrit vers l'an 1000 par Madame Murasaki Shikibu.

Exercice 1.5.34

a) $12 \times 11 = 132$
b) $5 \times 4 = 20$
c) $11 \times 5 = 55$
d) $11 \times 7 = 77$
e) $7 \times 6 = 42$

Exercice 1.5.35

a) le nombre d'anagrammes contenant la séquence **BOUM**
= le nombre de permutations de la liste L = [**BOUM**, A, A, A, A, A, B, B, D, D, D]
= $\frac{11!}{5!2!3!} = 27'720$

b) Soient :

p = le nombre de permutations de la liste L_1 = [**DABA**, **DABA**, A, B, D, M, O, U]
= $\frac{8!}{2!} = 20'160$
q = le nombre de permutations de la liste L_2 = [**DABA**, D, A, B, A, A, B, D, M, O, U]
= $\frac{11!}{3!2!2!} = 1'163'200$

Alors :

Le nombre d'anagrammes contenant **deux fois la séquence DABA** vaut :
p

Le nombre d'anagrammes contenant **exactement une fois la séquence DABA** vaut :
q – 2p
(car l'ensemble des permutations de L_2 fournit en double exemplaire les anagrammes contenant deux fois la séquence DABA)

Et donc :

Le nombre d'anagrammes contenant **au moins une fois la séquence DABA** vaut :
p + q – 2p = – p + q = 1'643'040

c) Soient :

r = le nombre de permutations de la liste L_1 = [**BAD**, **BAD**, **BAD**, A, A, M, O, U]
= $\frac{8!}{3!2!} = 3'360$
s = le nombre de permutations de la liste L_2 = [**BAD**, **BAD**, B, A, D, A, A, M, O, U]
= $\frac{10!}{2!3!} = 302'400$
t = le nombre de permutations de la liste L_3 = [**BAD**, B, A, D, B, A, D, A, A, M, O, U]
= $\frac{12!}{4!2!2!} = 4'989'600$

Alors :

Le nombre d'anagrammes contenant **trois fois la séquence BAD** vaut :
r

Le nombre d'anagrammes contenant **exactement deux fois la séquence BAD** vaut :
s – 3r
(car l'ensemble des permutations de L_2 fournit en triple exemplaire les anagrammes contenant trois fois la séquence BAD)

Le nombre d'anagrammes contenant **exactement une fois la séquence BAD** vaut :
t – 3r – 2(s – 3r) = t – 2s + 3r
(car l'ensemble des permutations de L_3 fournit en triple exemplaire les anagrammes contenant trois fois la séquence BAD et en double exemplaire les anagrammes contenant exactement deux fois la séquence BAD)

Et donc :

Le nombre d'anagrammes contenant **au moins une fois la séquence BAD** vaut :
r + s – 3r + t – 2s + 3r = r – s + t = 4'690'560

d) Soient :

u = le nombre de permutations de la liste L_1 = [**AAAAA**, B, B, B, D, D, D, M, O, U]
= $\frac{10!}{3!3!} = 100'800$
v = le nombre de permutations de la liste L_2 = [**AAAA**, A, B, B, B, D, D, D, M, O, U]
= $\frac{11!}{3!3!} = 1'108'800$
w = le nombre de permutations de la liste L_3 = [**AAA**, A, A, B, B, B, D, D, D, M, O, U]
= $\frac{12!}{2!3!3!} = 6'652'800$

Alors :

Le nombre d'anagrammes contenant **cinq A collés** vaut :
u

Le nombre d'anagrammes contenant **quatre A collés, mais pas cinq**, vaut :
v – 2u
(car l'ensemble des permutations de L_2 fournit en double exemplaire les anagrammes contenant cinq A collés)

Le nombre d'anagrammes contenant **trois A collés, mais ni quatre ni cinq**, vaut :
w – 3u – 2(v – 2u) = w – 2v + u
(car l'ensemble des permutations de L_3 fournit en triple exemplaire les anagrammes contenant cinq A collés et en double exemplaire les anagrammes contenant quatre A collés, mais pas cinq)

Et donc :

Le nombre d'anagrammes contenant **au moins une fois la séquence AAA** vaut :
u + v – 2u + w – 2v + u = – v + w = 5'544'000

e) Aux quantités définies en d), ajoutons :

x = le nombre de permutations de la liste L_4 = [**AAA**, **AA**, B, B, B, D, D, D, M, O, U]

= $\frac{11!}{3!3!} = 1'108'800$

y = le nombre de permutations de la liste L_5 = [**AA**, **AA**, A, B, B, B, D, D, D, M, O, U]

= $\frac{12!}{2!3!3!} = 6'652'800$

z = le nombre de permutations de la liste L_6 = [**AA**, A, A, A, B, B, B, D, D, D, M, O, U]

= $\frac{13!}{3!3!3!} = 28'828'800$

Alors :

Le nombre d'anagrammes contenant **un groupe de trois A collés, séparé d'un groupe de deux A collés**, vaut :

x – 2u

Le nombre d'anagrammes contenant **un groupe de trois A collés et deux A séparés de ce groupe et séparés entre eux**, vaut :

w – 2v + u – (x – 2u) = – x + w – 2v + 3u

Le nombre d'anagrammes contenant **deux groupes séparés de deux A collés et un cinquième A séparé de ces deux groupes**, vaut :

y – 3u – (v – 2u) – 2(x – 2u) = y – 2x – v + 3u

Le nombre d'anagrammes contenant **un seul groupe de deux A collés, et les trois autres A séparés de ce groupe et séparés entre eux**, vaut :

z – 4u – 3(v – u) – 3(x – 2u) – 2(– x + w – 2v + 3u) – 2(y – 2x – v + 3u)
= z – 2y + 3x – 2w + 3v – 7u

Et donc :

Le nombre d'anagrammes contenant **au moins une fois la séquence AA** vaut :

– v + w + y – 2x – v + 3u + z – 2y + 3x – 2w + 3v – 7u
= – 4u + v – w + x – y + z = 17'337'600

Corollaire

Le nombre d'anagrammes de **DABADABADABOUM**, vérifiant la condition :
des A ne sont jamais côte à côte, vaut :

20'180'160 – 17'337'600 = 2'842'560

Exercices 1.5.36 à 1.5.41

Ces exercices sont difficiles...

*

Partie 2 : Probabilités

2.1 Définitions de base

Considérons une expérience dont les résultats possibles forment un ensemble fini Ω que nous baptisons univers. Supposons qu'il n'y ait dans cet univers aucune raison pour qu'un résultat se produise plus souvent qu'un autre : les résultats sont alors dits équiprobables. Considérons maintenant un sous-ensemble (ou partie) A de Ω, défini par un critère. Ce sous-ensemble A reçoit le nom d'événement.

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments qu'il contient.
Notons $\text{card}(A)$ le cardinal de A et $\text{card}(\Omega)$ le cardinal de Ω

Le rapport : $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ s'appelle la probabilité de A, notée $P(A)$

Ainsi, nous avons :

$$P(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Formule 1

Il arrive souvent que Ω soit un ensemble d'ensembles ou un ensemble de listes.
À l'époque où le calcul des probabilités était essentiellement utilisé pour analyser des jeux de hasard, la probabilité de gagner à un jeu était définie

par le rapport : $\frac{\text{nombre de cas favorables à la victoire}}{\text{nombre de cas possibles dans le jeu}}$

Exemple 2.1.1

Expérience : On lance un dé (à 6 faces, comme toujours dans ce cours).

Univers : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
$\text{card}(\Omega)=6$

Événement : A : Le résultat est plus grand que 4
$A = \{5 ; 6\}$
$\text{card}(A)=2$

$$P(A)=\frac{2}{6}=33.33\%$$

Événement : B : Le résultat est pair
$B = \{2 ; 4 ; 6\}$
$\text{card}(B)=3$

$$P(B)=\frac{3}{6}=50\%$$

Exemple 2.1.2

Expérience : On lance une pièce de monnaie 2 fois. On note F quand elle donne « Face » et P quand elle donne « Pile ».

Univers : $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$
$\text{card}(\Omega)=4$

Événement : A : La pièce donne au moins une fois P
$A = \{PP ; PF ; FP\}$
$\text{card}(A)=3$

$$P(A)=\frac{3}{4}=75\%$$

Exemple 2.1.3

Le tableau suivant classe le personnel d'une entreprise en fonction de 2 critères.

	Cadres	**Ouvriers**	**Totaux**
Hommes	100	200	300
Femmes	50	150	200
Totaux	150	350	500

a) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans cette entreprise soit un ouvrier ?

Univers : Ω = ensemble du personnel
$\text{card}(\Omega)=500$
Événement : A = sous-ensemble des ouvriers
$\text{card}(A)=350$

$$P(A)=\frac{350}{500}=70\,\%$$

b) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans cette entreprise soit une femme cadre ?

Univers : Ω = ensemble du personnel
$\text{card}(\Omega)=500$
Événement : B = sous-ensemble des femmes cadres
$\text{card}(B)=50$

$$P(B)=\frac{50}{500}=10\%$$

c) Quelle est la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans cette entreprise soit un ouvrier ?

Univers : V = ensemble du personnel masculin
$\text{card}(V)=300$
Événement : C = sous-ensemble des ouvriers dans V
$\text{card}(C)=200$

$$P(C)=\frac{200}{300}=66.67\,\%$$

d) Quelle est la probabilité qu'un cadre choisi au hasard dans cette entreprise soit une femme ?

Univers : W = ensemble du personnel cadre
$\text{card}(W) = 150$

Événement : D = sous-ensemble des femmes dans W
$\text{card}(D) = 50$

$$P(D) = \frac{50}{150} = 33.33\%$$

*

Exercice 2.1.1

On lance un dé. Quelle est la probabilité que le résultat soit un nombre premier ?

Exercice 2.1.2

Une roue de 26 lettres permet de tirer au hasard une lettre de l'alphabet. Quelle est la probabilité que le résultat soit une lettre du mot « ROUE » ?

Exercice 2.1.3

On tire au hasard une carte d'un jeu de 52. Quelle est la probabilité que cette carte

a) soit un cœur ?
b) soit un as ?
c) soit une habillée ? [carte habillée = Roi, Reine ou Valet]
d) soit rouge ?
e) soit une reine noire ?
f) ne soit pas un 10 ?

Exercice 2.1.4

Paradoxe de Simpson. Soit le tableau suivant :

École A	**Effectifs**	**Nb de réussites**
Garçons	87	81
Filles	270	234
Totaux	357	315
École B	**Effectifs**	**Nb de réussites**
Garçons	263	192
Filles	80	55
Totaux	343	247

a) Pour chaque école, calculer la probabilité de réussite
- d'un garçon,
- d'une fille,
- d'un élève quelconque.

b) Même question pour l'ensemble formé par la réunion des deux écoles A et B.

Exercice 2.1.5

À bord d'un navire en détresse, on dénombre
195 hommes, dont 12 savent nager, et 45 femmes, dont 9 savent nager.

a) Considérons une personne prise au hasard sur ce bateau.
Quelle est la probabilité qu'elle sache nager ?

b) Considérons une femme prise au hasard sur ce bateau.
Quelle est la probabilité qu'elle ne sache pas nager ?

Exercice 2.1.6

La roulette est un jeu de casino. La roulette comporte 37 numéros : de 0 à 36. Il n'est possible de miser que sur ceux de 1 à 36. Quand le 0 sort, tous les jetons vont au casino.

Plutôt que de miser sur un seul numéro, il est possible par exemple de miser

- sur « pair », c-à-d l'ensemble des numéros pairs (0 étant exclu)
- sur « impair », c-à-d l'ensemble des numéros impairs
- sur « manque », c-à-d l'ensemble des numéros de 1 à 18
- sur « passe », c-à-d l'ensemble des numéros de 19 à 36
- sur « rouge », c-à-d l'ensemble des numéros
  1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36
- sur « noir », c-à-d l'ensemble des numéros
  2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35

Calculer la probabilité de chaque événement suivant :

A : le numéro gagnant est 13
B : le numéro gagnant est impair
C : le numéro gagnant est passe
D : le numéro gagnant est rouge et pair
E : le numéro gagnant est noir et manque
F : le numéro gagnant est rouge, impair et passe

Exercice 2.1.7

On lance une pièce de monnaie 3 fois. L'ordre des résultats nous importe.

a) Énumérer les éléments de l'univers Ω de cette expérience.
b) Énumérer les éléments de A : la pièce donne Face au 2e jet,
et calculer $P(A)$
c) Énumérer les éléments de B : le 1er et le 3e jets donnent le même résultat,
et calculer $P(B)$
d) Énumérer les éléments de C : il y a au plus un Pile dans la séquence donnée par les 3 jets,
et calculer $P(C)$
e) Énumérer les éléments de D : le 1er et le 2e jets donnent un résultat différent,
et calculer $P(D)$

Exercice 2.1.8

Dans un zoo, il y a trois classes d'animaux : des mammifères, des oiseaux et des reptiles. On compte en tout 240 animaux, dont 150 mâles. La moitié des femelles sont des mammifères ; 20 % des mâles sont des mammifères ; 40 mâles sont des reptiles ; 30 % des femelles sont des reptiles.

a) Compléter le tableau.

	Mammifères	Oiseaux	Reptiles	*Totaux*
Mâles				
Femelles				
Totaux				

b) On choisit un animal au hasard. Quelle est la probabilité que cet animal soit :
- b1) un mâle ?
- b2) un oiseau femelle ?
- b3) un reptile mâle ?
- b4) un oiseau ?

c) On choisit un oiseau au hasard. Quelle est la probabilité que cet oiseau soit une femelle ?
d) On choisit une femelle au hasard. Quelle est la probabilité que cette femelle soit un mammifère ?

Exercice 2.1.9

Expérience : soit un ensemble de 3 garçons (Bob, Jim, Max) et 2 filles (Léa, Zoé). De cet ensemble de 5 personnes, on en tire au sort 2. L'ordre compte.

a) Former l'univers Ω_1 des listes de 2 personnes. Quelle est le cardinal de cet univers ? Dans cet univers, les résultats sont-ils équiprobables ?

b) Former l'univers Ω_2 des listes de 2 catégories de genres : G pour garçon et F pour fille. Quelle est le cardinal de cet univers ? Dans cet univers, les résultats sont-ils équiprobables ?

*

Solutions

Exercice 2.1.1

3/6

Exercice 2.1.2

4/26

Exercice 2.1.3

a) 13/52
b) 4/52
c) 12/52
d) 26/52
e) 2/52
f) 48/52

Exercice 2.1.4

a)	A :	93.10 %	86.67 %	88.24 %
	B :	73.00 %	68.75 %	72.01 %
b)	A union B :			
		78.00 %	82.57 %	80.29 %

Observations : Dans les écoles A et B, les garçons réussissent mieux que les filles. Mais si on réunit les deux écoles, on constate que les filles réussissent mieux que les garçons.

Exercice 2.1.5

a) 8.75 %
b) 80 %

Exercice 2.1.6

$P(A)=1/37$
$P(B)=18/37$
$P(C)=18/37$
$P(D)=8/37$
$P(E)=9/37$
$P(F)=5/37$

Exercice 2.1.7

a) Ω = {PPP ; PPF ; PFP ; PFF ; FPP ; FPF ; FFP ; FFF}
b) A = {PFP ; PFF ; FFP ; FFF} $P(A)=4/8$
c) B = {PPP ; PFP ; FPF; FFF} $P(B)=4/8$
d) C = {PFF ; FPF ; FFP ; FFF} $P(C)=4/8$
e) D = {PFP ; PFF ; FPP ; FPF} $P(D)=4/8$

Exercice 2.1.8

a)

	Mammifères	Oiseaux	Reptiles	*Totaux*
Mâles	30	80	40	150
Femelles	45	18	27	90
Totaux	75	98	67	240

b1) un mâle ? 150/240 = 62.5 %
b2) un oiseau femelle ? 18/240 = 7.5 %
b3) un reptile mâle ? 40/240 = 16.7 %
b4) un oiseau ? 98/240 = 40.8 %
c) 18/98 = 18.4 %
d) 45/90 = 50 %

Exercice 2.1.9

a) Ω_1 = {BJ ; BM ; BL ; BZ ; JB ; JM ; JL ; JZ ; MB ; MJ ; ML ; MZ ; LB ; LJ ; LM ; LZ ; ZB ; ZJ ; ZM ; ZL}
$\text{card}(\Omega_1)=20$ résultats équiprobables
b) Ω_2 = {GG ; GF ; FG ; FF}
$\text{card}(\Omega_2)=4$ résultats non équiprobables

*

2.2 Dénombrement parmi des résultats équiprobables

Dans cette division, nous allons examiner sur quelques exemples comment les arrangements et les combinaisons peuvent permettre le calcul de certaines probabilités.

Exemple 2.2.1

Expérience : On lance une pièce de monnaie 5 fois. On note F quand elle donne « Face » et P quand elle donne « Pile », par exemple un résultat possible est FPFPP.

Univers : Ω est l'ensemble des « mots » de 5 lettres qu'on peut former à partir d'un alphabet de 2 lettres.

$\text{card}(\Omega)=\overline{A_5^2}=2^5=32$

Événement : A : F apparaît exactement 3 fois.

A = {FFFPP ; FFPFP ; etc.}

$\text{card}(A)=C_3^5=10$

(il faut choisir 3 positions parmi 5 pour écrire F)

$$P(A)=\frac{10}{32}=31.25\%$$

Remarque : Au lieu de lancer la pièce 5 fois de suite, il est possible de lancer 5 pièces identiques en une seule fois et de considérer dans Ω des combinaisons avec répétitions plutôt que des arrangements avec répétitions. Mais cela pose un problème. Des résultats sous forme de combinaisons avec répétitions ne sont pas équiprobables. Par exemple {{F ; P ; P ; P ; P}} se produit 5 fois plus souvent que {{P ; P ; P ; P ; P}}, car, même si nous ne distinguons pas visuellement les 5 pièces, ce sont physiquement 5 objets différents ; ainsi, le F peut être produit par chacune des 5 pièces. Or la formule $P(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ n'est valable que dans une situation d'équiprobabilité des résultats.

Exemple 2.2.2

Expérience : On lance un dé 5 fois. On note la liste des points obtenus, par exemple un résultat possible est 26244.

Univers : Ω est l'ensemble des « mots » de 5 symboles qu'on peut former à partir d'un alphabet de 6 symboles (les 6 chiffres de 1 à 6).

$\text{card}(\Omega)=\overline{A_5^6}=6^5=7'776$

Événement : A : Le symbole 2 apparaît exactement 3 fois.

A = {22234 ; 22352 ; 62622 ; etc.}

$\text{card}(A)=C_3^5 \cdot 5^2=250$

(il faut choisir 3 positions parmi 5 pour écrire 2 ; les 2 positions restantes peuvent chacune être occupées par 5 symboles)

$$P(A)=\frac{250}{7'776}=3.22\,\%$$

Remarque : La remarque de l'exemple précédent peut être transposée à cette expérience.

Exemple 2.2.3

Expérience : On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 52. L'ordre compte, donc les résultats sont des arrangements simples, par exemple [6 ♠ ; K ♣ ; Q ♠ ; 6 ♥ ; 3 ♦].

Univers : Ω est l'ensemble des arrangements simples de 5 cartes parmi 52.

$\text{card}(\Omega)=A_5^{52}=311'875'200$

Événement : A : La séquence de 5 cartes comporte exactement 3 cœurs.

$\text{card}(A)=C_3^5 \cdot A_3^{13} \cdot A_2^{39}=25'431'120$

(il faut choisir 3 positions parmi 5 pour les cœurs ; ces positions peuvent être occupées de A_3^{13} manières, puisqu'il y a 13 cœurs dans un jeu de 52 cartes ; les 2 positions restantes peuvent être occupées de A_2^{39} manières, puisqu'il faut prendre 2 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des cœurs)

$$P(A)=\frac{25'431'120}{311'875'200}=8.15\,\%$$

Exemple 2.2.4

Expérience : On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 52. L'ordre ne compte pas, donc les résultats sont des combinaisons simples.

Univers : Ω est l'ensemble des combinaisons simples de 5 cartes parmi 52.
$\text{card}(\Omega)=C_5^{52}=2'598'960$

Événement : A : L'ensemble de 5 cartes (on parle de « main ») comporte exactement 3 cœurs.
$\text{card}(A)=C_3^{13}\cdot C_2^{39}=211'926$
(il faut choisir 3 cartes parmi les 13 cœurs et 2 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des cœurs)

$$P(A)=\frac{211'926}{2'598'960}=8.15\%$$

Remarque : Que l'ordre compte ou non, nous constatons que la probabilité est la même dans les exemples 2.2.3 et 2.2.4.

Exemple 2.2.5

Expérience : D'un jeu de 52 cartes, on tire au hasard 5 fois une carte. Après chaque tirage, on note le nom de la carte (par exemple dame de cœur), on la remet dans le paquet qu'on mélange avant de procéder à un nouveau tirage au hasard. On parle de tirage avec remise.

Univers : Ω est l'ensemble des arrangements avec répétitions de 5 cartes parmi 52.

$\text{card}(\Omega)=\overline{A}_5^{52}=52^5=380'204'032$

Événement : A : La séquence de 5 cartes comporte exactement 3 cœurs.
$\text{card}(A)=C_3^5\cdot 13^3\cdot 39^3=33'416'370$
(il faut choisir 3 positions parmi 5 pour les cœurs ; ces positions peuvent être occupées de 13^3 manières, puisqu'il y a 13 cœurs dans un jeu de 52 cartes ; les 2 positions restantes peuvent être occupées de 39^2 manières, puisqu'il faut prendre 2 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des cœurs)

$$P(A)=\frac{33'416'370}{380'204'032}=8.79\%$$

Exercice 2.2.1

On lance 4 pièces de monnaie (ces pièces sont distinguées). Trouver les probabilités des événements suivants :

A : Elles donnent les quatre « Face ».
B : Une seule pièce donne « Pile ».
C : Il y a autant de « Pile » que de « Face ».
D : Il y a au plus un « Pile ».
E : Il y a au moins un « Pile ».

Exercice 2.2.2

Une pièce de monnaie est lancée 5 fois. L'ordre des résultats nous importe.
Quelle est la probabilité que « Face » apparaisse un nombre impair de fois ?

Exercice 2.2.3

On lance 2 dés (qu'on distingue l'un de l'autre). Trouver les probabilités des événements suivants :

A : La somme des points fait 2.
B : La somme des points fait 6.
C : La somme des points est différente de 11.
D : La différence des points vaut 2.
E : Le rapport des points vaut 2.
F : Les 2 dés donnent le même résultat.

Exercice 2.2.4

On lance un dé 3 fois. Calculer la probabilité que la séquence (l'ordre compte) soit composée de 3 chiffres différents.

Exercice 2.2.5

Mallarmé écrivait : « Un coup de dés jamais n'abolira le hasard ».
Bienaimé croit que si un dé tombe 3 fois de suite sur 6 le diable apparaîtra.

a) Quelle est la probabilité que le 6 apparaisse 3 fois en 3 jets ?
b) Quelle est la probabilité que le 6 apparaisse au moins 3 fois de suite en 4 jets ?

Exercice 2.2.6

D’un jeu de 52 cartes, on tire une « main » de 5 cartes (l’ordre ne compte pas et il n’y a pas de remise). Calculer les probabilités des événements suivants :

A : Toutes les cartes sont des piques.
B : Toutes les cartes sont rouges.
C : Il y a 3 valets et 2 as.
D : Il y a exactement 2 trèfles.
E : Il y a un carré (4 as ou 4 rois ou 4 reines, etc.).
F : Il y a 4 carreaux et 1 cœur.
G : Il y a un full (1 brelan et 1 paire)
H : Il y a 2 paires.

Exercice 2.2.7

D’un jeu de 52 cartes, on fait 5 fois un tirage avec remise. À chaque tirage, on note sur une liste le nom de la carte qui apparaît. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : La liste comporte 5 cartes identiques.
B : La liste ne comporte que des cartes différentes.
C : La liste comporte 5 cœurs.
D : La liste comporte 5 valets.
E : La liste comporte exactement 3 valets.
F : La liste comporte 3 rois et 2 reines.
G : La liste comporte 3 cœurs et 2 piques.
H : La liste commence par l’as de cœur.
I : La liste commence par un as.
J : La liste commence par 2 as.

Exercice 2.2.8

Un programme informatique mélange au hasard les lettres du mot ASSASSINS. Quelle est la probabilité que le résultat soit un « mot » commençant par A et finissant par S ?

Exercice 2.2.9

Monsieur Martin a 2 billets non numérotés pour le concert d’un artiste qu’il déteste : « un chanteur, dit-il, qui abrutit les foules ». Il veut offrir ces billets à 2 élèves tirés au sort dans sa meilleure classe, qui comporte 14 garçons et 11 filles. Quelle est la probabilité que les bénéficiaires des billets soient de sexe opposé ?

Exercice 2.2.10

22 poulets blancs et 16 poulets noirs sont stockés dans le congélateur du *Restaurant Poulaga*. Le chef sort au hasard deux poulets de ce congélateur. L'ordre ne compte pas.

Calculer les probabilités des événements suivants :

E = Les deux poulets sont blancs.
F = Les deux poulets sont de couleurs différentes.
G = Les deux poulets sont de la même couleur.

*

Solutions

Exercice 2.2.1

$$P(A)=\frac{1}{\overline{A}_4^2}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$
$$P(B)=\frac{C_1^4}{\overline{A}_4^2}=\frac{4}{16}$$
$$P(C)=\frac{C_2^4}{\overline{A}_4^2}=\frac{6}{16}$$
$$P(D)=\frac{C_0^4+C_1^4}{\overline{A}_4^2}=\frac{5}{16}$$
$$P(E)=\frac{\overline{A}_4^2-C_0^4}{\overline{A}_4^2}=\frac{15}{16}$$

Exercice 2.2.2

$$\frac{C_1^5+C_3^5+C_5^5}{\overline{A}_5^2}=\frac{16}{32}$$

Exercice 2.2.3

$$\text{card}(\Omega)=\overline{A}_2^6=6^2=36$$
$$P(A)=1/36$$
$$P(B)=5/36$$
$$P(C)=34/36$$
$$P(D)=8/36$$
$$P(E)=6/36$$
$$P(F)=6/36$$

Exercice 2.2.4

$$\frac{A_3^6}{\overline{A}_3^6}=\frac{120}{6^3}=\frac{120}{216}$$

Exercice 2.2.5

a) $\frac{1}{\overline{A}_3^6}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$

b) $\frac{10+1}{6^4}=\frac{11}{1'296}$

Exercice 2.2.6

$$P(A)=\frac{C_5^{13}}{C_5^{52}}=0.0495\,\%$$

$$P(B)=\frac{C_5^{26}}{C_5^{52}}=2.53\,\%$$

$$P(C)=\frac{C_3^4\cdot C_2^4}{C_5^{52}}=0.000923\,\%$$

$$P(D)=\frac{C_2^{13}\cdot C_3^{39}}{C_5^{52}}=27.43\,\%$$

$$P(E)=\frac{C_1^{13}\cdot C_1^{48}}{C_5^{52}}=0.024\,\%$$

$$P(F)=\frac{C_4^{13}\cdot C_1^{13}}{C_5^{52}}=0.358\,\%$$

$$P(G)=\frac{C_1^{13}\cdot C_3^4\cdot C_1^{12}\cdot C_2^4}{C_5^{52}}=0.144\,\%$$

$$P(H)=\frac{C_2^{13}\cdot C_2^4\cdot C_2^4\cdot C_1^{44}}{C_5^{52}}=4.75\,\%$$

Exercice 2.2.7

$$P(A)=\frac{C_1^{52}}{\overline{A}_5^{52}}=\frac{52}{52^5}=0.000014\,\%$$

$$P(B)=\frac{A_5^{52}}{\overline{A}_5^{52}}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{52^5}=82.03\,\%$$

$$P(C)=\frac{\overline{A}_5^{13}}{\overline{A}_5^{52}}=\frac{13^5}{52^5}=0.098\,\%$$

$$P(D)=\frac{\overline{A}_5^{4}}{\overline{A}_5^{52}}=\frac{4^5}{52^5}=0.00027\,\%$$

$$P(F)=\frac{C_3^5\cdot \overline{A}_3^4\cdot \overline{A}_2^4}{\overline{A}_5^{52}}=\frac{10\cdot 4^3\cdot 4^2}{52^5}=0.0027\,\%$$

$$P(G)=\frac{C_3^5\cdot \overline{A}_3^{13}\cdot \overline{A}_2^{13}}{\overline{A}_5^{52}}=\frac{10\cdot 13^3\cdot 13^2}{52^5}=0.977\,\%$$

$$P(H)=\frac{C_1^1\cdot \overline{A}_4^{52}}{\overline{A}_5^{52}}=\frac{52^4}{52^5}=1.92\,\%$$

$$P(I)=\frac{C_1^4\cdot \overline{A}_4^{52}}{\overline{A}_5^{52}}=\frac{4\cdot 52^4}{52^5}=7.69\,\%$$

$$P(J)=\frac{\overline{A}_2^4\cdot \overline{A}_3^{52}}{\overline{A}_5^{52}}=\frac{4^2\cdot 52^3}{52^5}=0.592\,\%$$

Exercice 2.2.8

Le mot comporte 9 lettres, dont 2 A et 5 S. La probabilité demandée vaut :

$$\frac{7!/4!}{9!/(2!\cdot 5!)}=\frac{210}{1'512}=13.89\,\%$$

Exercice 2.2.9

$$\frac{C_1^{14}\cdot C_1^{11}}{C_2^{25}}=\frac{154}{300}=51.33\,\%$$

Exercice 2.2.10

$$P(E)=\frac{C_2^{22}}{C_2^{38}}=\frac{231}{703}$$

$$P(F)=\frac{C_1^{22}\cdot C_1^{16}}{C_2^{38}}=\frac{352}{703}$$

$$P(G)=\frac{C_2^{22}+C_2^{16}}{C_2^{38}}=\frac{351}{703} \quad \text{ou} \quad P(G)=\frac{C_2^{38}-C_1^{22}\cdot C_1^{16}}{C_2^{38}}=\frac{351}{703}$$

*

2.3 Opérations sur les ensembles, quelques formules

Soit A un sous-ensemble de Ω. Rappelons que nous avons défini :

$P(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ si les résultats de Ω sont équiprobables.

En particulier :

$$P(\emptyset)=0$$
$$P(\Omega)=1$$

Ces deux extrêmes font qu'une probabilité est toujours comprise entre 0 (événement impossible) et 1 (événement certain).

Exemple 2.3.1

Expérience : On lance un dé.

P(le résultat est pair et impair) = 0
P(le résultat est pair ou impair) = 1

*

La négation d'un énoncé A est un énoncé noté $\overline{A}$.
$\overline{A}$ est faux quand A est vrai, $\overline{A}$ est vrai quand A est faux.

Exemple 2.3.2

A : $x\leq 10$
$\overline{A}$: $x>10$

Pour $x=2$:	A est vrai	$\overline{A}$ est faux
Pour $x=20$:	A est faux	$\overline{A}$ est vrai

*

La <u>négation</u> d'une partie A d'un univers Ω est formée de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. Cette négation d'ensemble se note aussi $\overline{A}$.

<u>Exemple 2.3.3</u>

$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$

A = {nombres pairs de Ω} = {2 ; 4 ; 6}
$\overline{A}$ = {nombres impairs de Ω} = {1 ; 3 ; 5 ; 7}

*

Nous avons :

$$\text{card}(A)+\text{card}(\overline{A})=\text{card}(\Omega)$$

En divisant toute l'équation par $\text{card}(\Omega)$, nous obtenons :

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Cela donne :

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$
$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

Formule 2

Exemple 2.3.4

Expérience : On lance une pièce de monnaie 5 fois.

Univers : Ω est l'ensemble des « mots » de 5 lettres qu'on peut former à partir d'un alphabet de 2 lettres : F et P.

$\text{card}(\Omega)=\overline{A}_5^2=2^5=32$

Événement : A : F apparaît au moins une fois.

$\overline{A}$: F n'apparaît jamais.

$\overline{A}$ = {PPPPP}

$\text{card}(\overline{A})=1$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=96.88\,\%$$

*

Exercice 2.3.1

En utilisant la formule 2, calculer les probabilités demandées.

a) On lance une pièce de monnaie 10 fois (l'ordre des résultats compte).

P(au moins un Face)

b) On lance un dé 4 fois (l'ordre des résultats compte)

P(au moins un 6)
P(au moins un résultat > 4)

c) On tire une main (5 cartes, l'ordre ne compte pas, il n'y a pas de remise) d'un jeu de 52 cartes.

P(au moins un cœur)
P(au moins une reine)

Exercice 2.3.2

En 1654, le Chevalier de Méré posa le problème suivant à Blaise Pascal :
« Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double-six en lançant vingt-quatre fois deux dés ? »

*

Solutions

Exercice 2.3.1

a) $P(\text{au moins un F})=1-\frac{1}{2^{10}}=99.90\%$

b) $P(\text{au moins un 6})=1-\frac{5^4}{6^4}=51.77\%$

$P(\text{au moins un résultat} > 4)=1-\frac{4^4}{6^4}=80.25\%$

c) $P(\text{au moins un cœur})=1-\frac{C_5^{39}}{C_5^{52}}=77.85\%$

$P(\text{au moins une reine})=1-\frac{C_5^{48}}{C_5^{52}}=34.12\%$

Exercice 2.3.2

$P(\text{au moins un six en 4 lancers d'un dé})$
$=1-P(\text{pas de six})$
$=1-(\frac{5}{6})^4=0.5177$

$P(\text{au moins un double-six en 24 lancers de 2 dés})$
$=1-P(\text{pas de double-six})$
$=1-(\frac{35}{36})^{24}=0.4914$

*

<u>Intersection</u> de A et de B : $A \cap B$ est l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. C'est l'événement (A et B)

<u>Réunion</u> de A et de B : $A \cup B$ est l'ensemble formé des éléments qui sont dans A ou dans B (le « ou » n'étant pas exclusif). C'est l'événement (A ou B)

Nous avons :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

En divisant toute l'équation par $\operatorname{card}(\Omega)$, nous obtenons :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Formule 3

<u>Exemple 2.3.5</u>

Expérience : On lance un dé.

Univers : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Événement : A : Le résultat est plus grand que 4.
$A = \{5 ; 6\}$

Événement : B : Le résultat est pair
$B = \{2 ; 4 ; 6\}$

$A \cap B = \{6\}$
$A \cup B = \{2 ; 4 ; 5 ; 6\}$
$P(A) = 2/6$
$P(B) = 3/6$
$P(A \cap B) = 1/6$
$P(A \cup B) = 4/6$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = P(A \cup B)$$

*

Exercice 2.3.3

En utilisant la formule 3, calculer les probabilités demandées.

a) On tire une carte d'un jeu de 52.

P(valet ou pique)
P(noire ou habillée)

b) Avec une roue, on tire au sort un nombre entier compris entre 1 et 100.

P(pair ou multiple de 3)
P(impair ou inférieur à 20)

*

Solutions

Exercice 2.3.3

a)

$$P(\text{valet ou pique}) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$
$$P(\text{noire ou habillée}) = \frac{26}{52} + \frac{12}{52} - \frac{6}{52} = \frac{32}{52}$$

b)

$$P(\text{pair ou multiple de } 3) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100}$$
$$P(\text{impair ou inférieur à } 20) = \frac{50}{100} + \frac{19}{100} - \frac{10}{100} = \frac{59}{100}$$

*

Cas particulier de la formule 3 :

Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Formule 4

Autrement dit, les probabilités s’additionnent pour une réunion d’<u>événements disjoints</u>.

*

Après une formule d’addition, voici une formule de multiplication.

La probabilité d’un événement *B* sous la condition que l’événement *A* se soit réalisé se note

$$P(B|A)$$

On parle de <u>probabilité conditionnelle</u>.

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$

Formule 5

Exemple 2.3.6

Expérience : 2 cartes sont tirées au hasard d'un jeu de 52. L'ordre compte et le tirage se fait sans remise.

Univers : Ω est l'ensemble des arrangements sans répétitions de 2 cartes parmi 52

Événement : A : La 1re carte est la dame de cœur.

Événement : B : La 2e carte est une dame.

$P(A\cap B)$ = Probabilité de tirer successivement la dame de cœur et une autre dame

$$P(A)=1/52$$

Si la 1re carte tirée est la dame de cœur, il ne reste que 51 cartes pour le 2e tirage et, parmi elles, 3 dames. Donc :

$$P(B|A)=3/51$$

Ainsi la probabilité de tirer successivement la dame de cœur et une autre dame vaut :

$$\frac{1}{52}\cdot\frac{3}{51}=0.11\%$$

*

Exercice 2.3.4

En utilisant la formule 5 (et d'autres formules si besoin), calculer les probabilités demandées.

a) D'une urne contenant 5 boules rouges et 15 noires, on en tire 2 au hasard sans remise. L'ordre compte et seules les couleurs nous intéressent.

> P(la 1re est rouge et la 2e est noire)
> P(les 2 sont rouges)
> P(les 2 sont noires)
> P(les 2 sont de la même couleur)
> P(les 2 ne sont pas de la même couleur)

b) D'un jeu de 52 cartes, on en tire 2 au hasard sans remise. L'ordre compte.

> P(la 1re est un valet noir et la 2e est un valet)
> P(la 1re est un valet de trèfle et la 2e est de trèfle)
> P(les 2 sont de trèfle)
> P(aucune des 2 n'est de trèfle)
> P(au moins une des 2 n'est pas de trèfle)
> P(les 2 sont de trèfle ou les 2 sont de pique)
> P(les 2 sont noires)

Exercice 2.3.5

On tire successivement trois cartes d'un jeu. Considérons les événements suivants :

E_1 :La 1re carte est un roi.
E_2 : La 2e carte est un roi.
E_3 : La 3e carte est un roi.

Traduire en français les événements suivants :

$E_1 \cap E_2$
$E_1 \cap \overline{E_2}$
$E_1 \cup E_3$
$\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3$
$E_2 | E_1$

*

Solutions

Exercice 2.3.4

a) $P(\text{RN})=\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}=0.1974$

$P(\text{RR})=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}=0.0526$

$P(\text{NN})=\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}=0.5526$

$P(\text{RR ou NN})=0.0526+0.5526=0.6053$

$P(\text{RN ou NR})=1-0.6053=0.3947$

b) *P*(1re valet noir, 2e valet) =

$\frac{2}{52}\cdot\frac{3}{51}=0.00226$

P(1re valet de trèfle, 2e trèfle) =

$\frac{1}{52}\cdot\frac{12}{51}=0.00452$

P(les 2 sont de trèfle) =

$\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}=0.0588$

P(aucune des 2 n'est de trèfle) =

$\frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51}=0.5588$

P(au moins une des 2 n'est pas de trèfle) =

$1-0.0588=0.9412$

P(les 2 sont de trèfle ou les 2 sont de pique) =

$2\cdot 0.0588=0.1176$

P(les 2 sont noires) =

$\frac{26}{52}\cdot\frac{25}{51}=0.2451$

Exercice 2.3.5

$E_1\cap E_2$ Les 2 premières cartes sont des rois.

$E_1\cap \overline{E_2}$ La 1re carte est un roi, mais non la 2e.

$E_1\cup E_3$ L'une au moins de la 1re et de la 3e cartes est un roi.

$\overline{E_1}\cap E_2\cap E_3$ Les 2 dernières cartes sont des rois, mais pas la 1re.

$E_2|E_1$ La 2e carte est un roi sous la condition que la 1re soit un roi.

Deux événements A et B sont dits <u>indépendants</u> quand $P(A|B)=P(A)$ (ou $P(B|A)=P(B)$). Deux événements qui ne sont pas indépendants sont évidemment dits <u>dépendants</u>.

La formule 5 donne :

A et B sont indépendants si et seulement si
$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

Formule 6

<u>Exemple 2.3.7</u>

Expérience : On lance un dé

Univers : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Événement : A : Le résultat est plus grand que 4
$A = \{5 ; 6\}$
$P(A)=2/6=33.33\%$

Événement : B : Le résultat est pair
$B = \{2 ; 4 ; 6\}$
$P(B)=3/6=50\%$

Intersection : $A\cap B = \{6\}$
$P(A\cap B)=1/6=16.67\%$

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$, donc A et B sont des événements indépendants.

*

Exercice 2.3.6

On lance une pièce de monnaie 2 fois (l'ordre des résultats compte).
Considérons les événements :

A : La pièce tombe 2 fois du même côté.
B : La pièce donne au plus 1 fois « Face ».

A et *B* sont-ils dépendants ou indépendants ?

*

Solution

Exercice 2.3.6

$P(A)=2/4$
$P(B)=3/4$
$P(A\cap B)=1/4$
A et B dépendants

*

2.4 Résultats non équiprobables et arboriculture

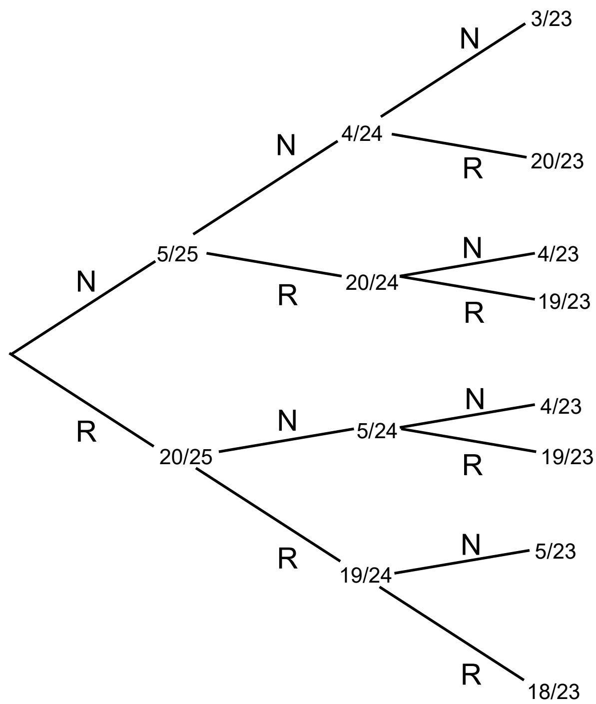
Exemple 2.4.1

Expérience : D'une urne contenant 20 boules rouges (R) et 5 boules noires (N), on tire au hasard (sans remise) 3 boules. L'ordre compte.

Si l'univers que nous voulons considérer n'est pas celui des $A_3^{25} = 13'800$ arrangements sans répétitions de 3 boules, mais celui des $\overline{A_3^2} = 2^3 = 8$ arrangements avec répétitions de 2 couleurs, alors les résultats ne sont pas équiprobables. Par exemple RNN est un résultat plus probable que NNN.

Considérons l'événement A : Le tirage donne au moins deux boules noires consécutives.

Le calcul de $P(A)$ peut se baser sur les formules 4 et 5, mises en œuvre sur un arbre de probabilités.



L'événement A est la réunion des 3 résultats : NNN, NNR, RNN

La formule 4 donne :

$$P(A)=P(\mathrm{NNN})+P(\mathrm{NNR})+P(\mathrm{RNN})$$

La formule 5 donne :

$$P(\mathrm{NNN})=\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}\cdot\frac{3}{23}=\frac{60}{13'380}$$
$$P(\mathrm{NNR})=\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}\cdot\frac{20}{23}=\frac{400}{13'380}$$
$$P(\mathrm{RNN})=\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{4}{23}=\frac{400}{13'380}$$

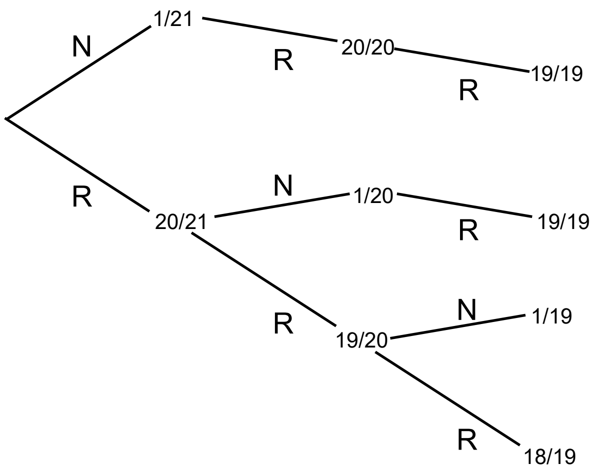
La somme donne alors :

$$P(A)=\frac{860}{13'380}=6.4\%$$

<u>Exemple 2.4.2</u>

Modifions l'exemple précédent en partant d'une urne contenant 20 boules rouges (R) et 1 seule boule noire (N). À nouveau, on tire au hasard (sans remise) 3 boules et c'est l'ordre des couleurs qui nous importe. Intéressons-nous à l'événement B : Le tirage donne au moins deux boules rouges consécutives.

L'arbre est moins branchu.



L'événement B est la réunion de 3 résultats : NRR, RRN, RRR

Nous avons donc :

$$P(B)=P(\text{NRR})+P(\text{RRN})+P(\text{RRR})$$
$$=\frac{1}{21}\cdot\frac{20}{20}\cdot\frac{19}{19}+\frac{20}{21}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}+\frac{20}{21}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}=95.2\,\%$$

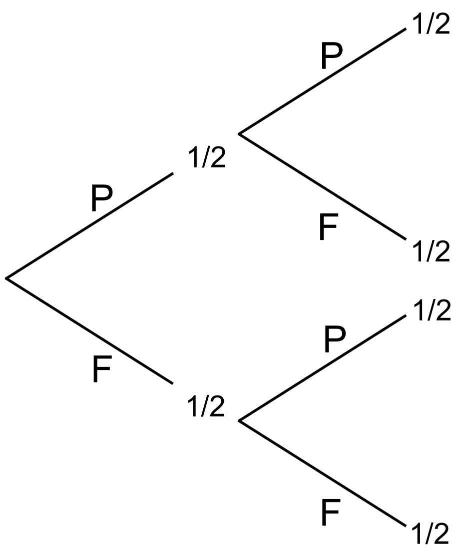
ou, plus simplement :

$$P(B)=1-P(\text{RNR})$$
$$=1-\frac{20}{21}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{19}=95.2\%$$

<u>Remarque</u> : L'arbre, comme aide visuelle, et les formules 4 et 5 peuvent aussi être utilisés pour résoudre des problèmes avec des résultats équiprobables.

<u>Exemple 2.4.3</u>

Reprenons l'exemple 2.1.2 : le lancer d'une pièce 2 fois et la recherche de la probabilité de l'événement A : La pièce donne au moins une fois « Pile ».



$$P(A)=P(\text{PP})+P(\text{PF})+P(\text{FP})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=75\%$$

Exemple 2.4.4

Une pièce est truquée de telle manière qu'elle tombe 3 fois plus souvent sur F que sur P, c'est-à-dire :

$$P(\mathrm{F})=3P(\mathrm{P})$$

Et, comme $P(\mathrm{P})=1-P(\mathrm{F})$, en notant $x=P(\mathrm{F})$, nous obtenons l'équation : $x=3(1-x)$ dont la solution est $x=0.75$. Ainsi :

$$P(\mathrm{F})=0.75 \quad \text{et} \quad P(\mathrm{P})=0.25$$

Expérience : Cette pièce est lancée 7 fois.

Événement : A : La séquence des P et des F comporte exactement 3 F.

$$P(A)=C_3^7 \cdot 0.75^3 \cdot 0.25^4=5.77\%$$

Explication : il y a C_3^7 possibilités de choisir les 3 positions pour écrire F dans des mots de taille 7. Et chacun de ces mots a une probabilité de $0.75^3 \cdot 0.25^4$ (multiplication des probabilités sur l'arbre).

*

Exercice 2.4.1

D'une urne contenant 10 boules rouges (R) et 2 boules noires (N), on tire au hasard (sans remise) 3 boules. C'est l'ordre des couleurs qui nous intéresse. Représenter sur un arbre l'univers des triplets possibles de couleurs (en mentionnant à chaque nœud la probabilité correspondante), puis calculer les probabilités des événements suivants :

A : La 3^e boule tirée est noire
B : Les 1^{re} et 3^e boules tirées sont de la même couleur
C : Parmi les 3 boules tirées, il y en a une seule qui est noire
D : Parmi les 3 boules tirées, il y en a au moins une qui est noire
E : L'expérience donne au moins deux boules noires consécutives

Exercice 2.4.2

On lance 3 fois une pièce truquée qui a une probabilité de 60 % de retomber sur Face (F). L'ordre compte. Représenter sur un arbre l'univers des possibilités, puis calculer les probabilités des événements suivants :

A : La pièce tombe au moins deux fois sur Face
B : L'expérience donne au moins deux fois Face de manière consécutive

Exercice 2.4.3

Un couple a décidé d'avoir des enfants jusqu'à la naissance d'une fille. Mais il se fixe un maximum de 4 enfants (on supposera qu'aucun ne meurt). La probabilité de naissance d'une fille vaut 48.78 % et celle d'un garçon vaut 51.22 %. Représenter sur un arbre l'univers des possibilités envisagées par ce couple (« mots » de taille au plus 4, avec un alphabet à 2 lettres : G, F) et calculer la probabilité de chacune de ces possibilités.

Exercice 2.4.4

A et B veulent jouer 3 parties d'échecs. Quand ils jouent l'un contre l'autre, on estime que, pour chaque partie :

P(A gagne) = 1/2 P(B gagne) = 1/3 P(partie nulle) = 1/6

Calculer les probabilités des événements suivants :

E : A gagne les 3 parties.
F : 2 parties se terminent par un nul.
G : A et B gagnent alternativement.
H : B gagne au moins 1 partie.

Exercice 2.4.5

À chaque nuit de pleine Lune, Ludovic a une probabilité de 0.8 de se transformer en loup-garou végétarien, puis de redevenir homme au lever du jour. Quand il est métamorphosé en loup-garou végétarien, Ludovic mange 3 oranges sanguines durant la nuit ; mais s'il reste homme, il ne mange qu'une seule orange sanguine. En vous aidant d'un arbre, trouver :

a) la probabilité que Ludovic mange exactement 5 oranges sanguines en 3 nuits de pleine Lune ;
b) la probabilité que Ludovic mange au moins 7 oranges sanguines en 3 nuits de pleine Lune.

Exercice 2.4.6

Une pièce de monnaie est lancée 8 fois. L'ordre compte.

a) Quelle est la probabilité que « Face » sorte 6 fois si la pièce est équilibrée (avec P(F) = 50 %) ?
b) Quelle est la probabilité que « Face » sorte 6 fois si la pièce est truquée (avec P(F) = 60 %) ?

*

Solutions

Exercice 2.4.1

$$P(A)=P(\text{RRN})+P(\text{RNN})+P(\text{NRN})$$
$$=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{2}{10}+\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{1}{10}=16.7\%$$

$$P(B)=P(\text{RRR})+P(\text{RNR})+P(\text{NRN})$$
$$=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{8}{10}+\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{1}{10}=69.7\%$$

$$P(C)=P(\text{RRN})+P(\text{RNR})+P(\text{NRR})$$
$$=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{2}{10}+\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{10}=40.9\%$$

$$P(D)=1-P(\text{RRR})$$
$$=1-\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{8}{10}=45.5\%$$

$$P(E)=P(\text{RNN})+P(\text{NNR})$$
$$=\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{10}{10}=3.03\%$$

Exercice 2.4.2

$$P(A)=P(\text{FFF})+P(\text{FFP})+P(\text{FPF})+P(\text{PFF})$$
$$=0.6^3+3\cdot 0.6^2\cdot 0.4=64.8\%$$

$$P(B)=P(\text{FFF})+P(\text{FFP})+P(\text{PFF})$$
$$=0.6^3+2\cdot 0.6^2\cdot 0.4=50.4\%$$

Exercice 2.4.3

$$P(\text{F})=48.78\%$$
$$P(\text{GF})=0.5122\cdot 0.4878=24.99\%$$
$$P(\text{GGF})=0.5122^2\cdot 0.4878=12.80\%$$
$$P(\text{GGGF})=0.5122^3\cdot 0.4878=6.55\%$$
$$P(\text{GGGG})=0.5122^4=6.88\%$$

Exercice 2.4.4

$P(E) = P(\text{AAA})$
$= (\frac{1}{2})^3 = 12.5\%$

$P(F) = P(\text{ANN ou NAN ou NNA ou BNN ou NBN ou NNB})$
$= 3 \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{6})^2 + 3 \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{6})^2 = 6.94\%$

$P(G) = P(\text{ABA ou BAB})$
$= (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{1}{2}) = 13.89\%$

Soit X = A ou N
$P(H) = 1 - P(\text{XXX})$
= $= 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{6})^3 = 70.37\%$

Exercice 2.4.5

a) *P*([3O ; 1O ; 1O] ou [1O ; 3O ; 1O] ou [1O ; 1O ; 3O])
$= 3 \cdot 0.8 \cdot 0.2^2 = 0.096$

b) *P*([3O ; 3O ; 1O] ou [3O ; 1O ; 3O] ou [1O ; 3O ; 3O] ou [3O ; 3O ; 3O])
$= 3 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 + 0.8^3 = 0.896$

Exercice 2.4.6

a) $C_6^8 \cdot 0.5^6 \cdot 0.5^2 = 10.94\%$
b) $C_6^8 \cdot 0.6^6 \cdot 0.4^2 = 20.90\%$

*

2.5 Loi binomiale (premier regard)

Exemple 2.5.1

Soit une pièce truquée, avec

$P(\mathrm{F})=0.6$ $\qquad\qquad$ $P(\mathrm{P})=1-0.6=0.4$

Expérience : Cette pièce est lancée 8 fois.

Événement : A : La séquence des P et des F comporte exactement 3 F.

$$P(A)=C_3^8\cdot 0.6^3\cdot 0.4^5=12.4\%$$

Explication : il y a C_3^8 possibilités de choisir les 3 positions pour écrire F dans des mots de taille 8. Et chacun de ces mots a une probabilité de $0.6^3\cdot 0.4^5$ (multiplication des probabilités sur l'arbre).

Généralisation :

Soit une pièce de monnaie avec $P(\mathrm{F})=a$
Alors la probabilité d'obtenir exactement *r* fois F en *n* jets vaut :

$$C_r^n\cdot a^r\cdot (1-a)^{n-r}$$

loi binomiale

Bien sûr, cette formule reste valable si on remplace F par P. Elle est aussi valable pour n'importe quel phénomène à 2 résultats possibles avec des probabilités constantes. Par exemple, une loi binomiale identique à celle de l'exemple est donnée par le tirage aléatoire d'une boule, *avec remise*, dans une urne contenant 60 % de boules rouges et 40 % de boules noires.

*

Exercice 2.5.1

Une pièce de monnaie est lancée 8 fois.

a) Quelle est la probabilité que « Face » sorte 6 fois si la pièce est équilibrée (avec $P(\mathrm{F})=50\,\%$) ?
b) Quelle est la probabilité que « Face » sorte 6 fois si la pièce est truquée (avec $P(\mathrm{F})=60\,\%$) ?

Exercice 2.5.2

D'une urne contenant 13 boules noires et 27 boules rouges, on en tire 9 fois une, avec remise. On note chaque fois le résultat N ou R sur une liste. L'ordre compte.

a) Quelle est la probabilité que R soit présent 6 fois sur la liste ?
b) Quelle est la probabilité que R soit présent au moins 6 fois sur la liste ?

Exercice 2.5.3

Dans une ville, deux candidats A et B se présentent pour le poste de procureur général. Un sondage permet d'estimer que 57 % des électeurs vont voter pour A et 43 % vont voter pour B. On tire au hasard 10 électeurs. Quelle est la probabilité que 5 d'entre eux vont voter pour A ?

*

Solutions

Exercice 2.5.1

a) $C_6^8 \cdot 0.5^6 \cdot 0.5^2 = 10.94\,\%$

b) $C_6^8 \cdot 0.6^6 \cdot 0.4^2 = 20.90\,\%$

Exercice 2.5.2

a) $C_6^9 \cdot \left(\frac{27}{40}\right)^6 \cdot \left(\frac{13}{40}\right)^3 = 27.27\,\%$

b) $C_6^9 \cdot \left(\frac{27}{40}\right)^6 \cdot \left(\frac{13}{40}\right)^3 + C_7^9 \cdot \left(\frac{27}{40}\right)^7 \cdot \left(\frac{13}{40}\right)^2 + C_8^9 \cdot \left(\frac{27}{40}\right)^8 \cdot \left(\frac{13}{40}\right)^1 + \left(\frac{27}{40}\right)^9 = 67.07\,\%$

Exercice 2.5.3

$C_5^{10} \cdot 0.57^5 \cdot 0.43^5 = 22.29\,\%$

*

2.6 Probabilités conditionnelles et formule de Bayes

Exemple 2.6.1

Considérons une classe de 30 élèves. 14 sont des filles et 16 des garçons. 17 parlent chinois et 13 ne parlent pas chinois. Plus précisément, toutes les données figurent dans le tableau suivant :

	Filles	**Garçons**	**Totaux**
parlent chinois	10	7	17
ne parlent pas chinois	4	9	13
Totaux	14	16	30

Expérience : Un élève est choisi au hasard.

Événement : A : L'élève parle chinois.
Événement : B : L'élève est une fille.

La probabilité que l'élève soit une fille, sous la condition qu'il parle chinois vaut :

$$P(B|A) = P(B \text{ dans un univers restreint à } A) = \frac{\text{card}(B \cap A)}{\text{card}(A)} = \frac{10}{17}$$

Par ailleurs :

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\text{card}(B \cap A)/\text{card}(\Omega)}{\text{card}(A)/\text{card}(\Omega)} = \frac{10/30}{17/30} = \frac{10}{17}$$

Cet exemple permet de comprendre :

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule 7

C'est une autre façon d'écrire la formule 5.

Exemple 2.6.2

Expérience : On lance un dé.

Univers : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Événement : A : Le résultat est plus grand que 4
$A = \{5 ; 6\}$
$P(A)=2/6=33.33\%$

Événement : B : Le résultat est pair
$B = \{2 ; 4 ; 6\}$
$P(B)=3/6=50\%$

Intersection : $A \cap B = \{6\}$
$P(A \cap B)=1/6=16.67\%$

Quelle est la probabilité que le résultat soit plus grand que 4, sous la condition qu'il est pair ?

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{1}{3}=33.33\%$$

Quelle est la probabilité que le résultat soit pair, sous la condition qu'il est plus grand que 4 ?

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/6}{2/6}=\frac{1}{2}=50\%$$

*

Rappel

Deux événements A et B sont dits indépendants quand $P(A|B)=P(A)$ (ou $P(B|A)=P(B)$). Deux événements qui ne sont pas indépendants sont évidemment dits dépendants. Et la formule 6 nous dit que : A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

Dans l'exemple 2.6.1 : $P(B|A)=10/17$ et $P(B)=14/30$,
donc A et B sont dépendants.

Dans l'exemple 2.6.2 : $P(B|A)=50\%$ et $P(B)=50\%$,
donc A et B sont indépendants.

Exemple 2.6.3

Expérience : D'une urne contenant 20 boules rouges (R) et 5 boules noires (N), on tire au hasard (sans remise) 2 boules. L'ordre compte. L'*univers* considéré est celui des arrangements avec répétitions de 2 couleurs.

Événement : A : La 1$^{\text{re}}$ boule est rouge.
Événement : B : La 2$^{\text{e}}$ boule est noire.

$$P(A\cap B)=P(\mathrm{RN})=\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}$$
$$P(A)=P(\mathrm{RR})+P(\mathrm{RN})=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}+\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}=\frac{20}{25}$$
$$P(B)=P(\mathrm{RN})+P(\mathrm{NN})=\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}=\frac{5}{25}$$
$$P(A)P(B)=\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{25}$$

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

donc A et B sont des événements dépendants

*

La manière un peu compliquée dont nous avons calculé $P(A)$ et $P(B)$ dans l'exemple précédent illustre une formule connue sous le nom des probabilités totales.

Si les événements E_i, pour *i* variant de 1 à *n*, forment un système complet, c'est-à-dire : si chaque E_i est non vide ; si les E_i sont 2 à 2 disjoints ; si la réunion des E_i donne l'univers ; alors

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B\cap E_i)=\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\cdot P(B|E_i)$$

Formule 8
Formule des probabilités totales

Dans le cas où nous n'avons que 2 E_i à considérer :
$E_1=A$ et $E_2=\overline{A}$

la formule 8 devient :

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

Formule 9

C'est précisément ce que nous avons fait pour calculer $P(B)$ dans l'exemple 2.6.3

$$P(B)=P(\mathrm{RN})+P(\mathrm{NN})=\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}=\frac{5}{25}$$

Détaillons :

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

A : R en position 1
$B|A$: N en position 2 sous la condition d'avoir R en position 1
$\overline{A}$: N en position 1
$B|\overline{A}$: N en position 2 sous la condition d'avoir N en position 1

*

Puisque $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ et $P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$, nous avons :

$$P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

En divisant par $P(B)$, nous obtenons :

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Formule 10
Formule de Bayes

On l'utilise souvent en lui injectant la formule 8 ou la formule 9.
Ainsi, en remplaçant $P(B)$ par la formule 9, il vient :

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})}$$

Formule 11
Formule de Bayes (2e version)

Reprenons encore une fois l'exemple 2.6.3 et calculons $P(A|B)$ avec cette formule :

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24}}{\frac{5}{25}} = \frac{20}{24}$$

Exemple 2.6.4

Intéressons-nous à une maladie X.

Expérience : Une personne est choisie au hasard dans la population et on lui fait subir un test de détection de la maladie X.

Considérons les événements suivants :

A : La personne est atteinte de la maladie X
B : Le résultat du test est positif, c'est-à-dire le test déclare que la personne est atteinte de la maladie X.

Le test n'est pas parfait. Une étude a permis d'établir que :

$$P(B|A)=99\%$$
$$P(B|\overline{A})=5\%$$

Par ailleurs, la maladie est assez rare : elle ne touche qu'une personne sur mille, c'est-à-dire :

$$P(A)=0.1\%$$
$$P(\overline{A})=99.9\%$$

Quelle est la probabilité qu'une personne soit atteinte de la maladie X si son résultat au test est positif ?

Utilisons la formule 11 :

$$P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}$$
$$=\frac{0.001\cdot 0.99}{0.001\cdot 0.99+0.999\cdot 0.05}=1.94\%$$

Cette probabilité est faible. Presque tous les malades présentent un test positif ; mais la maladie X est rare, si bien que presque tous les tests positifs vont désigner des personnes saines (faux positifs). Si le traitement est lourd, coûteux ou dangereux, il importe d'effectuer des examens supplémentaires avant de le mettre en œuvre. Le test, malgré sa fiabilité plutôt haute, n'est absolument pas suffisant. L'oubli du taux de base (fréquence de la maladie dans la population) est une erreur qui peut avoir des conséquences graves.

Exemple 2.6.5

Expérience : Une pièce de monnaie est lancée une 1re fois un jour au hasard ; puis, quelques mois plus tard, elle est lancée une 2e fois un jour au hasard.

Sous la condition :

C : La pièce est tombée au moins une des 2 fois sur « Face » un mardi

quelle est la probabilité qu'elle soit aussi tombée sur « Face » l'autre fois ?

On pourrait penser que la réponse est 50 %.
Nous allons voir que ce n'est pas vrai.

Considérons les événements :

A_1 : Le 1er jour choisi au hasard est un mardi
A_2 : Le 2e jour choisi au hasard est un mardi
B_1 : La pièce tombe sur F au 1er jet
B_2 : La pièce tombe sur F au 2e jet

$$C=(B_1\cap A_1)\cup(B_2\cap A_2)$$

$$P(C)=P(B_1\cap A_1)+P(B_2\cap A_2)-P(B_1\cap A_1\cap B_2\cap A_2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{27}{196}$$

$B_1\cap B_2\cap C$ est la réunion de 3 événements disjoints :

$$B_1\cap A_1\cap B_2\cap A_2$$
$$B_1\cap A_1\cap B_2\cap\overline{A_2}$$
$$B_1\cap\overline{A_1}\cap B_2\cap A_2$$

d'où :

$$P(B_1\cap B_2\cap C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{13}{196}$$

La probabilité qui nous intéresse est :

$$P((B_1\cap B_2)|C)=\frac{P(B_1\cap B_2\cap C)}{P(C)}=\frac{13/196}{27/196}=\frac{13}{27}=48.15\%$$

Exercice 2.6.1

Dans une élection où 3 candidats sont en concurrence, A a une probabilité de 50 % d'être élu, B une probabilité de 30 % et C une probabilité de 20 %. Nous apprenons que C n'a pas été élu, mais nous ne savons pas encore qui, de A ou de B, est le vainqueur. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 2.6.2

On choisit au hasard une famille parmi celles qui ont 2 enfants.

a) Quelle est la probabilité que les enfants soient 2 garçons, si on sait que l'aîné est un garçon ?
b) Quelle est la probabilité que les enfants soient 2 garçons, si on sait qu'au moins un des 2 enfants est un garçon ?

[Pour simplifier, on supposera que P(un enfant est un garçon) = 50 %, ce qui n'est pas tout à fait exact]

Exercice 2.6.3

On lance une pièce de monnaie 3 fois. Considérons les événements :

A : Le 1^er^ jet donne « Face ».
B : Le 2^e^ jet donne « Face ».
C : Exactement 2 jets consécutifs donnent « Face » (cela signifie que 3 fois « Face » est exclu)

Vérifier que :

a) A et B sont indépendants.
b) A et C sont indépendants.
c) B et C sont dépendants.

Exercice 2.6.4

On tire au hasard 2 cartes d'un jeu de 52. L'ordre compte et il n'y a pas de remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 as sous la condition qu'une des 2 cartes est l'as de pique ?

Exercice 2.6.5

Une maladie touche, dans la population genevoise, trois personnes sur mille. Cette maladie est toujours mortelle, mais on peut sauver le patient grâce à une opération passablement risquée. Cette opération sauve une personne malade sur deux, mais tue la moitié des personnes opérées. Avant de décider l'opération, on peut utiliser un test de dépistage qui permet de détecter la maladie. Avec ce test, 96 % des malades obtiennent un résultat « positif » (c'est-à-dire, le test dit : « vous êtes malade »), mais 6 % des personnes saines obtiennent aussi un résultat « positif » (on dit que ce sont des « faux positifs »). Une personne choisie au hasard passe le test. Ce test donne un résultat positif. Conseillez-vous à la personne de se faire opérer ? Pour vous aider à répondre, calculer la probabilité que cette personne ne soit pas malade sachant que son test a donné un résultat positif.

Exercice 2.6.6

Les deux machines à sous d'une salle de jeux permettent normalement de gagner avec une probabilité de 20 %. Mais l'une est détraquée et permet de gagner avec une probabilité de 60 %. Vous ne savez pas quelle machine est détraquée. Vous en choisissez une au hasard et vous jouez. Calculez votre probabilité de jouer sur la machine détraquée

a) avant que vous ne commenciez à jouer ;
b) si vous jouez une partie et si vous la gagnez ;
c) si vous jouez une partie et si vous la perdez ;
d) si vous jouez deux parties et si vous les gagnez toutes les deux ;
e) si vous jouez deux parties et si vous les perdez toutes les deux ;
f) si vous jouez deux parties et si vous gagnez la 1re et perdez la 2e ;
g) si vous jouez deux parties et si vous perdez la 1re et gagnez la 2e .

Exercice 2.6.7

À Pétaouchnok, la probabilité qu'un adulte mâle choisi au hasard soit un barbu est d'environ 45 %. Intéressons-nous à une certaine catégorie de délit, que nous désignerons par la lettre X, et qui ne peut être commis que par un adulte mâle. La probabilité qu'un adulte mâle barbu commette un délit X vaut 2 % et la probabilité qu'un adulte mâle non barbu commette un délit X vaut 0.3 %. Si un délit X est commis par une seule personne, quelle est la probabilité que son auteur soit un barbu ?

*

Solutions

Exercice 2.6.1

$$P(A|\overline{C})=\frac{P(A\cap\overline{C})}{Pr(\overline{C})}=\frac{P(A)}{P(\overline{C})}=\frac{0.5}{0.8}=62.5\%$$

Exercice 2.6.2

Ω = {GG ; GF ; FG ; FF}

a) $P(\text{GG | GG ou GF})=\dfrac{P(\text{GG})}{P(\text{GG ou GF})}=\dfrac{1/4}{2/4}=\dfrac{1}{2}$

b) $P(\text{GG | GG ou GF ou FG})=\dfrac{P(\text{GG})}{P(\text{GG ou GF ou FG})}=\dfrac{1/4}{3/4}=\dfrac{1}{3}$

Exercice 2.6.3

$P(A)=1/2$
$P(B)=1/2$
$P(C)=1/4$

a) $P(A\cap B)=1/4=P(A)P(B)$
b) $P(A\cap C)=1/8=P(A)P(C)$
c) $P(B\cap C)=1/4\neq P(B)P(C)$

Exercice 2.6.4

$$P(\text{2 as | 1 des 2 cartes est as\_P})$$
$$=\frac{P(\text{[as\_P ; as] ou [as ; as\_P]})}{P(\text{[as\_P ; non as\_P] ou [non as\_P ; as\_P]})}$$
$$=\frac{\frac{1}{52}\cdot\frac{3}{51}+\frac{3}{52}\cdot\frac{1}{51}}{\frac{1}{52}+\frac{1}{52}}=\frac{3}{51}$$

Exercice 2.6.5

A : La personne est malade.
B : Le test est positif.

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}{P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})+P(A)\cdot P(B|A)}$$
$$=\frac{0.997\cdot 0.06}{0.997\cdot 0.06+0.003\cdot 0.96}=95.41\%$$

Exercice 2.6.6

A : Vous jouez sur la machine détraquée

a) $P(A)=0.5$

b) $P(A \mid \text{gain})$
$$=\frac{P(A)\cdot P(\text{gain} \mid A)}{P(A)\cdot P(\text{gain} \mid A)+P(\overline{A})\cdot P(\text{gain} \mid \overline{A})}$$
$$=\frac{0.5\cdot 0.6}{0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 0.2}=0.75$$

c) $P(A \mid \text{perte})$
$$=\frac{P(A)\cdot P(\text{perte} \mid A)}{P(A)\cdot P(\text{perte} \mid A)+P(\overline{A})\cdot P(\text{perte} \mid \overline{A})}$$
$$=\frac{0.5\cdot 0.4}{0.5\cdot 0.4+0.5\cdot 0.8}=0.33$$

d) $P(A \mid 2 \text{ gains})$
$$=\frac{P(A)\cdot P(2 \text{ gains} \mid A)}{P(A)\cdot P(2 \text{ gains} \mid A)+P(\overline{A})\cdot P(2 \text{ gains} \mid \overline{A})}$$
$$=\frac{0.5\cdot 0.6^2}{0.5\cdot 0.6^2+0.5\cdot 0.2^2}=0.90$$

e) $P(A \mid 2 \text{ pertes})$
$$=\frac{P(A)\cdot P(2 \text{ pertes} \mid A)}{P(A)\cdot P(2 \text{ pertes} \mid A)+P(\overline{A})\cdot P(2 \text{ pertes} \mid \overline{A})}$$
$$=\frac{0.5\cdot 0.4^2}{0.5\cdot 0.4^2+0.5\cdot 0.8^2}=0.20$$

f) $P(A \mid [\text{gain ; perte}])$

$$= \frac{P(A) \cdot P([\text{gain ; perte}] \mid A)}{P(A) \cdot P([\text{gain ; perte}] \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P([\text{gain ; perte}] \mid \overline{A})}$$

$$= \frac{0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.4}{0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = 0.60$$

g) Même réponse qu'en f)

Exercice 2.6.7

A : Le suspect est barbu.
B : Le suspect a commis le délit X.

$$P(A) = 0.45$$
$$P(\overline{A}) = 0.55$$
$$P(B \mid A) = 0.02$$
$$P(B \mid \overline{A}) = 0.003$$

$$P(A \mid B) = \frac{0.45 \cdot 0.02}{0.45 \cdot 0.02 + 0.55 \cdot 0.003} = 84.51\,\%$$

*

2.7 Exercices variés

Exercice 2.7.1

Dans un groupe de 23 personnes choisies au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins deux aient leur anniversaire à la même date ? (Pour simplifier, on décide d'ignorer les années bissextiles).

Exercice 2.7.2

5 couples hétérosexuels mariés se livrent à un jeu. Un homme et une femme sont choisis au hasard. Ils doivent alors se faire un bisou. Quelle est la probabilité que le hasard désigne un homme et une femme qui ne sont pas mariés ensemble ?

Exercice 2.7.3

Dans l'opéra d'Offenbach « Les contes d'Hoffmann », Coppélius vend des yeux : des bleus et des noirs.
Supposons qu'il ait dans son sac 12 yeux bleus et 8 yeux noirs.
S'il sort 2 yeux au hasard, quelle est la probabilité :

a) qu'ils soient noirs tous les deux ?
b) qu'ils soient de couleurs différentes ?

Exercice 2.7.4

Le monstre du Léman est une créature aquatique qui se nourrit d'humains.
Une étude a permis d'estimer à 5 % la probabilité qu'une personne se baignant 10 minutes à la plage des Eaux-Vives soit dévorée par le monstre.
Le 15 septembre, Alice prévoit trois baignades de 10 minutes à la plage des Eaux-Vives.

a) Dessiner l'arbre de probabilités correspondant à ce projet de 3 baignades.
b) Trouver la probabilité qu'Alice soit dévorée par le monstre.
c) Montrer sur l'arbre le ou les chemins correspondant à l'événement suivant : « Alice est dévorée à la 2^e baignade ».

Exercice 2.7.5

On propose à Claude de lancer 3 pièces de monnaie. Une est de 1 Franc, une est de 2 Francs et une est de 5 Francs. Il pourra conserver les pièces qui présentent le côté « Pile ». Quelle est sa probabilité de gagner plus de 2 Francs ?

Exercice 2.7.6

On tire au hasard 2 chiffres différents compris entre 1 et 9. L'ordre compte. Sachant que la somme des chiffres est paire, quelle est la probabilité que les 2 chiffres soient impairs ?

Exercice 2.7.7

L'hémophilie A est provoquée par la mutation d'un gène du chromosome X. Un homme qui porte cette mutation est toujours hémophile. Par contre, l'hémophilie A est très rare chez une femme, parce que ce gène est récessif. Pour qu'une femme soit atteinte de cette maladie, il faut que ses deux chromosomes X portent la mutation. Cependant, une femme non malade peut porter le gène de l'hémophilie A et le transmettre à ses descendants. Notons X_h un chromosome X porteur du gène de l'hémophilie A. Considérons le cas de Sacha, un homme sain. Ses chromosomes sexuels sont XY. Sa femme Irina est non malade, mais porteuse du gène de l'hémophilie A. Ses chromosomes sexuels sont XX_h. Chaque enfant mâle de ce couple recevra la chromosome Y de son père et l'un des chromosomes X ou X_h de sa mère. La probabilité qu'il soit hémophile est donc de 50 %. Le couple désire 3 enfants. Sans tenir compte de la possibilité d'avoir de vrais jumeaux, quelle est la probabilité qu'au moins un des 3 enfants soit un garçon hémophile ?

[On prendra : *P*(naissance d'un garçon) = *P*(naissance d'une fille) = 50 %]

Exercice 2.7.8

On tire au hasard (sous l'hypothèse d'équiprobabilité) un nombre entier x tel que

$$30 \leqslant x \leqslant 80$$

Soit y la valeur obtenue en additionnant les deux chiffres qui constituent le nombre x (par exemple, si $x=43$, alors $y=4+3=7$).

Calculer la probabilité que y soit égal à 13.

Exercice 2.7.9

Un dé comporte les lettres suivantes sur ses 6 faces : A, E, E, O, R, S
(le E est présent sur deux faces).
On le lance 4 fois de suite et on note, dans l'ordre, les lettres qui apparaissent.

Quelle est la probabilité d'obtenir le mot ROSE ?

Exercice 2.7.10

Un magicien circule parmi les invités d'un mariage. Pour ses tours, il utilise un jeu de 52 cartes. Il fait tirer trois cartes à trois personnes (une par personne, sans remise).

Quelle est la probabilité que le trèfle n'apparaisse pas du tout dans ces 3 cartes ?

Exercice 2.7.11

Une urne contient 17 boules rouges (R), 2 boules blanches (B) et 1 boule noire (N). On tire 3 boules (sans remise). L'ordre compte.

Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.

Exercice 2.7.12

Une pièce de monnaie est lancée 3 fois (l'ordre des résultats compte). Cette pièce est truquée. La probabilité qu'elle retombe sur « Pile » vaut 54 %.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois « Face » de manière consécutive.

Exercice 2.7.13

Le film « Voyage au bout de l'enfer » (de Michael Cimino, 1978) montre des scènes impressionnantes de roulette russe. Voici un problème sur ce thème : Deux personnes jouent à la roulette russe. Une cartouche est introduite dans un barillet à 6 coups. Le barillet est tourné au hasard avant chaque pression sur la détente.

Quelle est la probabilité qu'une des personnes reçoive une balle dans la tête au plus tard au 4^{e} coup ?

Exercice 2.7.14

Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois un total de 9 points en lançant 6 fois une paire de dés ?

Exercice 2.7.15 new

Une urne contient 10 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule noire. On tire au hasard, sans remise, 3 boules. En vous aidant ou non d'un arbre, calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche.

Exercice 2.7.16

Un problème de Tversky et Kahneman.

« Un taxi a été impliqué dans un accident de nuit avec délit de fuite. Deux sociétés de taxis travaillent dans la ville, les Verts et les Bleus. Vous disposez des informations suivantes :

> 85 % des taxis de la ville sont verts et 15 % bleus.
> Un témoin a identifié le taxi comme étant bleu. La cour a vérifié la fiabilité du témoin dans des circonstances reproduisant celles de la nuit de l'accident et a conclu que le témoin avait identifié correctement chacune des deux couleurs à 80 %.

Quelle est la probabilité que le taxi impliqué dans l'accident soit bleu plutôt que vert ? »

Exercice 2.7.17

Vous avez devant vous 10 boîtes. 4 sont piégées : leur ouverture déclenche l'explosion d'une bombe qui provoque une mort immédiate. Votre mission est d'ouvrir successivement 3 boîtes (si vous arrivez jusque là).

a) Dessiner l'arbre de cette mission, en indiquant sur chaque branche l'événement (explosion ou non) et la probabilité correspondante.

b) Quelle est la probabilité que cette mission vous fasse mourir ?

Exercice 2.7.18

Un jeu pour enfants comporte les 26 lettres de l'alphabet sous forme de 26 pièces en bois. On tire au hasard 7 pièces pour composer un mot. Quelle est la probabilité que ce mot contienne 4 consonnes et 3 voyelles, dans n'importe quel ordre ?
[On considère qu'il existe 6 voyelles et 20 consonnes.]

Exercice 2.7.19

En supposant les tirages équiprobables, on tire au hasard une anagramme de ABCDEFGHI. Quelle est la probabilité que A et B ne soient pas contigus et que C et D ne soient pas contigus ?

Exercice 2.7.20

Une population de 125 personnes comporte 50 hommes et 75 femmes. Nous savons que 35 personnes ont les yeux bruns et 90 personnes n'ont pas les yeux bruns. Une personne est tirée au hasard. Soient les événements :

A : « Cette personne est un homme »
B : « Cette personne a les yeux bruns »

Quel doit être dans cette population le pourcentage d'hommes aux yeux bruns pour que A et B soient des événements indépendants ?

Exercice 2.7.21

Problème de l'induction.

Un savant pose une hypothèse *H*.
Il conçoit une expérience destinée à vérifier *H*.
Soit l'événement *A* : L'expérience est un succès.

Cette expérience est telle que si *H* est vraie, la probabilité de *A* vaut 1.
Autrement dit : $P(A|H)=1$

Mais si *H* est fausse, il se peut que *A* se réalise tout de même, avec une probabilité *q*.
Autrement dit : $P(A|\overline{H})=q$

Supposons que l'expérience ait lieu *n* fois
et notons B_n : L'expérience est chaque fois un succès.

Nous avons :
$P(B_n|H)=1$ et $P(B_n|\overline{H})=q^n$

La formule de Bayes donne alors :
$$P(H|B_n)=\frac{P(H)}{P(H)+q^n\cdot(1-P(H))}$$

Calculer cette probabilité pour $n=10$ si on estime que $P(H)=51\%$ et $q=10\%$

*

Solutions

Exercice 2.7.1

$$1-\frac{A_{23}^{365}}{A_{23}^{365}}=50.73\,\%$$

Exercice 2.7.2

$$\frac{5\cdot 4}{5\cdot 5}=80\%$$

Exercice 2.7.3

a) $\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}=14.74\,\%$

b) $\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{19}+\frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}=50.53\,\%$

Exercice 2.7.4

a) ....

b) $P(1)+P(01)+P(001)=0.05+0.95\cdot 0.05+0.95^2\cdot 0.05=14.26\,\%$

c) ....

Exercice 2.7.5

1	2	5
1	2	F
1	F	5
F	2	5
F	F	5

La probabilité demandée vaut $\frac{5}{8}=62.5\%$

Exercice 2.7.6

[pair ; pair] $A_2^4 = 12$
[impair ; impair] $A_2^5 = 20$

La probabilité demandée vaut $\frac{20}{20+12} = 62.5\%$

Exercice 2.7.7

$P(\text{au moins un garçon hémophile}) = 1 - P(\text{pas de garçon hémophile})$
Soit G_s un garçon « sain », c'est-à-dire non hémophile.
La probabilité de naissance de G_s vaut 0.25.
Les différents résultats pour les naissances de 3 enfants, sans garçon hémophile, sont les suivants :

FFF	$0.5^3 = 0.125$
G_sFF ou FG_sF ou FFG_s	$3 \cdot 0.25 \cdot 0.5^2 = 0.1875$
G_sG_sF ou G_sFG_s ou FG_sG_s	$3 \cdot 0.5 \cdot 0.25^2 = 0.09375$
$G_sG_sG_s$	$0.25^3 = 0.015625$

La somme donne 0.421875
La probabilité demandée vaut $1 - 0.421875 = 0.578125$

Exercice 2.7.8

Il y a $80 - 29 = 51$ cas possibles.
Les cas favorables sont les nombres : 49, 58, 67, 76.
Il y en a 4.
La probabilité cherchée est donc : $\frac{4}{51} = 7.84\%$

Exercice 2.7.9

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) = 0.154\%$$

Exercice 2.7.10

$$\frac{C_3^{39}}{C_3^{52}} = 41.4\%$$

Exercice 2.7.11

$$P(\text{au moins une boule blanche}) = 1 - P(\text{pas de boule blanche})$$
$$= 1 - P(\text{RRR ou NRR ou RNR ou RRN})$$
$$= 1 - \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} \cdot \frac{15}{18} - \frac{1}{20} \cdot \frac{17}{19} \cdot \frac{16}{18} \cdot 3 = 28.42\,\%$$

Exercice 2.7.12

$$P(\text{P}) = 0.54$$
$$P(\text{F}) = 0.46$$
$$P(\text{FFF ou FFP ou PFF}) = 0.46^3 + 0.46^2 \cdot 0.54 \cdot 2 = 32.59\,\%$$

Exercice 2.7.13

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = 51.77\,\%$$

Exercice 2.7.14

$$C_2^6 \cdot \left(\frac{4}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{32}{36}\right)^4 = 11.56\,\%$$

Exercice 2.7.15

$$1 - \text{P}(\text{RRR ou RRN ou RNR ou NRR}) = 1 - \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 + 3 \cdot 10 \cdot 9}{13 \cdot 12 \cdot 11}\right) \approx 42.31\,\%$$

Exercice 2.7.16

A : Le taxi est bleu.
$\overline{A}$: Le taxi est vert.
B : Le témoin a vu que le taxi était bleu.

$$P(A) = 0.15$$
$$P(\overline{A}) = 0.85$$
$$P(B \mid A) = 0.8$$
$$P(B \mid \overline{A}) = 0.2$$

$$P(A \mid B) = \frac{0.15 \cdot 0.8}{0.15 \cdot 0.8 + 0.85 \cdot 0.2} = 41.34\%$$

Exercice 2.7.17

a) ....

b) $\frac{4}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=83.33\%$

Exercice 2.7.18

$$\frac{C_4^{20}\cdot C_3^6\cdot 7!}{A_7^{26}}\approx 14.73\,\%$$

Exercice 2.7.19

Posons E1 = « A et B ne sont pas contigus » et E2 = « C et D ne sont pas contigus »

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{E1}\cap\mathrm{E2})&=1-\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{E1}\cap\mathrm{E2}}\right)=1-\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{E1}}\cup\overline{\mathrm{E2}}\right)=1-\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{E1}}\right)-\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{E2}}\right)+\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{E1}}\cap\overline{\mathrm{E2}}\right)\\&=1-\mathrm{P}(\text{A et B sont contigus})-\mathrm{P}(\text{C et D sont contigus})\\&\quad+\mathrm{P}(\text{A et B sont contigus et C et D sont contigus})\\&=1-\frac{2\cdot 8!}{9!}-\frac{2\cdot 8!}{9!}+\frac{4\cdot 7!}{9!}=61.1\,\%\end{aligned}$$

Exercice 2.7.20

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P(A)P(B)}=\frac{50}{125}\cdot\frac{35}{125}=11.2\%$$

Exercice 2.7.21

$$\frac{0.51}{0.51+0.1^{10}\cdot 0.49}=0.999999999996$$ ...étonnant, non ?

*

2.8 Variable aléatoire discrète

Soit l'univers Ω d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire (en abrégé v.a.) est une fonction *X* qui associe à chaque événement de Ω une valeur numérique.

Exemple 2.8.1

Une urne contient cinq boules numérotées.
Trois d'entre elles portent le numéro 1, et les deux autres boules portent le numéro 3 :

1, 1, 1, 3, 3

Expérience : on extrait successivement, sans remise, trois boules de cette urne et on note la liste des numéros.

Univers : Ω = {111 ; 113 ; 131 ; 133 ; 311 ; 313 ; 331}

Définissons la v.a. *X* qui associe à chaque liste de Ω la somme des numéros de cette liste.

On a :

X(111) = 1 + 1 + 1 = 3
X(113) = 1 + 1 + 3 = 5
X(131) = 1 + 3 + 1 = 5
X(133) = 1 + 3 + 3 = 7
X(311) = 3 + 1 + 1 = 5
X(313) = 3 + 1 + 3 = 7
X(331) = 3 + 3 + 1 = 7

Ainsi cette v.a. *X* peut prendre trois valeurs différentes :
$x_1=3$, $x_2=5$ et $x_3=7$

*

Quand une v.a. *X* peut prendre *n* valeurs différentes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, l'ensemble des couples $(x_i; P(X=x_i))$, pour *i* entier variant de 1 à *n*, s'appelle la distribution de *X*.

Parfois, notamment dans le cas de la distribution binomiale que nous étudierons plus loin, la numérotation de l'indice commence à 0 plutôt qu'à 1.

Une distribution finie peut être représentée par un <u>tableau</u>, un <u>diagramme en bâtons</u> ou un <u>histogramme</u>.

<u>Suite de l'exemple 2.8.1</u>

$$P(X=x_1)=P(X=3)=P(111)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=10\%$$

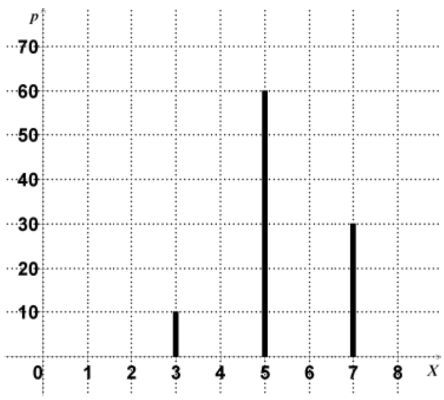
$$P(X=x_2)=P(X=5)=P(113 \quad \text{ou} \quad 131 \quad \text{ou} \quad 311)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3=60\%$$

$$P(X=x_3)=P(X=7)=P(133 \quad \text{ou} \quad 313 \quad \text{ou} \quad 331)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3=30\%$$

<u>Tableau</u>

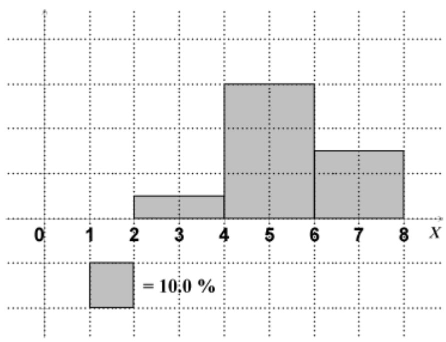
x_i	$P(X=x_i)$
3	10 %
5	60 %
7	30 %

<u>Diagramme en bâtons</u>



Les probabilités en % sont les hauteurs des bâtons.

<u>Histogramme</u>



Les probabilités en % sont les aires des bandes collées (ici, cela signifie qu'une unité verticale vaut 10)

Bien sûr, on a toujours : $\sum_i P(X=x_i)=1$

Cette formule caractérise une distribution discrète de probabilités.

Exercice 2.8.1

Une urne contient cinq boules numérotées. Deux d'entre elles portent le numéro 1, deux autres portent le numéro 2 et la dernière porte le numéro 5 :

1, 1, 2, 2, 5

Expérience : on extrait successivement, sans remise, deux boules de cette urne et on note la liste des numéros.

Univers : $\Omega = \{11 ; 12 ; 15 ; 21 ; 22 ; 25 ; 51 ; 52\}$

Soit X la v.a. qui associe à chaque liste de Ω la moyenne des numéros de cette liste.

Donner la distribution de X sous forme de tableau, de diagramme en bâtons et d'histogramme.

Exercice 2.8.2

Une urne contient trois boules numérotées. Elles portent respectivement les numéros :

2, 3, 5

Expérience : on extrait successivement, avec remise, deux boules de cette urne et on note la liste des numéros.

Univers : $\Omega = \{22 ; 23 ; 25 ; 32 ; 33 ; 35 ; 52 ; 53 ; 55\}$

Soit X la v.a. qui associe à chaque liste de Ω la différence absolue des numéros de cette liste.

Donner la distribution de X sous forme de tableau, de diagramme en bâtons et d'histogramme.

*

Solutions

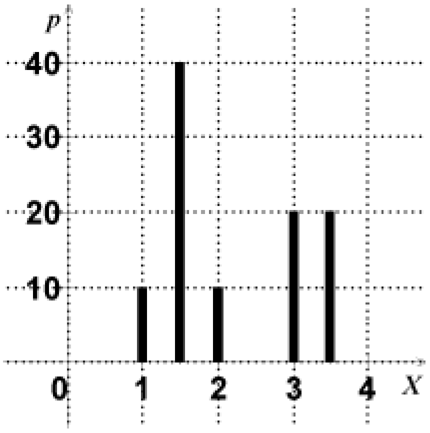
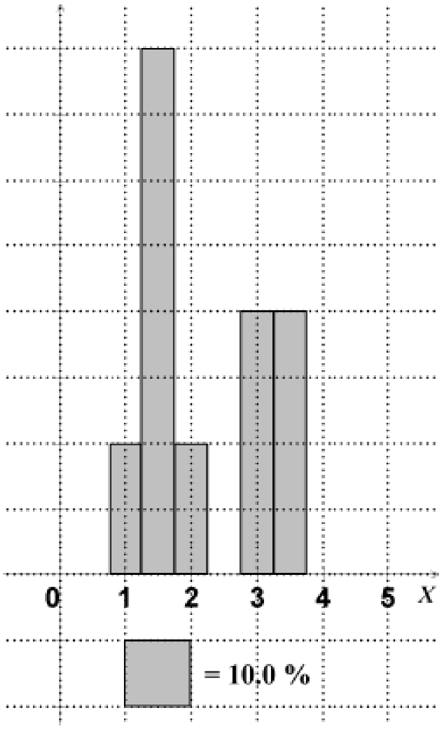
Exercice 2.8.1

$X(11) = 1$
$X(12) = 1.5$
$X(15) = 3$
$X(21) = 1.5$
$X(22) = 2$
$X(25) = 3.5$
$X(51) = 3$
$X(52) = 3.5$

Ainsi cette v.a. X peut prendre cinq valeurs différentes :
$x_1=1 \quad , \quad x_2=1.5 \quad , \quad x_3=2 \quad , \quad x_4=3 \quad \text{et} \quad x_5=3.5$

$$P(X=x_1)=P(X=1)=P(11)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=10\%$$
$$P(X=x_2)=P(X=1.5)=P(12 \;\text{ ou }\; 21)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot 2=40\%$$
$$P(X=x_3)=P(X=2)=P(22)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=10\%$$
$$P(X=x_4)=P(X=3)=P(15 \;\text{ ou }\; 51)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2=20\%$$
$$P(X=x_5)=P(X=3.5)=P(25 \;\text{ ou }\; 52)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2=20\%$$

x_i	$P(X=x_i)$
1	10%
1.5	40%
2	10%
3	20%
3.5	20%

Diagramme en bâtons	Histogramme
	

Exercice 2.8.2

$X(22) = 0$
$X(23) = 1$
$X(25) = 3$
$X(32) = 1$
$X(33) = 0$
$X(35) = 2$
$X(52) = 3$
$X(53) = 2$
$X(55) = 0$

Ainsi cette v.a. X peut prendre quatre valeurs différentes :
$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ et $x_4 = 3$

$$P(X=x_1)=P(X=0)=P(22 \text{ ou } 33 \text{ ou } 55)=\frac{3}{9}=33.\bar{3}\%$$

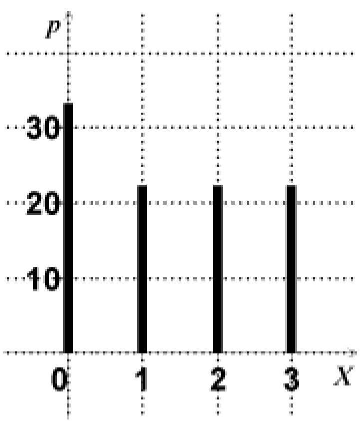
$$P(X=x_2)=P(X=1)=P(23 \text{ ou } 32)=\frac{2}{9}=22.\bar{2}\%$$

$$P(X=x_3)=P(X=2)=P(35 \text{ ou } 53)=\frac{2}{9}=22.\bar{2}\%$$

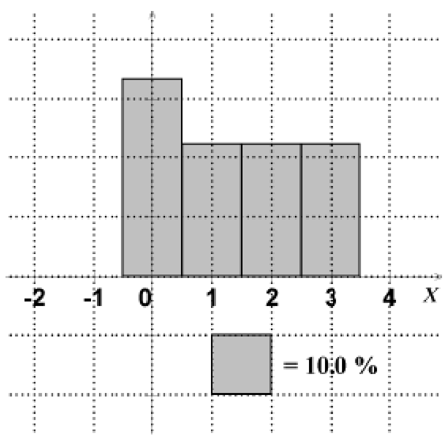
$$P(X=x_4)=P(X=3)=P(25 \text{ ou } 52)=\frac{2}{9}=22.\bar{2}\%$$

x_i	$P(X=x_i)$
0	$33.\bar{3}\%$
1	$22.\bar{2}\%$
2	$22.\bar{2}\%$
3	$22.\bar{2}\%$

<u>Diagramme en bâtons</u>



<u>Histogramme</u>



*

Soit la distribution $(x_i ; P(X = x_i))$,
pour *i* entier variant de 1 à *n* (ou de 0 à *n*), d'une v.a. *X*

On définit :

<u>l'espérance</u> ou la <u>moyenne</u> de *X*, notée $E(X)$ ou μ_X ou simplement μ , par :

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

Formule 12

L'espérance est une moyenne, pondérée par les probabilités, des valeurs de *X*.

<u>Exemple 2.8.2</u>

Expérience : on jette un dé deux fois et on note la liste des numéros obtenus.

Univers : Ω = {11 ; 12 ; 13 ; ... ; 66}
$\text{card}(\Omega) = 36$

Définissons la v.a. *X* qui associe à chaque liste de Ω le maximum des deux numéros de cette liste.

Cette v.a. *X* peut prendre six valeurs différentes :

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ et $x_6 = 6$

Les différentes probabilités sont les suivantes :

$$P(X = x_1) = P(X = 1) = P(11) = \frac{1}{36}$$
$$P(X = x_2) = P(X = 2) = P(12 \text{ ou } 21 \text{ ou } 22) = \frac{3}{36}$$
$$P(X = x_3) = P(X = 3) = P(13 \text{ ou } 23 \text{ ou } 31 \text{ ou } 32 \text{ ou } 33) = \frac{5}{36}$$
$$P(X = x_4) = P(X = 4) = \frac{7}{36}$$
$$P(X = x_5) = P(X = 5) = \frac{9}{36}$$
$$P(X = x_6) = P(X = 6) = \frac{11}{36}$$

Donc

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P(X=x_i)$$
$$=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}=4.47$$

*

Dans le cas d'un jeu de hasard où il est possible de gagner ou de perdre de l'argent en fonction des issues, l'espérance de la v.a. X qui associe à chaque événement le montant gagné (valeur positive) ou le montant perdu (valeur négative) donne le gain moyen que le joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Ce gain moyen est véritablement un gain si sa valeur est positive ; mais il représente une perte moyenne si sa valeur est négative. Par conséquent, un gain moyen positif est à long terme avantageux pour le joueur ; un gain moyen négatif est à long terme désavantageux pour le joueur. Un gain moyen nul correspond à ce qu'on appelle un jeu équitable.

Exemple 2.8.3

Considérons une roue de la fortune, divisée en trois zones :

- une zone A de couleur ambre, dont la surface vaut 45 % de l'aire du disque
- une zone B de couleur bleue, dont la surface vaut 35 % de l'aire du disque
- une zone C de couleur chair, dont la surface vaut 20 % de l'aire du disque

Si cette roue tourne de manière aléatoire, nous avons donc :

$$P(A)=0.45$$
$$P(B)=0.35$$
$$P(C)=0.2$$

Si A sort, le joueur gagne 6 EUR ; si B sort, le joueur gagne 7 EUR ; si C sort, le joueur perd 30 EUR.

Traduisons cela au moyen d'une v.a. X :

$$X(A)=x_1=6$$
$$X(B)=x_2=7$$
$$X(C)=x_3=-30$$

L'espérance de X vaut donc :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(X=x_i)=6\cdot 0.45+7\cdot 0.35-30\cdot 0.2=-0.85$$

Elle est négative. La perte moyenne du joueur est de 0.85 EUR par partie.

Exemple 2.8.4

Considérons une pièce de monnaie équilibrée lancée deux fois.

Si « Face » sort deux fois, le joueur gagne 10 EUR ; si « Face » sort une seule fois, le joueur gagne 6 EUR ; si « Face » ne sort pas, le joueur perd z EUR.

Quelle valeur faut-il donner à z pour que le jeu soit équitable ?

Traduisons cela au moyen d'une v.a. X :

$$X(\text{FF})=x_1=10$$
$$X(\text{FP ou PF})=x_2=6$$
$$X(\text{PP})=x_3=-z$$

L'espérance de X vaut donc :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(X=x_i)=10\cdot 0.25+6\cdot 0.5-z\cdot 0.25=5.5-0.25z$$

Cette espérance est nulle pour

$$z=\frac{5.5}{0.25}=22 \text{ EUR}$$

*

Exercice 2.8.3

Calculer l'espérance de la v.a. de l'exemple 2.8.1

Exercice 2.8.4

Calculer l'espérance de la v.a. de l'exercice 2.8.1

Exercice 2.8.5

Calculer l'espérance de la v.a. de l'exercice 2.8.2

Exercice 2.8.6

On lance une pièce truquée trois fois. La probabilité que cette pièce tombe sur « Face » est constante et vaut 0.6. L'univers est formé des événements : PPP, PPF, PFP, etc. Calculer l'espérance de la v.a. X qui associe le nombre de « Face » à chaque événement de l'univers de cette expérience.

Exercice 2.8.7

On lance une pièce de monnaie équilibrée au plus cinq fois. Sitôt qu'on obtient « Face », on s'arrête. Il se peut qu'on n'obtienne jamais « Face » ; dans ce cas, on s'arrête au cinquième lancer. L'univers est formé des événements : F, PF, PPF, etc. Calculer l'espérance de la v.a. X qui associe le nombre de lancers à chaque événement de l'univers de cette expérience.

Exercice 2.8.8

Une urne contient deux boules noires et trois boules blanches. On tire sans remise des boules de cette urne, une à une, jusqu'à obtenir une boule noire. L'univers est formé des événements : N, BN, BBN, etc. Calculer l'espérance de la v.a. X qui associe le nombre de tirages à chaque événement de l'univers de cette expérience.

Exercice 2.8.9

Calculer l'espérance de la distribution suivante :

x_i	$P(X=x_i)$
10	0.2
15	0.1
20	0.4
25	0.25
30	0.05

Exercice 2.8.10

Compléter le tableau de la distribution suivante pour que l'espérance soit nulle

x_i	$P(X=x_i)$
2	0.15
4	0.25
6	0.1
8	0.3
u	v

Exercice 2.8.11

Un élève propose à son professeur de mathématiques le jeu suivant :

Une pièce équilibrée est lancée 20 fois de suite.
Si « Pile » n'apparaît jamais, l'élève verse 2 millions d'euros à son professeur. Sinon, le professeur verse 1.95 euro à l'élève.

a) Ce jeu est-il avantageux pour le professeur ?
b) Quelle somme devrait verser l'élève pour que le jeu soit équitable avec la somme de 1.95 versée par le professeur ?

Exercice 2.8.12

Une roulette de casino français possède 37 numéros : de 0 à 36.
Il est possible de miser sur n'importe quel numéro, sauf le 0.
Un joueur mise un montant *S* sur un numéro. Si ce numéro sort, il gagne 35 fois sa mise ; sinon, il perd sa mise. Calculer le gain moyen de ce joueur.

Exercice 2.8.13

Un joueur mise un montant *S* sur un numéro choisi parmi les entiers de 1 à 6. Il jette un dé trois fois. Si le numéro choisi n'apparaît pas, il perd sa mise. Sinon, il gagne autant de fois *S* que le numéro choisi apparaît dans les 3 lancers. Calculer le gain moyen de ce joueur.

*

Solutions

Exercice 2.8.3

$$3\cdot 0.1+5\cdot 0.6+7\cdot 0.3=5.4$$

Exercice 2.8.4

$$1\cdot 0.1+1.5\cdot 0.4+2\cdot 0.1+3\cdot 0.2+3.5\cdot 0.2=2.2$$

Exercice 2.8.5

$$0\cdot 0.\overline{3}+1\cdot 0.\overline{2}+2\cdot 0.\overline{2}+3\cdot 0.\overline{2}=6\cdot 0.\overline{2}=1.\overline{3}$$

Exercice 2.8.6

$$P(X=0)=0.4^3=0.064$$
$$P(X=1)=3\cdot 0.6\cdot 0.4^2=0.288$$
$$P(X=2)=3\cdot 0.6^2\cdot 0.4=0.432$$
$$P(X=3)=0.6^3=0.216$$

$$E(X)=0\cdot 0.064+1\cdot 0.288+2\cdot 0.432+3\cdot 0.216=1.8$$

Exercice 2.8.7

$$P(X=1)=P(\text{F})=0.5$$
$$P(X=2)=P(\text{PF})=0.5^2=0.25$$
$$P(X=3)=P(\text{PPF})=0.5^3=0.125$$
$$P(X=4)=P(\text{PPPF})=0.5^4=0.0625$$
$$P(X=5)=P(\text{PPPPF} \quad \text{ou} \quad \text{PPPPP})=2\cdot 0.5^5=0.0625$$

$$E(X)=1\cdot 0.5+2\cdot 0.25+3\cdot 0.125+4\cdot 0.0625+5\cdot 0.0625=1.9375$$

Exercice 2.8.8

$$P(X=1)=P(\mathrm{N})=\frac{2}{5}=0.4$$
$$P(X=2)=P(\mathrm{BN})=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=0.3$$
$$P(X=3)=P(\mathrm{BBN})=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=0.2$$
$$P(X=4)=P(\mathrm{BBBN})=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=0.1$$

$$E(X)=1\cdot 0.4+2\cdot 0.3+3\cdot 0.2+4\cdot 0.1=2$$

Exercice 2.8.9

$$E(X)=10\cdot 0.2+15\cdot 0.1+20\cdot 0.4+25\cdot 0.25+30\cdot 0.05=19.25$$

Exercice 2.8.10

On trouve d'abord $v=0.2$ pour que la somme des probabilités donne 1.
Ensuite, l'espérance nulle donne l'équation :

$$2\cdot 0.15+4\cdot 0.25+6\cdot 0.1+8\cdot 0.3+u\cdot 0.2=0 \quad ,$$

dont la solution est : $u=-129.5$

Exercice 2.8.11

a) le gain moyen du professeur est :

$$2\cdot 10^6\cdot\frac{1}{2^{20}}-1.95\cdot\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)=-0.0426$$

La valeur est négative, donc ce jeu est désavantageux pour le professeur.

b) Soit S la somme demandée. On a l'équation :

$$S\cdot\frac{1}{2^{20}}-1.95\cdot\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)=0$$, dont la solution est :

$$S=1.95\cdot\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)\cdot 2^{20}=1.95\cdot(2^{20}-1)=2'044'721.25$$

Exercice 2.8.12

Le gain moyen vaut :

$$35\,S\cdot\frac{1}{37}-S\cdot\frac{36}{37}=-\frac{S}{37}$$

Il s'agit d'une perte moyenne d'un trente-septième de la mise.

Exercice 2.8.13

Le gain moyen vaut :

$$-S\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+S\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+2\,S\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)+3\,S\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=-\frac{17\,S}{216}$$

Il s'agit d'une perte moyenne d'environ 8 % de la mise.

*

Soit la distribution $(x_i ; P(X=x_i))$,
pour *i* entier variant de 1 à *n* (ou de 0 à *n*), d'une v.a. *X*

Notons μ l'espérance de cette distribution.

On définit :

la <u>variance</u> de *X*, notée $Var(X)$ ou σ_X^2 ou simplement σ^2 , par :

$$Var(X)=E[(X-\mu)^2]=\sum_i (x_i-\mu)^2 \cdot P(X=x_i)$$

Formule 13

et on définit :

l'<u>écart-type</u> ou la <u>déviation standard</u> de *X*, noté $SD(X)$ ou σ_X ou simplement σ , par :

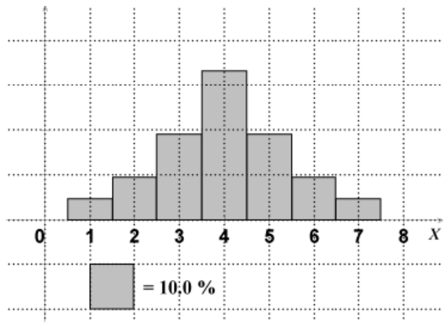
$$SD(X)=\sqrt{Var(X)}$$

Formule 14

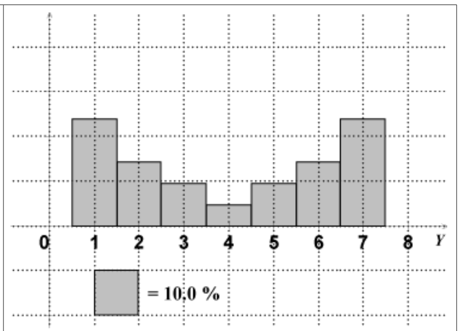
Ces deux notions fournissent chacune une mesure de la dispersion des valeurs de *X* autour de son espérance, laquelle est, rappelons-le, une moyenne, pondérée par les probabilités, des valeurs de *X*.

Si deux v.a. *X* et *Y* ont les mêmes valeurs et la même espérance, l'histogramme de la v.a. de plus petite variance sera plus « concentré » autour de l'espérance que l'histogramme de l'autre v.a.

Exemple 2.8.5



L’espérance de X vaut 4
et son écart-type vaut 1.41



L’espérance de Y vaut 4
et son écart-type vaut 2.37

*

En pratique, on emploie souvent une formule équivalente pour calculer la variance :

$$Var(X) = E[X^2] - \mu^2 = \left(\sum_i x_i^2 \cdot P(X = x_i)\right) - \mu^2$$

Formule 15

Exemple 2.8.6

Considérons la v.a. X dont la distribution est donnée par le tableau suivant :

x_i	$P(X=x_i)$
3	0.2
4	0.4
5	0.2
7	0.1
8	0.1

Calculons d'abord son espérance :

$$\mu=E(X)=3\cdot 0.2+4\cdot 0.4+5\cdot 0.2+7\cdot 0.1+8\cdot 0.1=4.7$$

Puis calculons sa variance à l'aide de la seconde formule :

$$\sigma^2=Var(X)=3^2\cdot 0.2+4^2\cdot 0.4+5^2\cdot 0.2+7^2\cdot 0.1+8^2\cdot 0.1-4.7^2=2.41$$

On en déduit un écart-type de :

$$\sigma=SD(X)=\sqrt{2.41}=1.55$$

*

Exercice 2.8.14

Calculer la variance et l’écart-type de la v.a. de l’exemple 2.8.1

Exercice 2.8.15

Calculer la variance et l’écart-type de la v.a. de l’exercice 2.8.1

Exercice 2.8.16

Calculer la variance et l’écart-type de la v.a. de l’exercice 2.8.2

Exercice 2.8.17

Calculer la variance et l’écart-type de la v.a. de l’exemple 2.8.2

*

Solutions

Exercice 2.8.14

$$\sigma^2 = 3^2 \cdot 0.1 + 5^2 \cdot 0.6 + 7^2 \cdot 0.3 - 5.4^2 = 1.44$$
$$\sigma = \sqrt{1.44} = 1.2$$

Exercice 2.8.15

$$\sigma^2 = 1^2 \cdot 0.1 + 1.5^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.1 + 3^2 \cdot 0.2 + 3.5^2 \cdot 0.2 - 2.2^2 = 0.81$$
$$\sigma = \sqrt{0.81} = 0.9$$

Exercice 2.8.16

$$\sigma^2 = 0^2 \cdot 0.\overline{3} + 1^2 \cdot 0.\overline{2} + 2^2 \cdot 0.\overline{2} + 3^2 \cdot 0.\overline{2} - 1.\overline{3}^2 = 1.\overline{3}$$
$$\sigma = \sqrt{1.\overline{3}} = 1.15$$

Exercice 2.8.17

$$\sigma^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = 1.97$$
$$\sigma = \sqrt{1.97} = 1.4$$

*

Une v.a. est dite <u>centrée réduite</u> quand son espérance vaut 0 et son écart-type vaut 1.

Si une v.a. X possède une espérance μ et un écart-type σ,
alors la v.a. $U=\frac{X-\mu}{\sigma}$ est centrée réduite.

Dit autrement :

Toute v.a. X d'espérance μ et d'écart-type σ peut s'écrire
$X=\mu+\sigma\cdot U$, où U est une v.a. centrée réduite.

Transformer des v.a., au moyen de cet artifice, en v.a. centrées réduites permet une meilleure comparaison des distributions.

<u>Exemple 2.8.7</u>

Variable X

x_i	$P(X=x_i)$
2	0.1
4	0.6
6	0.3

$\mu_X=2\cdot 0.1+4\cdot 0.6+6\cdot 0.3=4.4$
$\sigma_X^2=2^2\cdot 0.1+4^2\cdot 0.6+6^2\cdot 0.3-4.4^2$
$=1.44$
$\sigma_X=\sqrt{1.44}=1.2$

Variable Y

y_i	$P(Y=y_i)$
3	0.5
4	0.3
5	0.2

$\mu_Y=3\cdot 0.5+4\cdot 0.3+5\cdot 0.2=3.7$
$\sigma_Y^2=3^2\cdot 0.5+4^2\cdot 0.3+5^2\cdot 0.2-3.7^2$
$=0.61$
$\sigma_Y=\sqrt{0.61}=0.781$

Variable $U=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$

u_i	$P(U=u_i)$
–2	0.1
–0.333	0.6
1.333	0.3

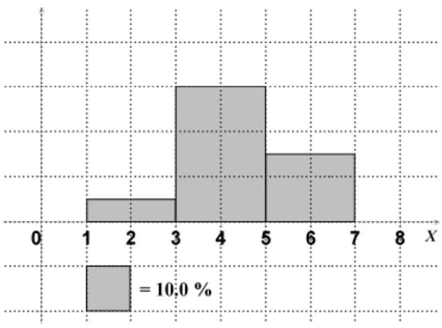
On vérifie qu'on a bien
$\mu_U=0$ et $\sigma_U=1$

Variable $V=\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$

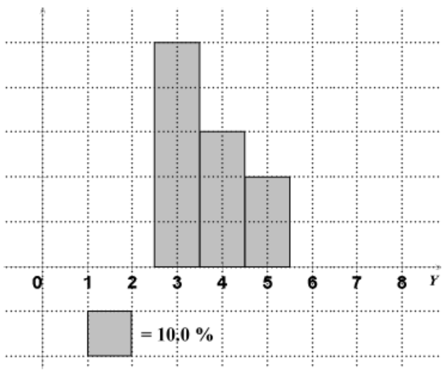
v_i	$P(V=v_i)$
–0.896	0.5
0.384	0.3
1.665	0.2

On vérifie qu'on a bien
$\mu_V=0$ et $\sigma_V=1$

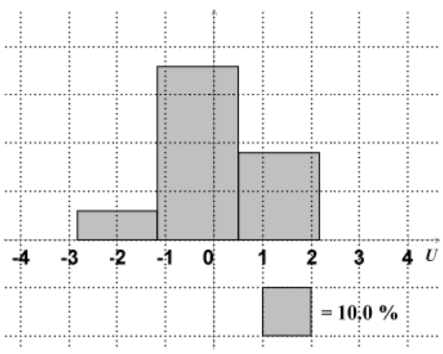
Histogramme de X



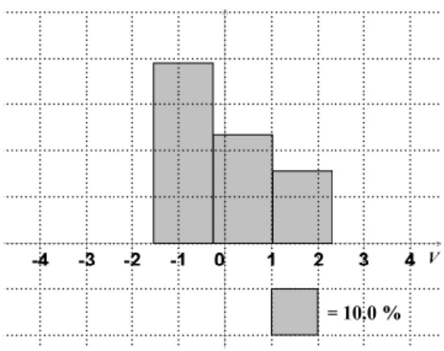
Histogramme de Y



Histogramme de U



Histogramme de V



*

Exercice 2.8.18

Considérons la v.a. W dont la distribution est donnée par le tableau suivant :

w_i	$P(W=w_i)$
–2	0.12
–1	0.04
0	0.66
1	0.08
2	0.10

Vérifier que W est centrée réduite.

Exercice 2.8.19

Considérons la v.a. X dont la distribution est donnée par le tableau suivant :

x_i	$P(X=x_i)$
3	0.08
5	0.18
7	0.48
9	0.18
11	0.08

Posons : $U=\frac{X-\mu}{\sigma}$, où μ et σ sont l'espérance et l'écart-type de X.

Dessiner l'histogramme de U.

Exercice 2.8.20

Soient a et b deux constantes et X une v.a.

Prouver d'abord les deux formules suivantes :

$$E(a X+b)=a E(x)+b$$
$$Var(a X+b)=a^2 Var(X)$$

Formules 16

Puis s'en servir pour prouver que, si μ et σ sont l'espérance et l'écart-type de X, alors

$U=\frac{X-\mu}{\sigma}$ est une v.a. d'espérance nulle et d'écart-type égal à 1.

*

Solutions

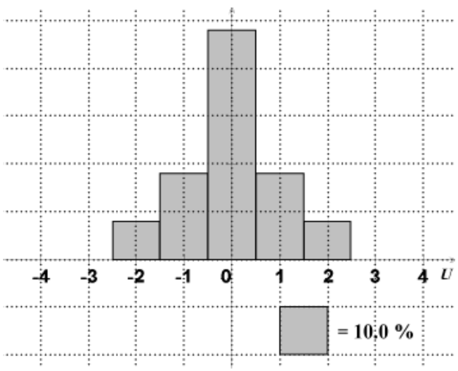
Exercice 2.8.18

$$E(W) = -2\cdot 0.12 - 1\cdot 0.04 + 0\cdot 0.66 + 1\cdot 0.08 + 2\cdot 0.1 = 0$$
$$Var(W) = (-2)^2\cdot 0.12 + (-1)^2\cdot 0.04 + 0^2\cdot 0.66 + 1^2\cdot 0.08 + 2^2\cdot 0.1 = 1$$

Exercice 2.8.19

$$\mu = E(X) = 3\cdot 0.08 + 5\cdot 0.18 + 7\cdot 0.48 + 9\cdot 0.18 + 11\cdot 0.08 = 7$$
$$\sigma^2 = Var(X) = 3^2\cdot 0.08 + 5^2\cdot 0.18 + 7^2\cdot 0.48 + 9^2\cdot 0.18 + 11^2\cdot 0.08 - 7^2 = 4$$
$$\sigma = \sqrt{4} = 2$$

u_i	$P(U=u_i)$
–2	0.08
–1	0.18
0	0.48
1	0.18
2	0.08



Exercice 2.8.20

Posons $p_i = P(X = x_i)$

$$E(aX+b) = \sum (a x_i + b)\, p_i = \sum a x_i p_i + \sum b p_i$$
$$= a \sum x_i p_i + b \sum p_i = a E(X) + b$$

$$Var(aX+b) = E[(aX+b)^2] - (aE(X)+b)^2$$
$$= E[a^2 X^2 + 2abX + b^2] - (a\mu + b)^2$$
$$= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2\mu^2 - 2ab\mu - b^2$$
$$= a^2 (E(X^2) - \mu^2) + 2ab\mu + b^2 - 2ab\mu - b^2$$
$$= a^2 (E(X^2) - \mu^2) = a^2 Var(X)$$

$$U = \frac{X-\mu}{\sigma} = \left(\frac{1}{\sigma}\right) X - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$E(U) = E\left[\left(\frac{1}{\sigma}\right) X - \frac{\mu}{\sigma}\right] = \left(\frac{1}{\sigma}\right) E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \left(\frac{1}{\sigma}\right)\mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$Var(U) = Var\left[\left(\frac{1}{\sigma}\right) X - \frac{\mu}{\sigma}\right] = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 Var(X) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \sigma^2 = 1$$

*

2.9 De la loi binomiale à la loi normale

Au chapitre 2.5, nous avons jeté un premier regard sur la loi binomiale. Examinons-la maintenant sous l'angle d'une v.a. discrète.

Une v.a. X est dite binomiale si sa distribution est donnée par :

$$P(X=i)=C_i^n p^i (1-p)^{n-i}$$

où n est un entier positif
et p une probabilité constante

Formule 17

Cette loi correspond à la situation suivante :

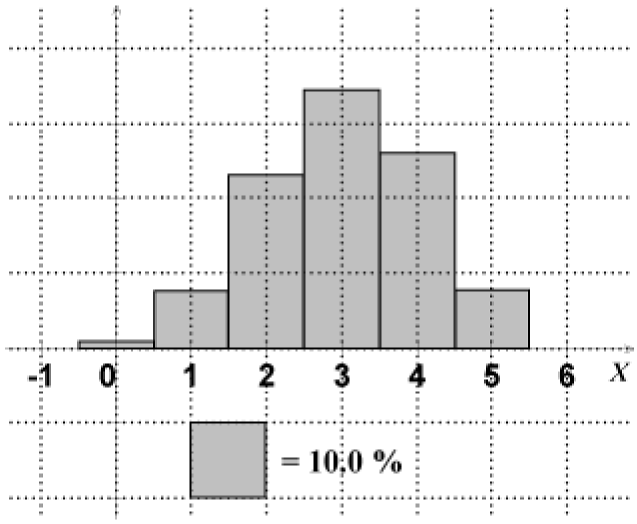
Si, quand on accomplit n fois une expérience où un événement S (nommé « succès ») peut se produire avec une probabilité constante p (chaque succès étant indépendant des succès précédents), X représente le nombre de succès.

Exemple 2.9.1

On lance 5 fois une pièce de monnaie truquée qui possède une probabilité $p = 0.6$ de retomber sur « Face ». Posons X = le nombre de lancers qui donnent « Face ».

La distribution de X est la suivante :

0 succès : $P(X=0) = C_0^5 \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^5 = 0.01024$
1 succès : $P(X=1) = C_1^5 \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^4 = 0.0768$
2 succès : $P(X=2) = C_2^5 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^3 = 0.2304$
3 succès : $P(X=3) = C_3^5 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 = 0.3456$
4 succès : $P(X=4) = C_4^5 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 = 0.2592$
5 succès : $P(X=5) = C_5^5 \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^0 = 0.07776$



Et on a : $\mu = 3$ et $\sigma = 1.09545$

*

Dans une loi binomiale, comme *X* dépend de *n* et de *p*, on note parfois :

$^{n,p}X$ ou ^{n}X à la place de *X*

On peut aussi écrire :

X est une v.a. $B(n, p)$ (*X* est une v.a. de type Binomiale avec paramètres *n* et *p*)

Des calculs algébriques permettent de démontrer les formules suivantes :

$$E\left(^{n,p}X\right)=np$$
$$Var\left(^{n,p}X\right)=np(1-p)$$

Formules 18

Dans l'exemple précédent, ces formules donnent :

$$\mu=5\cdot 0.6=3$$
$$\sigma^2=5\cdot 0.6\cdot 0.4=1.2$$

*

Exercice 2.9.1

Reprendre la v.a. X de l'exemple 2.9.1 et calculer :

$P(X \leqslant 2)$
$P(X \geqslant 4)$
$P(1 \leqslant X \leqslant 3)$
$P(X \leqslant 1 \text{ ou } X \geqslant 3)$

Exercice 2.9.2

Un jeu se déroule en 10 parties. Pour chaque partie, la probabilité qu'un joueur A gagne vaut 0.45. Posons X = le nombre de victoires de A. Calculer :

a) $P(X=7)$
b) $P(X \geqslant 2)$
c) $P(X<9)$
d) $\mu = E(X)$ $\sigma^2 = Var(X)$ $\sigma = \sqrt{Var(X)}$
e) $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$
f) $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$

*

Solutions

Exercice 2.9.1

$$P(X \leqslant 2) = 0.01024 + 0.0768 + 0.2304 = 0.31744$$
$$P(X \geqslant 4) = 0.2592 + 0.07776 = 0.33696$$
$$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = 0.0768 + 0.2304 + 0.3456 = 0.6528$$
$$P(X \leqslant 1 \text{ ou } X \geqslant 3) = 1 - P(X = 2) = 1 - 0.2304 = 0.7696$$

Exercice 2.9.2

a)
$$P(X = 7) = C_7^{10} \cdot 0.45^7 \cdot 0.55^3 = 0.0746$$

b)
$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$
$$= 1 - C_0^{10} \cdot 0.45^0 \cdot 0.55^{10} - C_1^{10} \cdot 0.45^1 \cdot 0.55^9 = 0.9767$$

c)
$$P(X < 9) = 1 - P(X \geqslant 9) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10)$$
$$= 1 - C_9^{10} \cdot 0.45^9 \cdot 0.55^1 - C_{10}^{10} \cdot 0.45^{10} \cdot 0.55^0 = 0.9955$$

d)
$$\mu = E(X) = 10 \cdot 0.45 = 4.5$$
$$\sigma^2 = Var(X) = 10 \cdot 0.45 \cdot 0.55 = 2.475$$
$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2.475} = 1.573$$

e)
$$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = P(2.927 \leqslant X \leqslant 6.073) = P(3 \leqslant X \leqslant 6)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$
$$= 0.7984$$

f)
$$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = P(1.354 \leqslant X \leqslant 7.646) = P(2 \leqslant X \leqslant 7)$$
$$= 1 - P(X < 2) - P(X > 7)$$
$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 8) - P(X = 9) - P(X = 10)$$
$$= 0.9493$$

*

Exemple 2.9.2

Considérons une suite de variables binomiales ${}^{n}X$,
avec une probabilité fixe de $p=0.4$ et l'entier n qui varie.

Nous avons :

$$\mu_n=E({}^{n}X)=0.4n \quad \text{et} \quad \sigma_n=\sqrt{Var({}^{n}X)}=\sqrt{0.24n}$$

Prenons la suite de v.a. centrées réduites associées à ${}^{n}X$:

$${}^{n}U=\frac{{}^{n}X-\mu_n}{\sigma_n}=\frac{{}^{n}X-0.4n}{\sqrt{0.24n}}$$

et examinons comment évolue la distribution de ${}^{n}U$ quand n augmente.

Notons ${}^{n}P=P({}^{n}X=x_i)=P({}^{n}U=u_i)$

$n=3$:

${}^{3}X$	0	1	2	3
${}^{3}U$	–1.42	–0.24	0.94	2.12
${}^{3}P$	0.216	0.432	0.288	0.064

$n=6$:

${}^{6}X$	0	1	2	3
${}^{6}U$	–2	–1.167	–0.333	0.5
${}^{6}P$	0.047	0.187	0.311	0.276

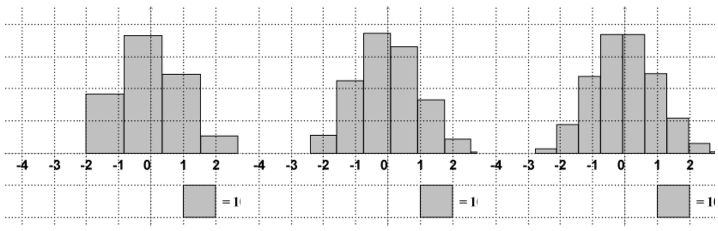
${}^{6}X$	4	5	6
${}^{6}U$	1.333	2.167	3
${}^{6}P$	0.138	0.037	0.004

$n=9$:

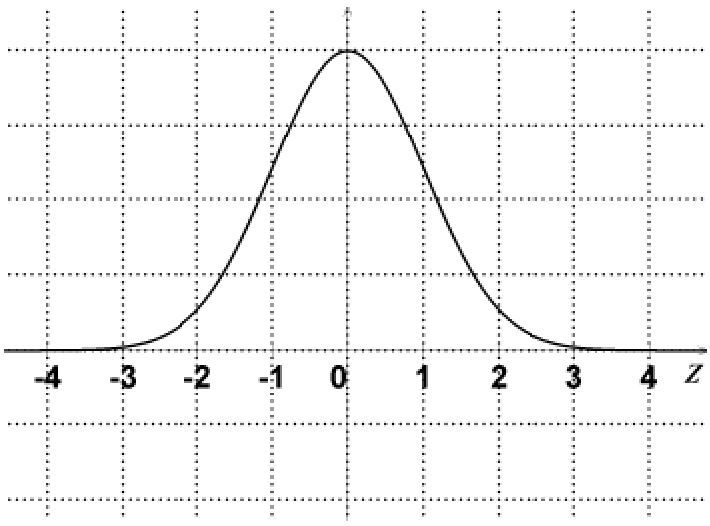
${}^{9}X$	0	1	2	3	4
${}^{9}U$	–2.449	–1.769	–1.089	–0.408	0.272
${}^{9}P$	0.0101	0.0605	0.1613	0.2508	0.2508

${}^{9}X$	5	6	7	8	9
${}^{9}U$	0.953	1.633	2.313	2.994	3.674
${}^{9}P$	0.1672	0.0743	0.0212	0.0035	0.0003

Traduisons ces tableaux en histogrammes :



Ces histogrammes se rapprochent d'une célèbre courbe en cloche :



Cette courbe, donnée par la fonction $f(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{Z^2}{2}}$,
est la courbe de Gauss (pour les Allemands),
la courbe de Laplace-Gauss (pour les Français),
the Bell-Curve (pour les Anglais et les Américains)

Elle correspond à une variable aléatoire continue (passage à la limite, pour *n* tendant vers l'infini, d'une suite de variables discrètes centrées réduites)

La loi de distribution est alors remplacée par la fonction $f(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{Z^2}{2}}$
qui s'appelle la fonction de densité de la v.a. continue *Z*.

On dit que *Z* est une variable aléatoire normale ou gaussienne.
On peut dire aussi que *Z* suit une loi normale.

Le maximum vaut $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.4$
(dans le graphique précédent, l'unité verticale vaut 0.1)

L'aire entre cette courbe et l'axe horizontal (on dit généralement « l'aire sous la courbe ») vaut 1.

Si *z* est une valeur donnée de la v.a. *Z*, la probabilité de trouver *Z* en dessous de *z*, c'est-à-dire $P(Z\leqslant z)$ est l'aire sous la courbe, depuis $-\infty$ jusqu'à *z*.

La fonction $\Phi(z)=P(Z\leqslant z)$ s'appelle la fonction de répartition de *Z*.

Il existe des tables et des outils en ligne (par exemple **123calculus.com**) pour calculer cette fonction. Voici quelques valeurs :

$\Phi(0)=0.5$
$\Phi(0.5)=0.6915$
$\Phi(1)=0.8413$
$\Phi(1.5)=0.9332$
$\Phi(2)=0.9772$
$\Phi(-0.5)=0.3085$
$\Phi(-1)=0.1587$
$\Phi(-1.5)=0.0668$
$\Phi(-2)=0.0228$

Les tables classiques ne sont fournies que pour des valeurs positives.
Il faut alors avoir recours à :

$$\Phi(-z)=1-\Phi(z)$$

Formule 19

Les notions d'espérance (ou moyenne), de variance et d'écart-type peuvent être généralisées à des v.a. continues.

Z est une v.a. normale centrée réduite : sa moyenne vaut 0 et son écart-type vaut 1.

On note cela ainsi : $Z \sim N(0,1)$

Une v.a. normale X peut aussi avoir une moyenne μ et un écart-type σ

On note cela ainsi : $X \sim N(\mu,\sigma)$

Les relations entre X et Z sont les suivantes

$$X=\mu+\sigma Z$$
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

La fonction de densité de X est :

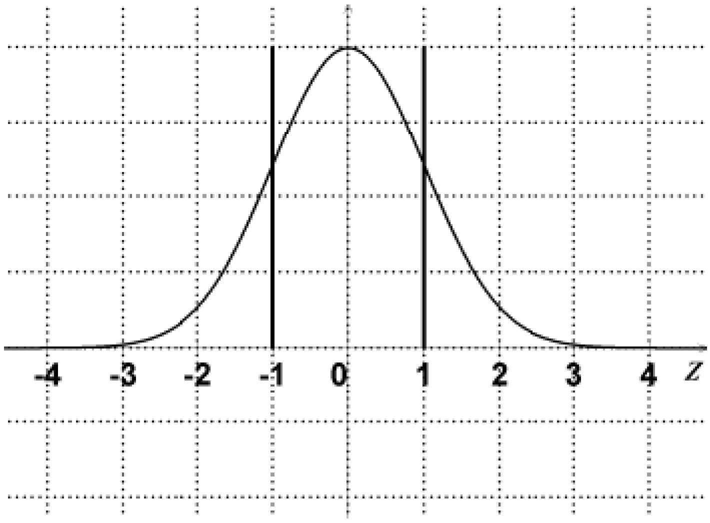
$$g(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La fonction de répartition de X est :

$$P(X\leqslant x)=P(\mu+\sigma Z\leqslant x)=P\left(Z\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Formule 20

Revenons au graphique de $Z \sim N(0,1)$:



L'échelle est telle qu'un carré représente 10 % de la surface comprise entre la courbe et l'axe horizontal.

Entre $Z=-1$ et $Z=1$,
nous voyons que la surface dépasse 6 carrés, donc dépasse 60 %.

Plus précisément, elle vaut
$\Phi(1)-\Phi(-1)=0.8413-0.1587=0.6826=68.26\%$

Plus généralement, pour n'importe quelle v.a. normale, il y a 68.26 % de probabilité entre la moyenne moins l'écart-type et la moyenne plus l'écart-type.

Entre $Z=-\infty$ et $Z=-1$,
nous voyons que la surface est comprise entre 1 et 2 carrés, donc entre 10 % et 20 %.

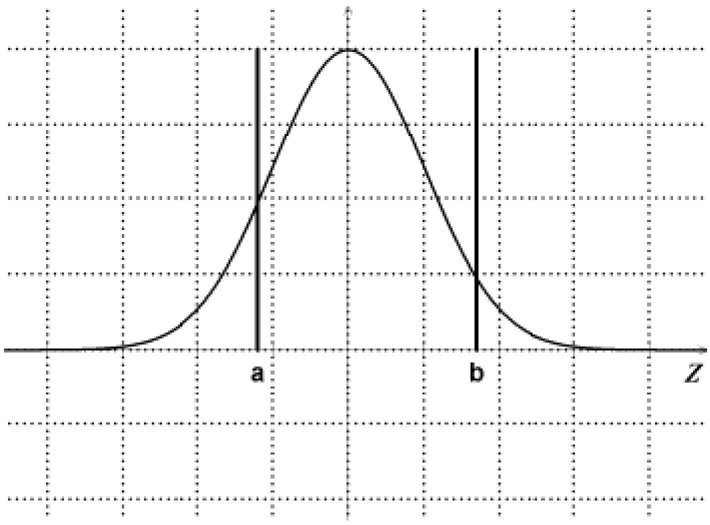
Plus précisément, elle vaut
$\Phi(-1)=0.1587=15.87\%$

Par symétrie, nous avons la même valeur pour la surface entre $Z=1$ et $Z=\infty$

Entre $Z=-2$ et $Z=2$, la surface, c'est-à-dire la probabilité, vaut
$\Phi(2)-\Phi(-2)=0.9772-0.0228=0.9544=95.44\%$

Plus généralement, pour n'importe quelle v.a. normale, il y a 95.44 % de probabilité entre la moyenne moins deux fois l'écart-type et la moyenne plus deux fois l'écart-type.

Prenons maintenant deux valeurs quelconques de Z : $a<b$



Voici ce que nous pouvons dire :

$$P(Z \leqslant a)=\Phi(a)$$
$$P(Z \geqslant a)=1-\Phi(a)$$
$$P(a \leqslant Z \leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a)$$
$$P(Z \leqslant a \quad \text{ou} \quad Z \geqslant b)=\Phi(a)+1-\Phi(b)$$

Formules 21

De plus, pour un intervalle centré autour de la moyenne 0, et pour le complémentaire de cet intervalle, nous avons, si $e>0$:

$$P(|Z| \leqslant e)=P(-e \leqslant Z \leqslant e)=2 \cdot \Phi(e)-1$$
$$P(|Z| \geqslant e)=P(Z \leqslant -e \quad \text{ou} \quad Z \geqslant e)=2 \cdot \Phi(-e)$$

Formules 21 bis

De même, pour une variable $X \sim N(\mu, \sigma)$ (avec deux valeurs quelconques $c < d$), nous avons :

$$P(X \leqslant c) = \Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})$$
$$P(X \geqslant c) = 1 - \Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})$$
$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \Phi(\frac{d-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})$$
$$P(X \leqslant c \text{ ou } X \geqslant d) = \Phi(\frac{c-\mu}{\sigma}) + 1 - \Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})$$

Formules 22

De plus, pour un intervalle centré autour de la moyenne μ , et pour le complémentaire de cet intervalle, nous avons, si $\varepsilon > 0$:

$$P(|X-\mu| \leqslant \varepsilon) = P(\mu - \varepsilon \leqslant X \leqslant \mu + \varepsilon) = 2 \cdot \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - 1$$
$$P(|X-\mu| \geqslant \varepsilon) = P(X \leqslant \mu - \varepsilon \text{ ou } X \geqslant \mu + \varepsilon) = 2 \cdot \Phi(\frac{-\varepsilon}{\sigma})$$

Formules 22 bis

Exemple 2.9.3

Soit une variable $X \sim N(\mu = 5, \sigma = 1.25)$. Quelle est la probabilité que la valeur de X soit comprise entre 4 et 6.5 ?

$$P(4 \leqslant X \leqslant 6.5) = \Phi(\frac{6.5-5}{1.25}) - \Phi(\frac{4-5}{1.25}) = \Phi(1.2) - \Phi(-0.8) = 0.6731$$

Exemple 2.9.4

Soit une variable $X \sim N(\mu, \sigma)$. Quelle est la probabilité que la valeur de X soit comprise entre $\mu - k \cdot \sigma$ et $\mu + k \cdot \sigma$ (c-à-d dans un intervalle centré autour de la moyenne) pour :

a) $k=1$?
b) $k=2$?
c) $k=3$?

$$P(|X-\mu| \leqslant k \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{k \cdot \sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(k) - 1$$

Nous trouvons :

a) $2 \cdot \Phi(1) - 1 = 68.26\%$
b) $2 \cdot \Phi(2) - 1 = 95.44\%$
c) $2 \cdot \Phi(3) - 1 = 99.74\%$

Remarque

Ces valeurs ne dépendent ni de μ ni de σ . Elles sont valables pour toute variable normale.

*

La fonction Φ peut être <u>inversée</u> en Φ^{-1}

Soit une variable $Z \sim N(0,1)$

Des calculs algébriques très simples permettent d'établir :

La valeur de a telle que $P(Z \leqslant a) = p$ est $a = \Phi^{-1}(p)$
La valeur de a telle que $P(Z \geqslant a) = q$ est $a = \Phi^{-1}(1-q)$
La valeur de $e > 0$ telle que $P(-e \leqslant Z \leqslant e) = r$ est $e = \Phi^{-1}(\frac{r+1}{2})$
La valeur de $e > 0$ telle que $P(Z \leqslant -e \text{ ou } Z \geqslant e) = s$ est $e = \Phi^{-1}(1 - \frac{s}{2})$

Formules 23

Avec une variable $X \sim N(\mu, \sigma)$, nous avons :

La valeur de c telle que $P(X \leqslant c) = p$ est $c = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(p)$
La valeur de c telle que $P(X \geqslant c) = q$ est $c = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(1-q)$
La valeur de $\varepsilon > 0$ telle que $P(\mu - \varepsilon \leqslant X \leqslant \mu + \varepsilon) = r$ est $\varepsilon = \sigma \cdot \Phi^{-1}(\frac{r+1}{2})$
La valeur de $\varepsilon > 0$ telle que $P(X \leqslant \mu - \varepsilon \text{ ou } X \geqslant \mu + \varepsilon) = s$ est
$\varepsilon = \sigma \cdot \Phi^{-1}(1 - \frac{s}{2})$

Formules 24

De même que pour Φ , il existe des tables et des outils en ligne pour calculer Φ^{-1}

Exemple 2.9.5

Soit une variable $X \sim N(\mu = 5, \sigma = 1.25)$. Trouver un intervalle centré autour de la moyenne telle que la valeur de *X* soit dans cet intervalle avec une probabilité de 75 %.

Nous devons résoudre :

$$P(\mu - \varepsilon \leqslant X \leqslant \mu + \varepsilon) = 0.75$$
$$P(5 - \varepsilon \leqslant X \leqslant 5 + \varepsilon) = 0.75$$

D'après la troisième des formules 24, nous avons :

$$\varepsilon = \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{r+1}{2}\right) = 1.25 \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{0.75+1}{2}\right)$$
$$= 1.25 \cdot \Phi^{-1}(0.875) = 1.25 \cdot 1.1503 = 1.4379$$

Donc l'intervalle demandé est :

$$[5 - 1.4379 ; 5 + 1.4379] = [3.5621 ; 6.4379]$$

Exemple 2.9.6

Soit une variable $X \sim N(\mu, \sigma)$
Considérons l'intervalle centré autour de la moyenne $[\mu - k \cdot \sigma ; \mu + k \cdot \sigma]$
Déterminer *k* pour que la valeur de *X* soit dans cet intervalle avec une probabilité de :

a) 90 %
b) 95 %
c) 99 %

Nous devons résoudre : $P(\mu - \varepsilon \leqslant X \leqslant \mu + \varepsilon) = r$, avec $\varepsilon = k \cdot \sigma$
La solution est $k \cdot \sigma = \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{r+1}{2}\right)$. En simplifiant par σ, nous obtenons :

$$k = \Phi^{-1}\left(\frac{r+1}{2}\right)$$

Nous trouvons :

a) $k=\Phi^{-1}(\frac{0.9+1}{2})=\Phi^{-1}(0.95)=1.6449$

b) $k=\Phi^{-1}(\frac{0.95+1}{2})=\Phi^{-1}(0.975)=1.96$

c) $k=\Phi^{-1}(\frac{0.99+1}{2})=\Phi^{-1}(0.995)=2.5768$

<u>Remarque</u>

Ces valeurs ne dépendent ni de μ ni de σ . Elles sont valables pour toute variable normale.

<u>Exemple 2.9.7</u>

Les tailles d'une espèce de poisson suivent une loi normale. La moyenne est de 13 cm et l'écart-type de 2 cm.

a) Quelle est la probabilité qu'un poisson de cette espèce ait une taille d'au moins 15.6 cm ?

$$P(X\geqslant 15.6)=1-\Phi(\frac{15.6-13}{2})=1-\Phi(1.3)=0.0968=9.68\%$$

b) Quelle est la probabilité qu'un poisson de cette espèce ait une taille d'au moins 10.8 cm ?

$$P(X\geqslant 10.8)=1-\Phi(\frac{10.8-13}{2})=1-\Phi(-1.1)=0.8643=86.43\%$$

c) Quelle est la probabilité qu'un poisson de cette espèce ait une taille d'au plus 12 cm ?

$$P(X\leqslant 12)=\Phi(\frac{12-13}{2})=\Phi(-0.5)=0.3085=30.85\%$$

d) Quelle est la probabilité qu'un poisson de cette espèce ait une taille d'au plus 14.4 cm ?

$$P(X\leqslant 14.4)=\Phi(\frac{14.4-13}{2})=\Phi(0.7)=0.758=75.8\%$$

e) Quelle est la probabilité qu'un poisson de cette espèce ait une taille comprise entre 10 cm et de 16 cm ?

$$P(10 \leqslant X \leqslant 16) = \Phi\left(\frac{16-13}{2}\right) - \Phi\left(\frac{10-13}{2}\right)$$
$$= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.8664 = 86.64\,\%$$

f) Quelle est la probabilité qu'un poisson de cette espèce ait une taille comprise entre 9 cm et de 17 cm ?

$$P(9 \leqslant X \leqslant 17) = \Phi\left(\frac{17-13}{2}\right) - \Phi\left(\frac{9-13}{2}\right)$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9544 = 95.44\,\%$$

g) Au-dessus de quelle taille y a-t-il une probabilité de 20 % de trouver un poisson de cette espèce ?

$$P(X \geqslant c) = 0.2 \quad \text{donne} \quad c = 13 + 2 \cdot \Phi^{-1}(1 - 0.2) = 13 + 2 \cdot \Phi^{-1}(0.8) = 14.68 \text{ cm}$$

h) Au-dessus de quelle taille y a-t-il une probabilité de 75 % de trouver un poisson de cette espèce ?

$$P(X \geqslant c) = 0.75 \quad \text{donne} \quad c = 13 + 2 \cdot \Phi^{-1}(1 - 0.75) = 13 + 2 \cdot \Phi^{-1}(0.25) = 11.65 \text{ cm}$$

i) En dessous de quelle taille y a-t-il une probabilité de 2 % de trouver un poisson de cette espèce ?

$$P(X \leqslant c) = 0.02 \quad \text{donne} \quad c = 13 + 2 \cdot \Phi^{-1}(0.02) = 8.89 \text{ cm}$$

j) En dessous de quelle taille y a-t-il une probabilité de 65 % de trouver un poisson de cette espèce ?

$$P(X \leqslant c) = 0.65 \quad \text{donne} \quad c = 13 + 2 \cdot \Phi^{-1}(0.65) = 13.77 \text{ cm}$$

k) Dans quel intervalle centré autour de la moyenne y a-t-il une probabilité de 85 % de trouver un poisson de cette espèce ?

Nous devons résoudre :

$P(13-\varepsilon \leqslant X \leqslant 13+\varepsilon)=0.85$, ce qui donne :

$$\varepsilon=\sigma\cdot\Phi^{-1}\left(\frac{r+1}{2}\right)=2\cdot\Phi^{-1}\left(\frac{0.85+1}{2}\right)$$
$$=2\cdot\Phi^{-1}(0.925)=2\cdot1.4395=2.88 \text{ cm}$$

Donc l'intervalle demandé est : $[13-2.88 ; 13+2.88]=[10.12 \text{ cm} ; 15.88 \text{ cm}]$

*

Exercice 2.9.3

Poursuivre l'exemple 2.9.2 en construisant à l'aide d'un logiciel des histogrammes pour $n=20$ et $n=30$

Exercice 2.9.4

Avec un logiciel graphique, représenter les courbes de $X \sim N(4, \sigma)$, en prenant successivement $\sigma=3$, $\sigma=2$, $\sigma=1$ et $\sigma=0.5$

Exercice 2.9.5

Au mois de juillet, entre 22h00 et 23h00, dans une région genevoise, une étude montre que le nombre de moustiques avalés par une pipistrelle suit approximativement une loi normale, dont la moyenne vaut 350 et l'écart-type 30.

a) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale au moins 400 moustiques ?

b) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale au moins 333 moustiques ?

c) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale au plus 310 moustiques ?

d) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale au plus 390 moustiques ?

e) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale entre 335 et 365 moustiques ?

f) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale entre 375 et 400 moustiques ?

g) Quelle est la probabilité qu'une pipistrelle de cette étude avale entre 325 et 385 moustiques ?

h) Au-dessus de quel nombre de moustiques avalés y a-t-il une probabilité de 3 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?

i) Au-dessus de quel nombre de moustiques avalés y a-t-il une probabilité de 60 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?

j) En dessous de quel nombre de moustiques avalés y a-t-il une probabilité de 10 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?

k) En dessous de quel nombre de moustiques avalés y a-t-il une probabilité de 70 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?

l) Dans quel intervalle centré autour de la moyenne y a-t-il une probabilité de 99 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?

m) Dans quel intervalle centré autour de la moyenne y a-t-il une probabilité de 80 % de trouver une pipistrelle de cette étude ?

<u>Exercice 2.9.6</u>

Historiquement, on définit la débilité mentale à partir du Q.I., calibré pour suivre une loi normale de moyenne 100 dans un pays « civilisé ». D'après le *Larousse médical*, la débilité serait

légère : entre 70 et 85 ;
moyenne : entre 50 et 70 ;
profonde : en dessous de 50.

Sachant que :

le Q.I. moyen d'un chauffeur de taxi est de 100, avec un écart-type de 15 ;
le Q.I. moyen d'un rappeur français est de 88, avec un écart-type de 13 ;
le Q.I. moyen d'un rappeur américain est de 87, avec un écart-type de 11 ;

calculer, sous l'hypothèse d'une loi normale, la probabilité d'un Q.I. inférieur à 70

a) chez un chauffeur de taxi ;
b) chez un rappeur français ;
c) chez un rappeur américain.

(Bien entendu, ces données sont fantaisistes...)

Exercice 2.9.7

Le principal du lycée Robespierre dit au principal du lycée Charlemagne :
– Nos élèves ont mieux réussi l'examen de mathématiques que les vôtres. Leur moyenne est de 15 ; chez vous, elle n'atteint que 14.
– Oui, mais au lycée Robespierre, l'écart-type est de 1, tandis qu'il s'élève à 2 au lycée Charlemagne. Or les distributions obéissent à des lois normales et les effectifs sont identiques dans nos deux écoles. Cela implique davantage d'excellents résultats au lycée Charlemagne. Plus précisément, un calcul permet d'établir que les élèves ayant obtenu une note d'au moins 18 sont environ 17 fois plus nombreux chez nous que chez vous.
– Un autre calcul permet d'établir que les élèves dont la note ne dépasse pas 12 sont environ 117.5 fois plus nombreux chez vous que chez nous.
– Au lycée Charlemagne, nous préférons cultiver l'excellence, même si c'est au détriment de la réussite des plus faibles.
– Au lycée Robespierre, nous préférons cultiver l'homogénéité, même si c'est au détriment de l'excellence.

Donner les calculs qui fournissent les facteurs 17 et 117.5.
Expliquer ce phénomène au moyen d'un graphique.

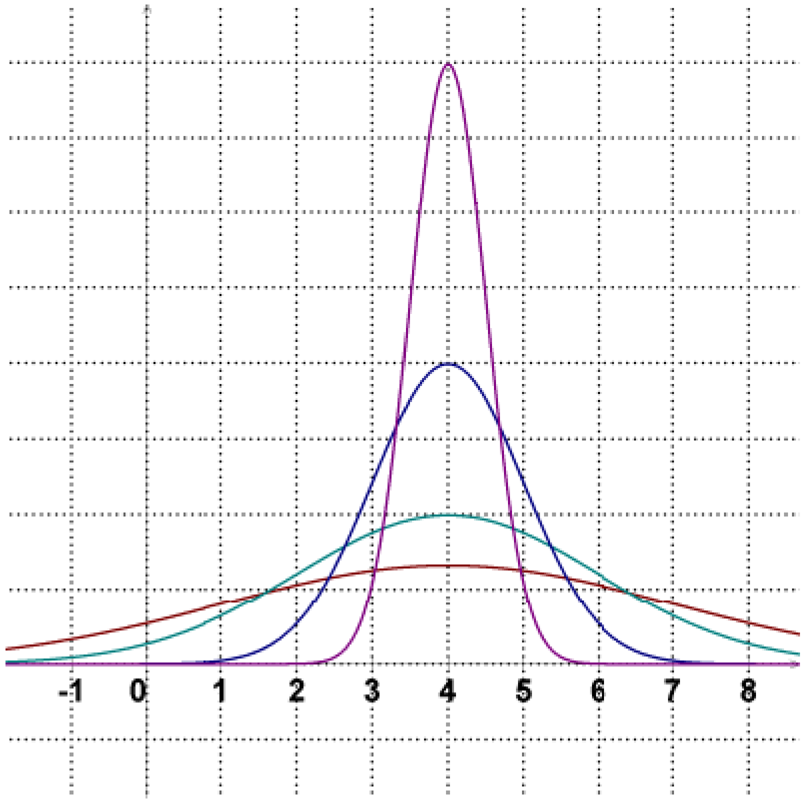
*

Solutions

Exercice 2.9.3

……………………………………………………………………………………………………

Exercice 2.9.4



Exercice 2.9.5

a) $1-\Phi(1.6667)=5.48\%$
b) $1-\Phi(-0.5667)=71.45\%$
c) $\Phi(-1.3333)=9.12\%$
d) $\Phi(1.3333)=90.88\%$
e) $\Phi(0.5)-\Phi(-0.5)=38.3\%$
f) $\Phi(1.6667)-\Phi(0.8333)=15.45\%$
g) $\Phi(1.1667)-\Phi(-0.8333)=67.6\%$
h) $350+30\cdot\Phi^{-1}(0.97)=406.4$
i) $350+30\cdot\Phi^{-1}(0.4)=342.4$
j) $350+30\cdot\Phi^{-1}(0.1)=311.6$
k) $350+30\cdot\Phi^{-1}(0.7)=365.7$
l) $\varepsilon=30\cdot\Phi^{-1}(0.995)=77.3$
intervalle : $[272.7\,;427.3]$
m) $\varepsilon=30\cdot\Phi^{-1}(0.9)=38.4$
intervalle : $[311.6\,;388.4]$

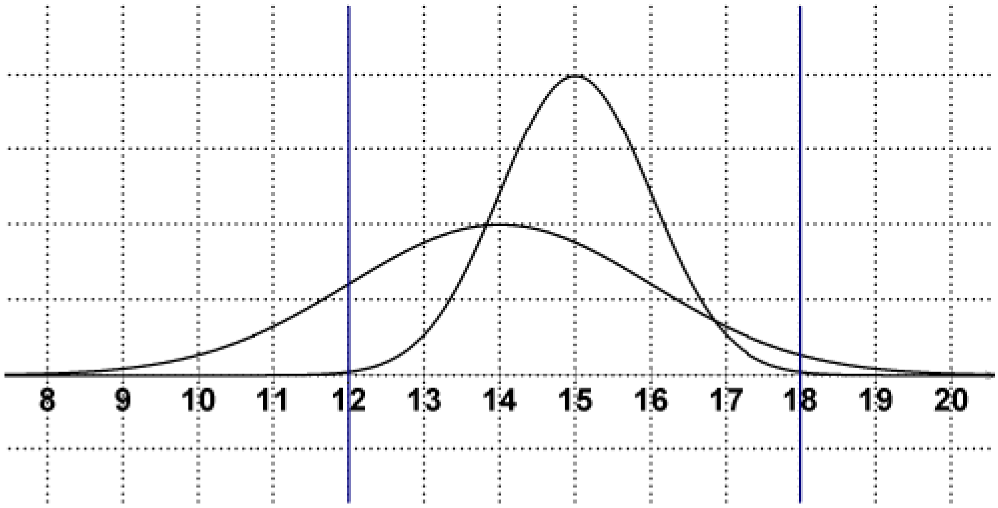
Exercice 2.9.6

a) $\Phi(-2)=2.28\%$
b) $\Phi(-1.3846)=8.31\%$
c) $\Phi(-1.5455)=6.11\%$

Exercice 2.9.7

Robespierre	Charlemagne
$\mu=15$ et $\sigma=1$	$\mu=14$ et $\sigma=2$
$P(X\geqslant 18)=1-\Phi(3)$ $=0.135\%$	$P(X\geqslant 18)=1-\Phi(2)$ $=2.275\%$
$P(X\leqslant 12)=\Phi(-3)$ $=0.135\%$	$P(X\leqslant 12)=\Phi(-1)$ $=15.867\%$

$\frac{2.275}{0.135}\approx 17$ $\quad$ $\frac{15.867}{0.135}\approx 117.5$



Que ce soit après 18 ou avant 12, la courbe du lycée Charlemagne est au-dessus de celle du lycée Robespierre.

*

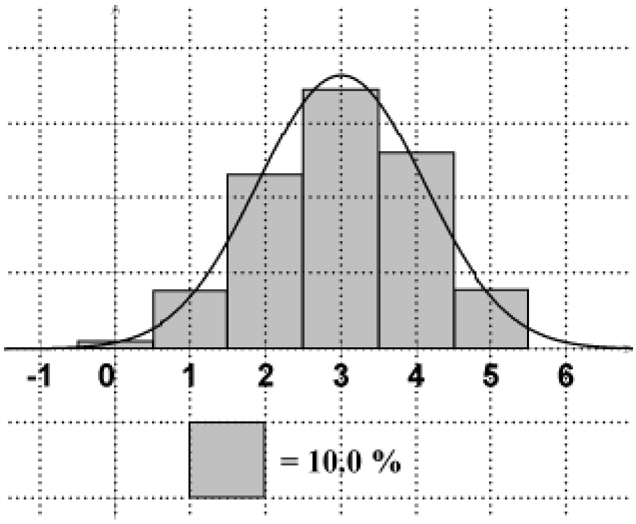
Nous avons vu précédemment un exemple de convergence d'une suite de lois binomiales vers une loi normale.

Plus généralement :

Si ${}^{n}X$ est une variable binomiale $B(n, p)$,
alors, quand *n* tend vers l'infini,
${}^{n}X$ converge vers une variable normale
$X \sim N(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)})$

Théorème de Moivre-Laplace

En pratique, on peut approximer $P({}^{n}X \leqslant i)$ par $P(X \leqslant i + 0.5) = \Phi(\frac{i + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}})$ quand *n* est suffisamment grand. Le 0.5 est un facteur de correction qui permet de tenir compte du fait que l'histogramme est formé de bandes rectangulaires.



On considère généralement que l'approximation est satisfaisante quand np et $n(1-p)$ valent tous deux au moins 5.

Exemple 2.9.8

Soit ${}^{50}X$ une variable binomiale $B(n=50, p=0.6)$
Nous avons $np=30>5$ et $n(1-p)=20>5$

Nous aimerions calculer : $\sum_{i=25}^{33} P({}^{50}X=i)$

Approximons ${}^{50}X$ par $X \sim N(\mu=np=30, \sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{12})$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i=25}^{33} P({}^{50}X=i) &\approx P(X\leqslant 33+0.5)-P(X\leqslant 25-0.5)\\ &=\Phi(\frac{33.5-30}{\sqrt{12}})-\Phi(\frac{24.5-30}{\sqrt{12}})\\ &=\Phi(1.01036)-\Phi(-1.58771)=0.7877\end{aligned}$$

*

Quand, simultanément, *n* est très grand, *p* très petit et $np<5$, une loi binomiale peut être approximée par une loi de Poisson. Mais nous n'allons pas traiter ce thème.

Une généralisation du théorème de Moivre-Laplace est le Théorème central limite qui énonce une vérité d'une grande importance :

La moyenne de *n* variables indépendantes*
qui ont les mêmes valeurs de μ et de σ
tend vers une variable normale $N(\mu, \sigma)$
quand *n* tend vers l'infini.

Théorème central limite

(* L'indépendance de variables est définie de manière analogue à l'indépendance d'événements dans un univers probabilisé.)

Autrement dit, la normalité est un phénomène très fréquent quand on travaille avec des grand nombres. Bref, la normalité est tout ce qu'il y a de plus normal...

Attention toutefois à ne pas en abuser ! Il y a quand même dans l'univers bien des choses intéressantes qui échappent à la loi normale...

Exercice 2.9.8

On lance 400 fois une pièce équilibrée. Notons ${}^{400}X$ la v.a. binomiale qui correspond au nombre de fois que « Face » sort. À l'aide d'une approximation par la loi normale, calculer :

a) $P({}^{400}X \geqslant 205)$
b) $P(|{}^{400}X - 200| \leqslant 2)$
c) $P(|{}^{400}X - 200| \geqslant 15)$
d) ε tel que $P(|{}^{400}X - 200| \leqslant \varepsilon) = 51\,\%$

Exercice 2.9.9

On lance un dé 180 fois. Notons ${}^{180}X$ la v.a. binomiale qui correspond au nombre de fois que « 2 » sort. À l'aide d'une approximation par la loi normale, calculer :

a) $P({}^{180}X \leqslant 38)$
b) $P(|{}^{180}X - 30| \geqslant 2)$
c) $P(|{}^{180}X - 30| \leqslant 6)$
d) ε tel que $P(|{}^{180}X - 30| \geqslant \varepsilon) = 15\,\%$

Exercice 2.9.10

Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour que la probabilité d'obtenir au moins 100 fois « Face » atteigne 80 % ?

*

Solutions

Exercice 2.9.8

Nous avons $\mu = np = 200$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 10$

Approximons ${}^{400}X$ par $X \sim N(\mu = 200, \sigma = 10)$

a)
$$P({}^{400}X \geqslant 205) \approx P(X \geqslant 204.5) = 1 - \Phi(\frac{204.5 - 200}{10})$$
$$= 1 - \Phi(0.45) = 0.326$$

b)
$$P(|{}^{400}X - 200| \leqslant 2) \approx P(|X - 200| \leqslant 2.5) = 2 \cdot \Phi(\frac{2.5}{10}) - 1$$
$$= 2 \cdot \Phi(0.25) - 1 = 0.197$$

c)
$$P(|{}^{400}X - 200| \geqslant 15) \approx P(|X - 200| \geqslant 14.5) = 2 \cdot \Phi(\frac{-14.5}{10})$$
$$= 2 \cdot \Phi(-1.45) = 0.147$$

d)
$$P(|{}^{400}X - 200| \leqslant \varepsilon) = 0.51$$
$$\leftrightarrow \quad \varepsilon = 10 \cdot \Phi^{-1}(\frac{0.51 + 1}{2}) = 10 \cdot \Phi^{-1}(0.755) = 6.9$$

Exercice 2.9.9

Nous avons $\mu = np = 30$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5$

Approximons ${}^{180}X$ par $X \sim N(\mu = 30, \sigma = 5)$

a)
$$P({}^{180}X \leqslant 38) \approx P(X \leqslant 38.5) = \Phi(\frac{38.5 - 30}{5})$$
$$= \Phi(1.7) = 0.955$$

b)
$$P(|{}^{180}X - 30| \geqslant 2) \approx P(|X - 30| \geqslant 1.5) = 2 \cdot \Phi(\frac{-1.5}{5})$$
$$= 2 \cdot \Phi(-0.3) = 0.764$$

c)

$$P(|^{180}X-30|\leqslant 6)\approx P(|X-30|\leqslant 6.5)=2\cdot\Phi(\frac{6.5}{5})-1$$
$$=2\cdot\Phi(1.3)-1=0.806$$

d)

$$P(|^{180}X-30|\geqslant\varepsilon)=0.15$$
$$\leftrightarrow\quad \varepsilon=5\cdot\Phi^{-1}(1-\frac{0.15}{2})=5\cdot\Phi^{-1}(0.925)=7.2$$

<u>Exercice 2.9.10</u>

Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour que la probabilité d'obtenir au moins 100 fois « Face » atteigne 80% ?

Nous avons $\mu=np=0.5n$ et $\sigma=\sqrt{np(1-p)}=0.5\sqrt{n}$

$$P(^{n}X\geqslant 100)=0.8$$

Approximons par une loi normale : $P(X\geqslant 99.5)=0.8$

Autrement dit : $P(X\leqslant 99.5)=0.2$

Donc : $\Phi(\frac{99.5-0.5n}{0.5\sqrt{n}})=0.2$

C-à-d : $\frac{99.5-0.5n}{0.5\sqrt{n}}=\Phi^{-1}(0.2)=-0.8416$

D'où : $99.5-0.5n=-0.4208\sqrt{n}$

Posons : $m=\sqrt{n}$

Il vient : $0.5m^2-0.4208m-99.5=0$

La solution positive est : $m=14.5338$

D'où : $n=14.5338^2=211.23$

*

2.10 Quelques compléments culturels

Le calcul des probabilités a été inventé par des savants géniaux comme Pascal (1623–1662), Fermat (160?–1665), Christian Huygens (1629–1695), Jakob Bernouilli (1654–1705), Abraham de Moivre (1667–1754), Thomas Bayes (1702–1761), Laplace (1749–1827), Gauss (1777–1855), Markov (1856– 1922), Kolmogorov (1903–1987)

*

Les probabilités sont partout.

En physique, chimie, génétique, neurosciences, médecine, économie, production de marchandises, psychologie, sociologie, linguistique, intelligence artificielle, stratégie, marketing, sécurité, philosophie (voir par exemple le problème de la Belle au bois dormant), musique (Xénakis, OuMuPo, &c.), art (Arp, Noll, OuPeinPo, &c.), littérature (Robert Musil, Mark Haddon, OuLiPo, ALAMO, &c.)

*

Il y a plusieurs « visions » des probabilités.

♠ Une vision purement mathématique, ensembliste, pose des notions a priori et fait l'impasse sur les aspects temporels, sur la manière concrète d'établir des probabilités élémentaires.
♦ Une vision « fréquentiste » fixe les probabilités élémentaires comme des valeurs limites de fréquences observées. Ainsi Buffon, au 18^e^ siècle, a lancé une pièce de monnaie 4'040 fois. La fréquence des F était de 50.69 %. Pearson, au début du 20^e^ siècle, a obtenu une fréquence des F de 50.05 % en lançant une pièce 24'000 fois.

Ces deux visions soulèvent des questions philosophiques. Des désaccords persistent. Certains paradoxes semblent venir d'un conflit entre une notion « réaliste » de probabilité, où le monde physique joue un rôle, et une notion « idéaliste » ou « formaliste » de probabilité, où le monde physique est ignoré. Il n'est pas simple de définir le « sens » de la probabilité en mécanique quantique. Que pourrait signifier l'expression « hasard pur » ? Question difficile...

*

De nombreuses expériences de psychologie cognitive, notamment celles de Tversky et Kahneman qui valurent au second le prix Nobel d'économie en 2002, montrent que la plupart des gens évaluent des probabilités de manière erronée dans bien des situations. Quelques résultats classiques :

♥ Majoritairement, les gens pensent qu'à longueur égale, certaines séquences de « Pile » et de « Face » sont plus probables que d'autres.
♦ Les faibles probabilités sont souvent surestimées et les fortes sous-estimées.
♣ Souvent les gens surestiment les probabilités des événements qui leur sont favorables et sous-estiment celles des événements qui leur sont défavorables.
♠ Souvent les gens surestiment un risque dans les jours qui suivent une catastrophe ayant marqué les esprits.
♥ Souvent les gens sous-estiment par exemple leur risque d'avoir un accident de la route s'ils n'en ont jamais eu.
♣ Majoritairement, les gens surestiment les probabilités de la forme $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \text{...etc})$ et sous-estiment celles de la forme $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \text{...etc})$

♣♠ En 1979, les USA étaient en crise à la suite d'une prise d'otages à l'ambassade américaine de Téhéran. Une opération commando (Eagle Claw) en 5 étapes fut conçue par plusieurs administrations (CIA, Navy, Air Force, etc.). Cette opération fut autorisée par le président Jimmy Carter. Pourquoi ? Parce que les responsables de chaque étape avaient jugé que la partie qu'ils dirigeaient avait des chances raisonnables de réussite. L'opération échoua. Après coup, Philip Rozenzweig demanda aux responsables d'évaluer la probabilité de réussite de leur étape. Ils donnèrent des estimations comprises entre 70 % et 90 %. Si on prend une moyenne de 80 % et qu'on fait l'hypothèse, certes un peu abusive, de l'indépendance des 5 étapes, la probabilité de réussite de l'opération était de $0.8^5 = 31.8\,\%$, ce qui n'est pas très élevé. Un expert donna des évaluations plus pessimistes. Il attribua aux 5 étapes des probabilités de réussite de respectivement : 75 %, 60 %, 70 %, 65 % et 55 %. La probabilité composée de la réussite de l'opération vaut alors 11 %. S'il avait été en possession de tels chiffres, Jimmy Carter aurait-il donné le feu vert ?
♣♥ En 1999, un tribunal condamna Sally Clark à la prison à vie. L'accusation soutenait que cette femme avait commis un double meurtre de nourrissons. Son argumentation reposait sur un emploi d'abusif de la formule $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2)$ dans une situation médicale rare. Rappelons que cette formule n'est vraie que si A_1 et A_2 sont indépendants. Or ce n'était pas le cas... En 2003, la condamnation fut annulée suite au réexamen du dossier.

*

Raisonner. Peser des probabilités sur la balance du désir.
(Ambrose Bierce)

Partie 3 : Applications des probabilités aux statistiques

3.1 Population, échantillon

Nous allons définir les notions de base d'une manière analogue à ce que nous avons vu au chapitre : « 2.8 Variable aléatoire discrète ».

Soit A une population. Une variable statistique quantitative est une fonction X qui associe à chaque individu de A une valeur numérique. On parle de variable discrète quand X peut prendre un nombre fini ou dénombrable de valeurs et de variable continue quand X peut prendre une infinité non dénombrable de valeurs. Dans ce dernier cas, les valeurs sont regroupées en intervalles de longueur constante. On peut aussi regrouper en intervalles les valeurs d'une variable discrète, surtout quand elles sont très nombreuses.

Quand une variable X peut prendre n valeurs différentes $x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots, \; x_n$, l'ensemble des couples $(x_i; F(X=x_i))$, pour i entier variant de 1 à n, où $F(X=x_i)$ représente la fréquence de x_i , s'appelle la distribution de X.

Bien sûr, on a toujours : $\sum_i F(X=x_i)=1$

Quand les valeurs d'une variable sont regroupées en intervalles (de longueur constante), la distribution est définie de la même manière en prenant pour x_i le centre de chaque intervalle.

Une distribution peut être représentée par un tableau, un diagramme en bâtons, un histogramme, ou encore un diagramme circulaire, un camembert, etc.

*

Les notions de moyenne, de variance et d'écart-type sont les mêmes que pour une variable aléatoire (chapitre 2.8). Il faut simplement remplacer les probabilités par des fréquences.

Distinguons deux cas.

Cas 1 : Les valeurs $x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots, \ x_n$ sont toutes différentes.
Les valeurs $k_1, \ k_2, \ k_3, \ldots, \ k_n$ sont les effectifs :
k_i est le nombre de fois que *X* prend la valeur x_i
$k=\sum_{i=1}^{n} k_i$ est le total des effectifs, c'est-à-dire le nombre d'individus dans la population A.
Les valeurs $f_1, \ f_2, \ f_3, \ldots, \ f_n$ sont les fréquences :
$f_i=F(X=x_i)=\frac{k_i}{k}$

Cas 2 : Les valeurs $x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots, \ x_n$ ne sont pas nécessairement différentes
Elles correspondent à la suite de valeurs que prend *X* quand cette variable est évaluée tour à tour sur chaque individu de la population A de *n* individus. On dit aussi que ces valeurs forment les observations.

La moyenne de *X*, notée $Moy(X)$ ou $\overline{X}$ ou μ_X ou simplement μ , est :

Cas 1 :
$$Moy(X)=\sum_i x_i \cdot F(X=x_i)=\sum_i x_i \cdot f_i=\frac{1}{k}\cdot\sum_i x_i \cdot k_i$$

Cas 2 :
$$Moy(x)=\frac{1}{n}\sum_i x_i$$

Formule 1

La variance de *X*, notée $Var(X)$ ou σ_X^2 ou simplement σ^2 , est :

Cas 1 :

$$Var(X) = Moy[(X-\mu)^2] = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot F(X = x_i)$$

$$= \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f_i = \frac{1}{k} \cdot \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot k_i$$

Cas 2 :

$$Var(X) = Moy[(X-\mu)^2] = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \mu)^2$$

Formule 2

En pratique, on emploie souvent une formule équivalente pour calculer la variance :

Cas 1 :

$$Var(X) = Moy[X^2] - \mu^2 = (\sum_i x_i^2 \cdot F(X = x_i)) - \mu^2$$

$$= (\sum_i x_i^2 \cdot f_i) - \mu^2 = \frac{1}{k} \cdot (\sum_i x_i^2 \cdot k_i) - \mu^2$$

Cas 2 :

$$Var(X) = Moy[X^2] - \mu^2 = \frac{1}{n} \cdot (\sum_i x_i^2) - \mu^2$$

Formule 3

L'écart-type ou la déviation standard de *X*, noté $SD(X)$ ou σ_X ou simplement σ , est :

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Formule 4

Exemple 3.1.1

L'entreprise Pomme fabrique des statuettes de Guillaume Tell.
Elle propose trois tailles : 10 cm, 15 cm et 25 cm.
Sa production hebdomadaire est de
100 statuettes de 10 cm, 64 statuettes de 15 cm et 36 statuettes de 25 cm.
Quelle est la taille moyenne d'un Guillaume Tell de chez Pomme ?
Quelles sont la variance et l'écart-type ?

Soit X la variable donnant la taille. Le nombre total de statuettes est 200.
Les fréquences sont donc :

$$F(X=10)=0.5$$
$$F(X=15)=0.32$$
$$F(X=25)=0.18$$

$$Moy(x)=10\cdot 0.5+15\cdot 0.32+25\cdot 0.18=14.3 \text{ cm}$$
$$Var(X)=10^2\cdot 0.5+15^2\cdot 0.32+25^2\cdot 0.18-14.3^2=30.01$$
$$SD(X)=\sqrt{30.01}=5.478 \text{ cm}$$

Exemple 3.1.2

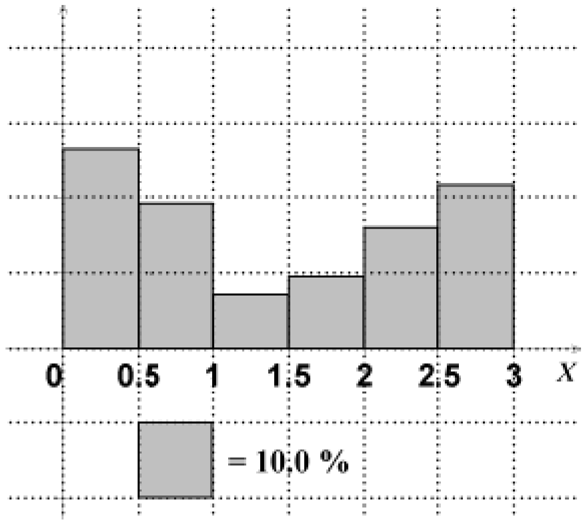
Boris élève des araignées pour les offrir à des femmes de goût. Le tableau suivant regroupe en classes de 0.5 g les poids de ces araignées. En utilisant les centres de classes, calculer le poids moyen et l'écart-type. Dessiner l'histogramme.

poids	[0 ; 0.5[	[0.5 ; 1[	[1 ; 1.5[	[1.5 ; 2[	[2 ; 2.5[	[2.5 ; 3[
effectifs	33	24	9	12	20	27

Soit X la variable donnant le poids. Le total des effectifs est 125.
Les fréquences sont donc :

$$F(X=0.25)=33/125=0.264$$
$$F(X=0.75)=24/125=0.192$$
$$F(X=1.25)=9/125=0.072$$
$$F(X=1.75)=12/125=0.096$$
$$F(X=2.25)=20/125=0.160$$
$$F(X=2.75)=27/125=0.216$$

$$Moy(X) = 0.25 \cdot 0.264 + 0.75 \cdot 0.192 + 1.25 \cdot 0.072 + 1.75 \cdot 0.096$$
$$+ 2.25 \cdot 0.160 + 2.75 \cdot 0.216 = 1.422 \text{ g}$$
$$Var(X) = 0.25^2 \cdot 0.264 + 0.75^2 \cdot 0.192 + 1.25^2 \cdot 0.072 + 1.75^2 \cdot 0.096$$
$$+ 2.25^2 \cdot 0.160 + 2.75^2 \cdot 0.216 - 1.422^2 = 0.9524$$
$$SD(X) = \sqrt{0.9524} = 0.9759 \text{ g}$$



*

Exercice 3.1.1

Un jury évalue la beauté d'une femme par une note entière qui peut aller de 1 à 4. Le tableau suivant fournit les notes reçues par Carabosse.

Notes	1	2	3	4
Fréquences	0.1	0.15	0.25	0.5

Calculer la note moyenne et l'écart-type.

Exercice 3.1.2

Le tableau suivant donne, pour chaque prix, le nombre d'articles disponibles dans le magasin « Tout à moins de 10 balles ».

Prix	0.9	1.9	2.9	4.9	7.9	9.9
Effectifs	85	15	60	48	17	95

Calculer le prix moyen et l'écart-type.

Exercice 3.1.3

Dans cette phrase qui se vérifie, le nombre moyen de lettres par mot vaut quatre virgule cinq et la variance vaut trois virgule cinq.

Vérifier que la phrase ci-dessus dit la vérité.

Exercice 3.1.4

Le tableau ci-dessous donne des poids [en g] de concombres. En prenant les centres des intervalles, calculer le poids moyen et l'écart-type. Représenter l'histogramme.

Poids	[340 ; 360[	[360 ; 380[	[380 ; 400[	[400 ; 420[	[420 ; 440[
Effectifs	10	9	4	8	3

Exercice 3.1.5

Voici, pour quelques livres de ma bibliothèque, le nombre de pages.

Les anarchistes de droite	128
Faites vous-même votre malheur	128
Discours de réception du diable à l'académie française	144
Pourquoi je serais plutôt aristocrate	156
Dictionnaire du parfait cynique	160
Hussardises	160
Ombre de mon amour	176
Dialogues de courtisanes	192
La négresse blonde	192
Service inutile	192
Les cahiers de Malte Laurids Brigge	224
Plume	226
Philosopher ou faire l'amour	240
Pour venger pépère	240
Le voleur d'étincelles	256
Le portrait de Dorian Gray	288
Des guenons et des femmes	312
La haine de la musique	336
L'esprit contre la raison	336
Tropique du Cancer	352
Valsez saucisses	366
Contre l'amour, la jeunesse, la plèbe	368
L'avalée des avalés	384
Les horreurs de la démocratie	390
Le Camp des Saints	396

Regrouper ces nombres de pages dans les intervalles :

[100 ; 150[
[150 ; 200[
[200 ; 250[
[250 ; 300[
[300 ; 350[
[350 ; 400[

Puis calculer la moyenne et l'écart-type de cette distribution groupée, en prenant les centres des intervalles.

Solutions

Exercice 3.1.1

$$Moy(X)=1\cdot 0.1+2\cdot 0.15+3\cdot 0.25+4\cdot 0.5=3.15$$
$$Var(X)=1^2\cdot 0.1+2^2\cdot 0.15+3^2\cdot 0.25+4^2\cdot 0.5-3.15^2=1.0275$$
$$SD(X)=\sqrt{1.0275}=1.014$$

Exercice 3.1.2

Le total des effectifs vaut : 320. Donc les effectifs doivent être divisés par 320 pour obtenir les fréquences.

$$Moy(X)=0.9\cdot 0.262625+1.9\cdot 0.046875+2.9\cdot 0.1875$$
$$+4.9\cdot 0.15+7.9\cdot 0.053125+9.9\cdot 0.296875=4.962925$$

Dans ce cas, il est plus simple de faire :

$$Moy(X)=\frac{0.9\cdot 85+1.9\cdot 15+2.9\cdot 60+4.9\cdot 48+7.9\cdot 17+9.9\cdot 95}{320}$$
$$=4.962925$$
$$Var(X)=\frac{0.9^2\cdot 85+1.9^2\cdot 15+2.9^2\cdot 60+4.9^2\cdot 48+7.9^2\cdot 17+9.9^2\cdot 95}{320}$$
$$-4.962925^2$$
$$=11.7675$$
$$SD(X)=\sqrt{11.7675}=3.430$$

Exercice 3.1.3

Dans cette phrase qui se vérifie, le nombre moyen de lettres par mot vaut quatre virgule cinq et la variance vaut trois virgule cinq.

En effet :

(4 + 5 + 6 + 3 +2 + 7 + 2 + 6 + 5 + 2 + 7 + 3 + 3 + 4 + 6
+ 7 + 4 + 2 + 2 + 8 + 4 + 5 + 7 + 4) / 24 = 108 / 24 = 4.5

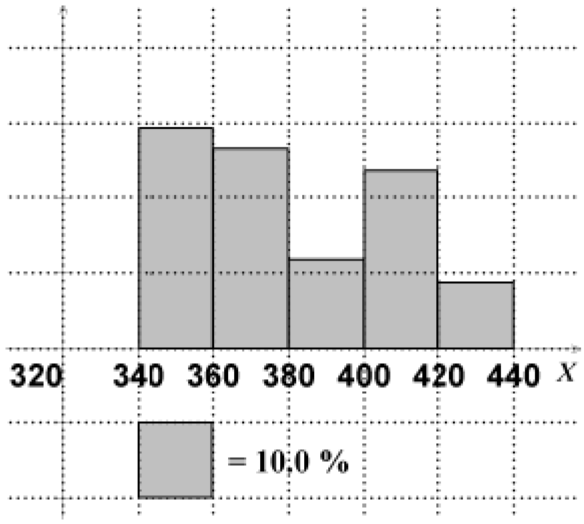
($4^2 + 5^2 + 6^2 + 3^2 +2^2 + 7^2 + 2^2 + 6^2 + 5^2 + 2^2 + 7^2 + 3^2 + 3^2$
$+ 4^2 + 6^2 + 7^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 8^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + 4^2$) / 24
$- 4.5^2$ = 570 / 24 – 20.25 = 3.5

Exercice 3.1.4

Le total des effectifs vaut : 34

Poids	[340 ; 360[	[360 ; 380[	[380 ; 400[	[400 ; 420[	[420 ; 440[
Effectifs	10	9	4	8	3
Centres	350	370	390	410	430
Fréquences	0.294	0.265	0.118	0.235	0.088

$\overline{X} = 381.2$ g
$SD(X) = 27.1$ g



Exercice 3.1.5

pages	**effectifs**	**centres**	**fréquences**
[100 ; 150[	3	125	0.12
[150 ; 200[	7	175	0.28
[200 ; 250[	4	225	0.16
[250 ; 300[	2	275	0.08
[300 ; 350[	3	325	0.12
[350 ; 400[	6	375	0.24
Totaux :	**n = 25**		**1**

$\overline{X} = 251$ pages
$SD(X) = 89.6$ pages

*

Considérons une population A formée de N individus.
Définissons sur cette population une variable X qui associe à chaque individu une valeur x_j $(1 \leqslant j \text{ entier } \leqslant N)$
Ces valeurs ne sont pas nécessairement distinctes, ce sont des observations.

Un <u>échantillon simple</u> de A est un sous-ensemble de A, sur lequel on veut aussi étudier la variable X.

Il existe aussi des échantillons qu'on dit tantôt « non exhaustifs », tantôt « avec remplacement », tantôt « avec remise ». Ce sont des multi-ensembles : un même individu peut y être présent plusieurs fois. Nous nous limiterons à des échantillons simples.

Considérons des échantillons simples de taille $n<N$
Il y en a $w=C_n^N$
Numérotons-les et notons-les ${}^eA$ $(1 \leqslant e \text{ entier } \leqslant w)$

Notons de même ${}^eX$ la variable qui associe à chaque individu de ${}^eA$
la valeur ${}^ex_i$ $(1 \leqslant i \text{ entier } \leqslant n)$ de X
Les ${}^ex_i$ sont les observations de X sur l'échantillon numéro e.

En résumé, nous avons :

<u>Situation d'échantillonnage simple</u>

Une population A de taille N,
avec les observations x_j de X

Un ensemble de w échantillons ${}^eA$ de taille n,
avec les observations ${}^ex_i$ de ${}^eX$
(${}^eX$ étant la variable X restreinte à ${}^eA$)

$(1 \leqslant j \text{ entier } \leqslant N)$, $w=C_n^N$,
$(1 \leqslant e \text{ entier } \leqslant w)$, $(1 \leqslant i \text{ entier } \leqslant n)$

De plus, notons μ et σ^2 la moyenne et la variance de X sur A ;
notons ${}^e\mu$ et ${}^e\sigma^2$ la moyenne et la variance de ${}^eX$ sur ${}^eA$

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \mu)^2$$
$${}^e\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {}^ex_i \qquad {}^e\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({}^ex_i - {}^e\mu)^2$$

Formules 5

Exemple 3.1.3

$A = \{\alpha \;;\; \beta \;;\; \gamma \;;\; \delta \;;\; \varepsilon\}$ une population de $N=5$ individus.

X une variable définie par :

$$x_1 = X(\alpha) = 1$$
$$x_2 = X(\beta) = 7$$
$$x_3 = X(\gamma) = 4$$
$$x_4 = X(\delta) = 4$$
$$x_5 = X(\varepsilon) = 1$$

$$\mu = \frac{1}{5}(1+7+4+4+1) = 3.4$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{5}[(1-3.4)^2 + (7-3.4)^2 + (4-3.4)^2 + (4-3.4)^2 + (1-3.4)^2] = 5.04$$

Formons tous les échantillons de taille $n=2$
Il y en a $w=C_2^5=10$

${}^{1}A=\{\alpha\ ;\ \beta\}$	${}^{1}x_1=X(\alpha)=1\ ,\ {}^{1}x_2=X(\beta)=7$	${}^{1}\mu=4$	${}^{1}\sigma^2=9$
${}^{2}A=\{\alpha\ ;\ \gamma\}$	${}^{2}x_1=X(\alpha)=1\ ,\ {}^{2}x_2=X(\gamma)=4$	${}^{2}\mu=2.5$	${}^{2}\sigma^2=2.25$
${}^{3}A=\{\alpha\ ;\ \delta\}$	${}^{3}x_1=X(\alpha)=1\ ,\ {}^{3}x_2=X(\delta)=4$	${}^{3}\mu=2.5$	${}^{3}\sigma^2=2.25$
${}^{4}A=\{\alpha\ ;\ \varepsilon\}$	${}^{4}x_1=X(\alpha)=1\ ,\ {}^{4}x_2=X(\varepsilon)=1$	${}^{4}\mu=1$	${}^{4}\sigma^2=0$
${}^{5}A=\{\beta\ ;\ \gamma\}$	${}^{5}x_1=X(\beta)=7\ ,\ {}^{5}x_2=X(\gamma)=4$	${}^{5}\mu=5.5$	${}^{5}\sigma^2=2.25$
${}^{6}A=\{\beta\ ;\ \delta\}$	${}^{6}x_1=X(\beta)=7\ ,\ {}^{6}x_2=X(\delta)=4$	${}^{6}\mu=5.5$	${}^{6}\sigma^2=2.25$
${}^{7}A=\{\beta\ ;\ \varepsilon\}$	${}^{7}x_1=X(\beta)=7\ ,\ {}^{7}x_2=X(\varepsilon)=1$	${}^{7}\mu=4$	${}^{7}\sigma^2=9$
${}^{8}A=\{\gamma\ ;\ \delta\}$	${}^{8}x_1=X(\gamma)=4\ ,\ {}^{8}x_2=X(\delta)=4$	${}^{8}\mu=4$	${}^{8}\sigma^2=0$
${}^{9}A=\{\gamma\ ;\ \varepsilon\}$	${}^{9}x_1=X(\gamma)=4\ ,\ {}^{9}x_2=X(\varepsilon)=1$	${}^{9}\mu=2.5$	${}^{9}\sigma^2=2.25$
${}^{10}A=\{\delta\ ;\ \varepsilon\}$	${}^{10}x_1=X(\delta)=4\ ,\ {}^{10}x_2=X(\varepsilon)=1$	${}^{10}\mu=2.5$	${}^{10}\sigma^2=2.25$

La moyenne des 10 valeurs de ${}^{e}\mu$ vaut 3.4.
Elle est égale à la moyenne de toute la population.

La moyenne des 10 valeurs de ${}^{e}\sigma^2$ vaut 3.15.
Elle est inférieure à la variance de toute la population.

Cet exemple se généralise. On a le théorème suivant :

> La moyenne des ${}^{e}\mu$ sur les w échantillons de ${}^{e}A$
> est égale à la moyenne de toute la population.
>
> La moyenne des ${}^{e}\sigma^2$ sur les w échantillons de ${}^{e}A$
> est inférieure à la moyenne de toute la population.

La première partie est facile à prouver.

Chaque individu de A est présent dans $C_{n-1}^{N-1}=\frac{nw}{N}$ échantillons

(dans l'exemple, cela fait $\frac{20}{5}$)

Si on fait la somme de toutes les observations pour les w échantillons, on obtient :

$$\frac{nw}{N}(x_1+x_2+...+x_N)=\frac{nw}{N}\cdot N\mu=nw\mu$$

(dans l'exemple, cela fait $\frac{20}{5}\cdot(1+7+4+4+1)=68$)

Par ailleurs, si on multiplie par nw la moyenne des ${}^{e}\mu$, on obtient le même résultat.

(dans l'exemple, cela fait $20\cdot 3.4=68$)

La seconde partie nécessite un calcul algébrique plus compliqué.

Nous ne le donnerons pas.

Le théorème précédent signifie que :

La moyenne d'un échantillon estime sans biais la moyenne de la population, mais la variance d'un échantillon estime de manière biaisée la variance de la population.

Précisons ce que cela veut dire !

Quand on définit une variable X sur une population A, la moyenne de X, la variance de X, etc. sont des <u>paramètres</u> de la population A pour la variable X. Si cette population est très grande (ou fluctuante), déterminer des paramètres par une enquête au sein de toute la population peut être difficile, coûteux, voire impossible. L'idée est alors de former de manière aléatoire un échantillon de taille plus modeste.

<u>Estimer un paramètre</u> β de la population A consiste à trouver une valeur approchée de β , en utilisant uniquement les valeurs de X obtenues sur un échantillon. On forme pour cela une fonction générale B des valeurs de X sur un échantillon variable. Cette fonction (ou variable) s'appelle un <u>estimateur</u>. L'application particulière de cet estimateur à un échantillon choisi donne l'estimation b de β pour cet échantillon.

<u>Paramètres classiques d'une population A</u> :

$\gamma =$ fréquence d'une valeur fixée de X
$\mu = Moy(X)$
$\sigma^2 = Var(X)$
$\sigma = SD(X)$

Ce sont des <u>constantes</u> (souvent inconnues)

<u>Estimateurs de ces paramètres</u> :

$G =$ fréquence dans l'échantillon ${}^eA$ d'une valeur fixée de X
$M = Moy({}^eX) =$ moyenne de X restreinte à l'échantillon ${}^eA$
$S^2 = Var({}^eX) =$ variance de X restreinte à l'échantillon ${}^eA$
$S = SD({}^eX) =$ écart-type de X restreinte à l'échantillon ${}^eA$

Ce sont des <u>fonctions</u> ou des <u>variables</u> sur la population formée des échantillons. Chacun de ces estimateurs associe une valeur (estimation) à chacun des w échantillons.

Pour un échantillon choisi ${}^eA$, les estimations peuvent être respectivement notées :

g ou ${}^e\gamma$
m ou ${}^e\mu$
s^2 ou ${}^e\sigma^2$
s ou ${}^e\sigma$

Dans le cas de la moyenne, par exemple, cela signifie :

L'estimateur M, appliqué à un échantillon choisi, fournit une valeur m qui est une estimation de μ

Les estimateurs étant des variables, on peut leur appliquer à eux-mêmes ou à d'autres estimateurs les fonctions qui les définissent. On peut notamment souhaiter calculer $Moy(B)$, $Var(B)$, $SD(B)$ pour divers estimateurs B

Un estimateur B de β est dit <u>non biaisé</u> quand $Moy(B)=\beta$. Autrement, il est dit <u>biaisé</u>.

$Moy(B)$ signifie qu'on évalue B dans tous les échantillons ${}^{e}A$ et qu'on effectue la moyenne de toutes les estimations ${}^{e}\beta$ (il y en a w).

L'égalité caractéristique d'un estimateur non biaisé : $Moy(B)=\beta$ signifie la chose suivante :

En moyenne, l'estimation de β par l'estimateur B donne β

C'est une caractéristique désirable pour un estimateur d'être non biaisé (n'oubliez pas le premier i !)... mais on peut aussi désirer d'autres caractéristiques dont nous ne parlerons pas ici...

G est un estimateur non biaisé de γ
M est un estimateur non biaisé de μ (nous l'avons vu précédemment)
S^2 est un estimateur biaisé de σ^2

Ce dernier fait nous embête et conduit à définir une <u>variance corrigée</u> :

$$ {}_{c}Var(X)=\frac{N}{N-1}Var(X)=\frac{1}{N-1}\sum_{j}(x_j-\mu)^2 $$
$$ {}_{c}Var({}^{e}X)=\frac{n}{n-1}Var({}^{e}X)=\frac{1}{n-1}\sum_{i}({}^{e}x_j-{}^{e}\mu)^2 $$

Formule 6 (cas 2)

On le voit, la variance corrigée consiste à diviser par $N-1$ (respectivement $n-1$) plutôt que par N (respectivement n) la somme des carrés des écarts à la moyenne. Cette somme, signalons-le au passage, est souvent notée *SCE*.

La variance corrigée conduit à l'estimateur ${}_{c}S^2=\frac{n}{n-1}S^2$ du paramètre ${}_{c}\sigma^2=\frac{N}{N-1}\sigma^2$

Et alors, un calcul permet de montrer que :

${}_{c}S^2$ est un estimateur non biaisé de ${}_{c}\sigma^2$

Remarques

Si $\frac{N}{N-1}$ est très proche de 1 (c'est le cas quand *N* est suffisamment grand),
alors ${}_c\sigma^2$ est très proche de σ^2 .
Donc ${}_cS^2$ est presque un estimateur non biaisé de σ^2 .

Si, de plus, $\frac{n}{n-1}$ est lui aussi très proche de 1 (c'est le cas quand *n* est suffisamment grand),
alors ${}_cS^2$ est très proche de S^2 .
Donc S^2 est presque un estimateur non biaisé de σ^2 .

C'est surtout quand *n* est relativement petit (disons $n \leqslant 30$) que l'usage d'une variance corrigée est préférable pour estimer σ^2 .

*

Passons en revue quelques estimateurs !

Estimateur non biaisé de la fréquence

$$Moy(G)=\gamma$$

$$Var(G)=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\gamma\cdot(1-\gamma)}{n}\approx\frac{\gamma\cdot(1-\gamma)}{n}$$

(L'approximation est valable
quand *N* est beaucoup plus grand que *n*.)

$$SD(G)=\sqrt{Var(G)}\approx\sqrt{\frac{\gamma\cdot(1-\gamma)}{n}}$$

(L'approximation est valable
quand *N* est beaucoup plus grand que *n*.)

Formules 7

Estimateur non biaisé de la moyenne

$$Moy(M)=\mu$$

$$Var(M)=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}\approx\frac{\sigma^2}{n}$$

(L'approximation est valable
quand N est beaucoup plus grand que n.)

$$SD(M)=\sqrt{Var(M)}\approx\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(L'approximation est valable
quand N est beaucoup plus grand que n.)

Formules 8

Estimateur biaisé de la variance

$$Moy(S^2)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{N}{N-1}\cdot\sigma^2$$

$\approx\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$ quand N suffisamment grand

$\approx\sigma^2$ quand n suffisamment grand

$$Var(S^2)\approx(1-\frac{1}{n})\cdot\frac{2\sigma^4}{n}$$

si X suit approximativement une loi normale sur A

$\approx\frac{2\sigma^4}{n}$ quand n suffisamment grand

$$SD(S^2)=\sqrt{Var(S^2)}\approx\sigma^2\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}$$

si X suit approximativement une loi normale sur A

Formules 9

Estimateur non biaisé de la variance corrigée

$$Moy\left({}_cS^2\right) = {}_c\sigma^2 = \frac{N}{N-1}\cdot\sigma^2$$

$\approx\sigma^2$ quand N suffisamment grand

$$Var\left({}_cS^2\right) \approx \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

si X suit approximativement une loi normale sur A

$$SD\left({}_cS^2\right) = \sqrt{Var\left({}_cS^2\right)} \approx \sigma^2\cdot\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

si X suit approximativement une loi normale sur A

Formules 10

Estimateur biaisé de l'écart-type

$$Moy(S) \approx \sqrt{1-\frac{3}{2n}}\cdot\sigma$$

si X suit approximativement une loi normale sur A

$\approx\sigma$ quand n suffisamment grand

$$Var(S) \approx \frac{\sigma^2}{2n}$$

si X suit approximativement une loi normale sur A

$$SD(S) \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

si X suit approximativement une loi normale sur A

Formules 11

Voici une preuve partielle des formules 7 pour l'estimation d'une fréquence.

Soit γ la fréquence dans la population A des individus pour lesquels $X=u$
Il y a donc, dans A, $d=N\gamma$ individus pour lesquels $X=u$

Considérons un échantillon simple de taille n, c-à-d une combinaison simple de n individus parmi les N de A.

Posons Y = le nombre d'individus, dans cet échantillon, pour lesquels $X=u$

Soit v un nombre entier. La probabilité que $Y=v$ vaut :

$$P(Y=v)=\frac{C_v^d \cdot C_{n-v}^{N-d}}{C_n^N}$$

C'est une loi hypergéométrique. Les formules pour sa moyenne (espérance) et sa variance, un peu compliquées à démontrer, donnent :

$$Moy(Y)=\frac{n\,d}{N}=\frac{n\,N\,\gamma}{N}=n\,\gamma$$
$$Var(Y)=\frac{n\,d}{N}(1-\frac{d}{N})(\frac{N-n}{N-1})=n\,\gamma(1-\gamma)(\frac{N-n}{N-1})$$

Soit G = la fréquence d'individus, dans un échantillon, pour lesquels $X=u$

Nous avons $G=\frac{Y}{n}$

Et donc :

$$Moy(G)=E(G)=E(\frac{Y}{n})=\frac{1}{n}E(Y)=\gamma$$
$$Var(G)=Var(\frac{Y}{n})=\frac{1}{n^2}Var(Y)=(\frac{N-n}{N-1})\frac{\gamma(1-\gamma)}{n}$$

Remarque

À la fin, nous avons utilisé les formules 16 du chapitre 2.8

*

Exercice 3.1.6

Dans une population A de 5 individus, une variable X prend 5 valeurs différentes :

2 4 7 8 9

a) Calculer $\mu = Moy(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ dans cette population.

b) Former tous les échantillons de 2 des valeurs de X.
Dans chaque échantillon, calculer la moyenne et la variance ; puis, à partir de ces valeurs, calculer $Moy(M)$, $Var(M)$, $Moy(S^2)$, $Var(S^2)$

c) Vérifier dans cette situation les formules :

$$Moy(M) = \mu$$
$$Var(M) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$
$$Moy(S^2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1} \cdot \sigma^2$$

Exercice 3.1.7

Déduire de la formule approximative $Var(S^2) \approx (1 - \frac{1}{n}) \cdot \frac{2\sigma^4}{n}$ la formule approximative $Var({}_cS^2) \approx \frac{2\sigma^4}{n-1}$

Exercice 3.1.8

Soit une population A formée des 32 codes binaires de longueur 5.

Par exemple, un individu est 01011

Soit X la variable qui associe à chaque code le nombre de « 1 » présents dans ce code.

Par exemple, $X(01011)=3$

$P(X=k)$ est une loi binomiale.

a) Calculer

$$\gamma=P(X=3)=F(X=3)$$
$$\mu=E(X)=Moy(X)$$
$$\sigma^2=Var(X)$$

b) Considérons l'ensemble de tous les échantillons de 4 de ces codes. Et prenons sur un échantillon variable les estimateurs non biaisés G de γ et M de μ

Avec les formules de la théorie, calculer $Var(G)$ et $Var(M)$

*

Solutions

Exercice 3.1.6

a)

$$\mu=\frac{2+4+7+8+9}{5}=6$$
$$\sigma^2=\frac{2^2+4^2+7^2+8^2+9^2}{5}-6^2=6.8$$

b)

Échantillons	Moyennes	Variances
{2 ; 4}	3	1
{2 ; 7}	4.5	6.25
{2 ; 8}	5	9
{2 ; 9}	5.5	12.25
{4 ; 7}	5.5	2.25
{4 ; 8}	6	4
{4 ; 9}	6.5	6.25
{7 ; 8}	7.5	0.25
{7 ; 9}	8	1
{8 ; 9}	8.5	0.25
Totaux	**60**	**42.5**

$$Moy(M)=\frac{60}{10}=6$$
$$Moy(S^2)=\frac{42.5}{10}=4.25$$
$$Var(M)=\frac{385.5}{10}-6^2=2.25$$
$$Var(S^2)=\frac{332.375}{10}-4.25^2=15.175$$

c)

$$Moy(S^2)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{N}{N-1}\cdot\sigma^2=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot 6.8=4.25$$

$$Var(M)=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}=\frac{5-2}{5-1}\cdot\frac{6.8}{2}=2.55$$

Exercice 3.1.7

$$Var({}_cS^2)=Var(\frac{n}{n-1}S^2)=(\frac{n}{n-1})^2 Var(S^2)$$

$$\approx\frac{n^2}{(n-1)^2}(1-\frac{1}{n})\frac{2\sigma^4}{n}=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

Exercice 3.1.8

a)

$$P(X=k)=C_k^5\cdot(\frac{1}{2})^k\cdot(\frac{1}{2})^{5-k}=C_k^5\cdot(\frac{1}{2^5})=C_k^5\cdot(\frac{1}{32})$$

$$\gamma=P(X=3)=C_3^5\cdot(\frac{1}{32})=0.3125$$

$$\mu=5\cdot(\frac{1}{2})=2.5$$

$$\sigma^2=5\cdot(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2})=1.25$$

b)

$$Var(G)=\frac{32-4}{32-1}\cdot\frac{0.3125\cdot(1-0.3125)}{4}=0.0485$$

$$Var(M)=\frac{32-4}{32-1}\cdot\frac{1.25}{4}=0.2823$$

*

3.2 Intervalles de confiance

Soient

- une variable *X* sur une population *A* de taille *N*
- un estimateur *B* d'un paramètre β (rappelons qu'un estimateur *B* est une variable qui associe une valeur à chaque échantillon de taille *n*)
- la valeur *b* de *B* sur un échantillon particulier de taille *n*

Un intervalle de confiance pour β au niveau $1-\alpha$
est un intervalle $I=[b-\varepsilon\,; b+\varepsilon]$ où $\varepsilon>0$ est tel que

$$P(\beta-\varepsilon\leqslant B\leqslant\beta+\varepsilon)=1-\alpha$$

Cette condition est équivalente à :

$$P(B-\varepsilon\leqslant\beta\leqslant B+\varepsilon)=1-\alpha$$

Cela signifie ceci :

Quand on calcule la valeur de *B* sur chaque échantillon de taille *n*, cette valeur se trouve dans l'intervalle constant (mais pas connu précisément) $[\beta-\varepsilon\,;\beta+\varepsilon]$ avec une fréquence $1-\alpha$;

et de même β se trouve dans l'intervalle variable $[B-\varepsilon\,; B+\varepsilon]$ avec une fréquence $1-\alpha$.

Notez que, si on veut estimer β , c'est qu'on ne connaît pas sa valeur, c'est pourquoi l'intervalle de confiance est défini avec *b* au lieu de β

Formellement, même si ce « raccourci » est souvent effectué, il est inexact de dire que β se trouve dans $I=[b-\varepsilon\,; b+\varepsilon]$ avec une probabilité $1-\alpha$

ε s'appelle la marge d'erreur, avec une incertitude α
On peut l'exprimer sous la forme : $\varepsilon=k\sigma_B$, où $\sigma_B=SD(B)$

Les deux principales valeurs utilisées de α sont :

$\alpha=0.05$ et donc $1-\alpha=0.95$
(incertitude de 5 %, niveau de confiance de 95 %)

$\alpha=0.01$ et donc $1-\alpha=0.99$
(incertitude de 1 %, niveau de confiance de 99 %)

Ces valeurs sont évidemment arbitraires...

Si B suit approximativement une loi normale $N(\beta,\sigma_B)$, nous pouvons lui appliquer une des formules 24 du chapitre 2.9 :

La valeur de $\varepsilon>0$ telle que $P(\mu_X-\varepsilon\leqslant X\leqslant\mu_X+\varepsilon)=r$ est $\varepsilon=\sigma_X\cdot\Phi^{-1}(\frac{r+1}{2})$

En remplaçant X par B et r par $1-\alpha$, cela nous donne :

La valeur de $\varepsilon>0$ telle que $P(\beta-\varepsilon\leqslant B\leqslant\beta+\varepsilon)=1-\alpha$ est $\varepsilon=\sigma_B\cdot\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

En écrivant $\varepsilon=k\sigma_B$, nous obtenons : $k=\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

$\alpha=0.05$ donne $k=1.96$
$\alpha=0.01$ donne $k=2.576$

Sous l'hypothèse qu'une loi normale est raisonnable pour approximer la loi de B :

$\varepsilon=\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sigma_B$ est une marge d'erreur, avec une incertitude α

$$[b-\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sigma_B ; b+\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sigma_B]$$

est un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour une estimation b de B

En particulier :

$$\varepsilon=1.96\,\sigma_B$$

est une marge d'erreur avec une incertitude de 5 %

$$[b-1.96\,\sigma_B ; b+1.96\,\sigma_B]$$

est un intervalle de confiance à 95 %

$$\varepsilon=2.576\,\sigma_B$$

est une marge d'erreur avec une incertitude de 1 %

$$[b-2.576\,\sigma_B ; b+2.576\,\sigma_B]$$

est un intervalle de confiance à 99 %

Formules 12

Nous nous proposons d'appliquer ces formules à :

$B=G$ estimateur d'une <u>fréquence</u> γ

$b=g$

$$\sigma_B=\sigma_G=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\sqrt{\frac{\gamma\cdot(1-\gamma)}{n}}$$

$B=M$ estimateur de la <u>moyenne</u> μ de X

$b=m$

$$\sigma_B=\sigma_M=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Mais cela pose deux problèmes :

Dans le cas d’une fréquence, γ n’est pas connu.
Il faut donc utiliser g à la place de γ dans la formule
$\sigma_B=\sigma_G=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\sqrt{\frac{\gamma\cdot(1-\gamma)}{n}}$,
qui devient dès lors $\sigma_B=\sigma_G=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\sqrt{\frac{g\cdot(1-g)}{n}}$ et donc la marge d’erreur vaut :

$$\varepsilon=\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\sqrt{\frac{g\cdot(1-g)}{n}}$$

Formule 13

Dans le cas de la moyenne, il se peut que σ soit connu, bien que μ ne soit pas connu. C’est ce que nous allons considérer en un premier temps. Plus tard, nous verrons comment procéder quand σ n’est pas connu (situation la plus courante).

Exemple 3.2.1 (sous l’hypothèse d’une approximation par une loi normale)

Une élection doit avoir lieu à Genève. Il y a 3 candidats :
C_1 = Benêt, C_2 = Filou et C_3 = Poltron.

Un 1er sondage, portant sur un échantillon de 32 électeurs, donne comme fréquences respectives d’intentions de vote :

$$g_1=25\% \quad , \quad g_2=43.75\% \quad , \quad g_3=31.25\%$$

La population genevoise est d’environ 500'000 habitants.
Le facteur $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ est très proche de 1.
Avec $N\approx 500'000$ et $n=32$, ce facteur donne 0.99997. Donc, inutile d’en tenir compte dans nos calculs.

Les marges d'erreurs avec une incertitude 1 % donnent respectivement :

$$\varepsilon_1 = 2.576\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{32}} = 0.197 = 19.7\%$$
$$\varepsilon_2 = 2.576\sqrt{\frac{0.4375(1-0.4375)}{32}} = 0.226 = 22.6\%$$
$$\varepsilon_3 = 2.576\sqrt{\frac{0.3125(1-0.3125)}{32}} = 0.211 = 21.1\%$$

L'échantillon est de petite taille. Ces marges sont élevées.

Un 2[e] sondage, portant cette fois-ci sur un échantillon de 1'000 électeurs, donne comme fréquences d'intentions de vote :

$$g_1 = 27\% \quad , \quad g_2 = 24\% \quad , \quad g_3 = 49\%$$

À nouveau le facteur $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ est très proche de 1, il donne 0.999. Négligeons-le !

Les marges d'erreurs avec une incertitude 1 % donnent respectivement :

$$\varepsilon_1 = 2.576\sqrt{\frac{0.27(1-0.27)}{1000}} = 0.036 = 3.6\%$$
$$\varepsilon_2 = 2.576\sqrt{\frac{0.24(1-0.24)}{1000}} = 0.035 = 3.5\%$$
$$\varepsilon_3 = 2.576\sqrt{\frac{0.49(1-0.49)}{1000}} = 0.041 = 4.1\%$$

Ces valeurs sont plus raisonnables. Elles permettent d'être quasiment sûr que Poltron sera en tête. Par contre, pour la 2[e] place, elles ne permettent pas de départager Benêt et Filou, puisque l'intervalle de confiance de Benêt $[23.4\%; 30.6\%]$ et celui de Filou $[20.5\%; 27.5\%]$ se chevauchent.

Exemple 3.2.2 (sous l'hypothèse d'une approximation par une loi normale)

En négligeant le facteur $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (hypothèse : N est suffisamment grand), combien d'individus doit comporter un échantillon pour que la marge d'erreur portant sur une fréquence de 50 % soit de 2 % avec un niveau de confiance de 99 % ?

Il faut résoudre l'équation : $2.576\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}}=0.02$

On la transforme ainsi : $\sqrt{n}=\frac{0.5\cdot 2.576}{0.02}=64.4$

D'où : $n=64.4^2\approx 4'150$

Exemple 3.2.3 (sous l'hypothèse d'une loi approximativement normale)

En Koboldie, un pays habité par des gnomes, une enquête portant sur un échantillon de 100 individus donne une moyenne de 3.5 cm pour la taille X de l'index. Supposons que l'écart-type de X sur toute la population de Koboldie soit connu. Disons qu'il vaut $\sigma=0.5\,\text{cm}$.

En négligeant le facteur $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (hypothèse : N est suffisamment grand), l'intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne est :

$$[m-1.96\sigma_M\,;\,m+1.96\sigma_M]=[m-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,m+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$
$$=[3.5-1.96\frac{0.5}{\sqrt{100}}\,;\,3.5+1.96\frac{0.5}{\sqrt{100}}]=[3.5-0.098\,;\,3.5+0.098]$$
$$=[3.4\,;\,3.6]$$

*

Dans la série d'exercices suivants, on se place dans le cadre hypothétique d'une légitimité d'approximations par des lois normales.

Exercice 3.2.1

Le tableau suivant présente les résultats d'un sondage. On a demandé à 40 adultes pris au hasard dans la population polonaise d'évaluer, sur une échelle de nombres entiers allant de 1 à 5, leur niveau d'intérêt pour les statistiques.

Scores	1	2	3	4	5
Effectifs	5	8	9	11	7

a) Donner l'intervalle de confiance à 95 % pour la fréquence de chacun des 5 scores
b) Donner l'intervalle de confiance à 99 % pour la fréquence de chacun des 5 scores.

Exercice 3.2.2

Dans le beau pays d'Amarillo, une élection présidentielle approche. Il y a deux candidats : Alligator et Crocodile. Un sondage portant sur un échantillon aléatoire de 900 électeurs donne 54 % d'intentions de vote pour Alligator et 46 % pour Crocodile.

a) Pour chacune des fréquences, donner l'intervalle de confiance à 95 %.
b) Au niveau de confiance de 95 %, Alligator a-t-il raison de croire qu'il sera élu ?
c) Pour chacune des fréquences, donner l'intervalle de confiance à 99 %.
d) Au niveau de confiance de 99 %, Alligator a-t-il raison de croire qu'il sera élu ?

Caïman, qui organise des paris sur les résultats électoraux, commande un nouveau sondage, cette fois-ci sur un échantillon aléatoire de 5'000 électeurs.
Maintenant, Alligator est crédité de 52 % d'intentions de vote, et Crocodile de 48 %.

e) Au niveau de confiance de 99 %, avons-nous raison de croire qu'Alligator sera élu ?

Exercice 3.2.3

En République de Godive, il y a 400 prêtres. Un sondage a été effectué auprès d'un échantillon de 250 prêtres pour leur demander l'âge de leur premier péché. Les réponses ont permis de calculer une moyenne de 63 ans. Par ailleurs, un message divin nous assure que l'écart-type (sur toute la population des 400 prêtres) est de 12 ans. Calculer l'intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne.

Exercice 3.2.4

Quand, pour estimer une fréquence γ, on effectue un sondage aléatoire portant sur *n* personnes, la marge d'erreur, avec une incertitude α, si on néglige le facteur $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, vaut :

$$\varepsilon=\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot\sqrt{\frac{\gamma\cdot(1-\gamma)}{n}}$$

$\gamma\cdot(1-\gamma)$ vaut au maximum 0.25 (quand $\gamma=0.5$). Donc :

$$\varepsilon\leqslant\frac{0.5\,\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n}}$$

Avec $\alpha=0.05$, nous avons $\Phi^{-1}\left(1-\frac{0.05}{2}\right)=1.96$ et donc : $\varepsilon\leqslant\frac{0.98}{\sqrt{n}}$

Compléter le tableau suivant :

n	$\frac{0.98}{\sqrt{n}}$
30	
50	
100	
500	
1'000	
2'000	
5'000	
10'000	

Exercice 3.2.5

Dans les années 60, le sénateur américain Russell Long déclara que si un échantillon de 1'000 personnes dans une ville de 600'000 habitants était suffisant pour se faire une idée des résultats à une élection future, un échantillon de 300 à 400 personnes dans sa ville de Bâton-Rouge (peuplée à l'époque d'environ 200'000 habitants) devrait suffire à donner une prévision de même fiabilité.

Avait-il raison ?

Exercice 3.2.6

Dans les années 70, un double sondage effectué aux USA avait donné les résultats suivants :

1er sondage. Question posée : « Pensez-vous que les États-Unis doivent autoriser les discours publics contre la démocratie ? »
Résultats : oui 21 % ; non 62 % ; sans opinion 17 %

2e sondage. Question posée : « Pensez-vous que les États-Unis doivent interdire les discours publics contre la démocratie ? »
Résultats : non 39 % ; oui 46 % ; sans opinion 15 %

Comment expliquer que le taux de « non » au 2e sondage soit presque 2 fois plus grand que le taux de « oui » au 1er sondage ?

*

Solutions

Exercice 3.2.1

Les différentes fréquences sont respectivement :

$$g_1=0.125 \quad , \quad g_2=0.2 \quad , \quad g_3=0.225 \quad , \quad g_4=0.275 \quad , \quad g_5=0.175$$

La population polonaise est suffisamment grande pour qu'on puisse négliger le facteur $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

a) Les marges d'erreurs avec une incertitude de 5 % et les intervalles de confiance au niveau de 95 % donnent successivement :

$$\varepsilon_1=1.96\sqrt{\frac{0.125(1-0.125)}{40}}=0.102$$
$$I_1=[0.023\,;0.227]$$

$$\varepsilon_2=1.96\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{40}}=0.124$$
$$I_2=[0.076\,;0.324]$$

$$\varepsilon_3=1.96\sqrt{\frac{0.225(1-0.225)}{40}}=0.129$$
$$I_3=[0.096\,;0.354]$$

$$\varepsilon_4=1.96\sqrt{\frac{0.275(1-0.275)}{40}}=0.138$$
$$I_4=[0.137\,;0.413]$$

$$\varepsilon_5=1.96\sqrt{\frac{0.175(1-0.175)}{40}}=0.118$$
$$I_5=[0.057\,;0.293]$$

b) Les marges d'erreurs avec une incertitude de 1 % et les intervalles de confiance au niveau de 99 % donnent successivement :

$$\varepsilon_1 = 2.576\sqrt{\frac{0.125(1-0.125)}{40}} = 0.135$$
$$I_1 = [-0.01 ; 0.26]$$

$$\varepsilon_2 = 2.576\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{40}} = 0.163$$
$$I_2 = [0.037 ; 0.363]$$

$$\varepsilon_3 = 2.576\sqrt{\frac{0.225(1-0.225)}{40}} = 0.17$$
$$I_3 = [0.055 ; 0.395]$$

$$\varepsilon_4 = 2.576\sqrt{\frac{0.275(1-0.275)}{40}} = 0.182$$
$$I_4 = [0.093 ; 0.457]$$

$$\varepsilon_5 = 2.576\sqrt{\frac{0.175(1-0.175)}{40}} = 0.155$$
$$I_5 = [0.02 ; 0.33]$$

<u>Exercice 3.2.2</u>

a) Alligator : [50.74 % ; 57.26 %]   Crocodile : [42.74 % ; 49.26 %]
b)...
c) Alligator : [49.72 % ; 58.28 %]   Crocodile : [41.72 % ; 50.28 %]
d) non, Alligator a tort.
e) Alligator : [50.18 % ; 53.82 %]   Crocodile : [46.18 % ; 49.82%]

<u>Exercice 3.2.3</u>

$$\varepsilon = 1.96\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.9$$

[63 – 0.9 ; 63 + 0.9] = [62.1 ans ; 63.9 ans]

Exercice 3.2.4

n	$\frac{0.98}{\sqrt{n}}$
30	0.179
50	0.139
100	0.098
500	0.044
1'000	0.031
2'000	0.022
5'000	0.014
10'000	0.010

Exercice 3.2.5

Non, la fiabilité d'un sondage dépend de la taille de l'échantillon ; mais l'influence de la taille de la population que l'on veut sonder est négligeable quand elle est beaucoup plus grande que celle de l'échantillon.

Exercice 3.2.6

Il se pourrait qu'il se dégage du verbe « interdire » l'impression d'une forte menace pour la liberté d'expression. Les gens pourraient être plus facilement tentés de répondre « non » à un projet qui parle d'interdire que de répondre « oui » à un projet qui parle d'autoriser. Il ne s'agit là bien sûr que d'une hypothèse.

*

Comme nous l'avons signalé, la marge d'erreur pour l'estimation d'une moyenne nécessite la connaissance de σ : l'écart-type, sur TOUTE la population, de la variable X qui nous intéresse...

Mais, souvent, nous ne connaissons pas cette valeur...

Alors comment faire ?

Pour ne pas nous compliquer la vie, négligeons dorénavant le facteur $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

L'idée de départ est de remplacer σ par l'estimateur d'écart-type corrigé

${}_cS=\sqrt{\frac{n}{n-1}}S$ dans la formule $\sigma_M=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ce qui donne $\mathring{\sigma}_M=\frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}}S}{\sqrt{n}}=\frac{S}{\sqrt{n-1}}$

Voyons d'abord la formule que nous obtenons avec σ

D'après le théorème central limite, si n tend vers l'infini, alors

$\frac{M-\mu}{\sigma_M}=\frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ tend vers une variable Z normale centrée réduite

et la marge d'erreur avec une incertitude α vaut

$$\varepsilon=\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

où Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition $\Phi(z)=P(Z\leqslant z)$

Formule 14

Avec $\mathring{\sigma}_M = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$, si *n* tend vers l'infini, alors

$$\frac{M-\mu}{\mathring{\sigma}_M} = \frac{M-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$ tend vers une variable T_{n-1} de Student

à $n-1$ degrés de liberté

et la marge d'erreur avec une incertitude α vaut

$$\varepsilon = \left(\Theta_{n-1}^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

où Θ_{n-1}^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition $\Theta_{n-1}(t) = P(T_{n-1} \leqslant t)$

Formule 15

Comme pour Φ^{-1} , il existe des tables ou des outils en ligne qui permettent de calculer Θ_{n-1}^{-1}

Qu'est-ce qu'une loi de Student ?

La densité d'une loi de Student est une courbe en cloche qui tend vers la courbe de Gauss quand *n* tend vers l'infini.

Qui est Student ?

William Sealy Gosset (1876-1937), mathématicien et chimiste, travailla dans le laboratoire de recherche des brasseries Guiness à Dublin. Il y développa des méthodes statistiques pour déterminer la meilleure variété d'orge. Guiness l'autorisa à publier ses recherches, mais sous un pseudonyme. Il choisit « Student ».

Comme la loi de Student converge assez rapidement vers une loi normale, on utilise généralement la formule 15 pour des échantillons dont la taille ne dépasse pas $n=30$.

Au delà de 30, la formule 14, où, dans la marge d'erreur, σ sera remplacé par l'écart-type corrigé de l'échantillon ${}_c s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s$, donne à peu de chose près la même valeur que la formule 14.

La formule 14, avec l'écart-type corrigé, devient :

$$\varepsilon=\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}}s}{\sqrt{n}}=\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

Ainsi :

$$\varepsilon=\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

Formule 14 bis

<u>Exemple 3.2.4</u>

Dans un échantillon aléatoire de 31 Belges, on trouve en moyenne une consommation quotidienne de frites égale à 120 grammes, avec un écart-type de 15 grammes. Calculons un intervalle de confiance au niveau de 90 % de deux manières :

- avec la formule 14 bis
- avec la formule 15

Nous avons :

$$n=31 \quad , \quad n-1=30 \quad , \quad m=120 \text{ g} \quad , \quad s=15 \text{ g} \quad , \quad \alpha=0.1 \quad , \quad 1-\frac{\alpha}{2}=0.95$$
$$\Phi^{-1}(0.95)=1.6449 \quad , \quad \Theta_{30}^{-1}(0.95)=1.6973$$

La formule 14 bis donne :

$$\varepsilon=1.6449\cdot\frac{15}{\sqrt{30}}=4.50 \text{ g}$$
$$[10.50 \text{ g} ; 19.50 \text{ g}]$$

La formule 15 donne :

$$\varepsilon=1.6973\cdot\frac{15}{\sqrt{30}}=4.65 \text{ g}$$
$$[10.35 \text{ g} ; 19.65 \text{ g}]$$

*

Exercice 3.2.7

Un chronométrage sur 35 courses de 100 m donne pour un athlète bernois un temps moyen de 14.53 s, avec un écart-type de 1.68 s.

Trouver un intervalle de confiance, au niveau de 95 %, pour le temps moyen de cet athlète

- avec la formule 14 bis
- avec la formule 15

Exercice 3.2.8

5 prises de sang chez un patient donnent les concentrations suivantes [en g/l] de cholestérol LDL :

1.4 1.9 1.5 1.7 1.7

Trouver un intervalle de confiance, au niveau de 99 %, pour la concentration moyenne de cholestérol LDL chez ce patient.

Exercice 3.2.9

Un échantillon aléatoire de 31 Suédoises fournit pour la moyenne d'un indice de bien-être sentimental l'intervalle de confiance $[92.05 ; 104.1]$. Sachant que l'écart-type mesuré est de 12, calculer le niveau de confiance.

*

Solutions

Exercice 3.2.7

$n=35 \quad , \quad n-1=34 \quad , \quad m=14.53 \text{ s} \quad , \quad s=1.68 \text{ s} \quad , \quad \alpha=0.05 \quad , \quad 1-\frac{\alpha}{2}=0.975$

$\Phi^{-1}(0.975)=1.96 \quad , \quad \Theta_{34}^{-1}(0.975)=2.0322$

La formule 14 bis donne :

$\varepsilon=1.96\cdot\frac{1.68}{\sqrt{34}}=0.56 \text{ s}$

$[13.97 \text{ s}; 15.09 \text{ s}]$

La formule 15 donne :

$\varepsilon=2.0322\cdot\frac{1.68}{\sqrt{34}}=0.59 \text{ s}$

$[13.94 \text{ s}; 15.12 \text{ s}]$

Exercice 3.2.8

$n=5 \quad , \quad n-1=4 \quad , \quad m=1.64 \quad , \quad s=0.174 \quad , \quad \alpha=0.01 \quad , \quad 1-\frac{\alpha}{2}=0.995$

$\Theta_4^{-1}(0.995)=4.6041$

$\varepsilon=4.6041\cdot\frac{0.174}{\sqrt{4}}=0.40$

$[1.24; 2.04]$

Exercice 3.2.9

$n-1=30 \quad , \quad m=\frac{92.05+104.1}{2}=98.075 \quad , \quad \varepsilon=104.1-98.075=6.025 \quad , \quad s=12$

Posons $t=\Theta_{30}^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

Nous avons : $t\cdot\frac{12}{\sqrt{30}}=6.025$, d'où $t=2.75$

$\Theta_{30}(2.75)=0.995=1-\frac{\alpha}{2}$, d'où $\alpha=0.01$

3.3 Problèmes unilatéraux et bilatéraux

Au préalable, donnons une précision importante. Les formules 19 à 24 du chapitre 2.9 peuvent être adaptées aux lois de Student. Il suffit de remplacer Φ par Θ_{n-1}

Soient

- une variable *X* sur une population *A* de taille *N* (où *N* est jugé suffisamment grand pour ne pas avoir à en tenir compte)
- un estimateur *B* d'un paramètre β (rappelons qu'un estimateur *B* est une variable qui associe une valeur à chaque échantillon de taille *n*)
- la valeur *b* de *B* sur un échantillon particulier de taille *n*

Un problème est dit <u>unilatéral</u> quand on s'intéresse à une question relative à $P(B\leqslant c)$ ou à $P(B\geqslant c)$

Un problème est dit <u>bilatéral</u> quand on s'intéresse à une question relative à $P(c\leqslant B\leqslant d)$

Pour traiter ce genre de problèmes, on passe à une variable centrée réduite, dans le but de pouvoir utiliser une approximation par une loi normale $N(0,1)$ ou par une loi de Student.

$P(B\leqslant c)=P(\frac{B-b}{\sigma_B}\leqslant\frac{c-b}{\sigma_B})$ d'où :

$P(B\leqslant c)=\Phi(\frac{c-b}{\sigma_B})$ quand on fait une approximation par une loi normale

$P(B\leqslant c)=\Theta_{n-1}(\frac{c-b}{\sigma_B})$ quand on fait une approximation par une loi de Student

Voici les cas qui vont nous intéresser (en négligeant le facteur $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$) :

G = estimateur d'une fréquence
g = estimation
approximation par une loi normale

$$P(G \leqslant c) = \Phi\left(\frac{c-g}{\sqrt{\frac{g(1-g)}{n}}}\right)$$

Formule 16

M = estimateur d'une moyenne
m = estimation
σ connu
approximation par une loi normale

$$P(M \leqslant c) = \Phi\left(\frac{c-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

Formule 17

M = estimateur d'une moyenne
m = estimation
σ inconnu
s = estimation de l'écart-type de X
approximation par une loi normale

$$P(M \leqslant c) = \Phi\left(\frac{c-m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}\right)$$

Formule 18

M = estimateur d'une moyenne
m = estimation
σ inconnu
s = estimation de l'écart-type de X
approximation par une loi de Student

$$P(M \leqslant c) = \Theta_{n-1}\left(\frac{c-m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}\right)$$

Formule 19

Et pour ce qui est des problèmes bilatéraux, on peut se ramener à ces formules en remarquant que :

$$P(c \leqslant B \leqslant d) = P(B \leqslant d) - P(B < c)$$

Exemple 3.3.1

À Genève, une liste électorale doit obtenir un quorum de 7 % pour que des candidats de cette liste soient élus. Brutus, leader du parti « Cassons tout ! » déclare : « Je vais organiser un sondage. Si les résultats de ce sondage me permettent d'estimer qu'il y a pour mon parti une probabilité d'au moins 20 % d'atteindre le quorum, alors je présenterai une liste au prochaines élections municipales ». Un sondage est effectué sur un échantillon aléatoire de 200 personnes. Il donne une fréquence de 5.7 % d'intentions de vote pour l'éventuelle liste du parti « Cassons tout ! ». La condition fixée par Brutus est :

$$P(G \geqslant 0.07) \geqslant 0.2$$

On peut la transformer en :

$$1-P(G<0.07) \geqslant 0.2 \quad \text{c-à-d :} \quad P(G<0.07) \leqslant 0.8$$

Utilisons la formule 16.

$$P(G \leqslant 0.07) = \Phi\left(\frac{0.07-0.057}{\sqrt{\frac{0.057(1-0.057)}{200}}}\right) \leqslant 0.8$$

$$\Phi(0.793) \leqslant 0.8$$

$$0.786 \leqslant 0.8$$

La condition est remplie. Brutus va présenter une liste.

Remarque

$$P(G \geqslant 0.07) \geqslant 0.2 \quad \text{signifie :}$$

Au vu des résultats du sondage et des hypothèses du modèle mathématique, si le vote s'effectuait par un tirage au sort de 200 électeurs, alors, dans au moins 20 % de tous les tirages possibles de 200 électeurs genevois, on devrait observer une fréquence d'au moins 0.07 de votes en faveur de ce parti.

Exemple 3.3.2

Un distributeur de parfums reçoit 1'000 flacons de 50 ml de la marque « Charnel ». Il souhaite effectuer un test : mesurer les contenances d'un échantillon aléatoire de 20 flacons. Il définit le critère suivant : « Si, d'après ce sondage, il y a une probabilité supérieure à 99 % que la contenance moyenne d'un flacon dans le lot reçu soit inférieure à 50 ml, alors je vais me plaindre au fabricant ». Le test donne une contenance moyenne de 49 ml. L'écart-type des contenances mesurées est 1.6 ml. Le critère fixé par le distributeur est :

$$P(M<50)>0.99$$

Utilisons la formule 19.

$$P(M<50)=\Theta_{19}\left(\frac{50-49}{\frac{1.6}{\sqrt{19}}}\right)>0.99$$

$$\Theta_{19}(2.724)>0.99$$

$$0.9933>0.99$$

Le critère est rempli. Le distributeur commence à rédiger sa plainte. Mais un employé refait le calcul de l'écart-type et s'aperçoit qu'une erreur a été commise. L'écart-type vaut 1.75 et non pas 1.6.

Refaisons les calculs précédents avec cette nouvelle valeur :

$$P(M<50)=\Theta_{19}\left(\frac{50-49}{\frac{1.75}{\sqrt{19}}}\right)>0.99$$

$$\Theta_{19}(2.49)>0.99$$

$$0.9889>0.99$$

Le critère n'est pas rempli. Le distributeur déchire sa plainte...

Remarque

$P(M<50)>0.99$ signifie :

Au vu des résultats du sondage et des hypothèses du modèle mathématique, dans plus de 99 % de tous les échantillons de 20 flacons qu'il serait possible de former à partir des 1'000 reçus, la contenance moyenne d'un flacon devrait être inférieure à 50 ml.

Exemple 3.3.3

Un fabricant de boulons veut tester la précision d'une nouvelle machine destinée à produire des boulons de 6 mm de diamètre. Il se dit : « Je vais faire des mesures ultra-précises sur un échantillon de 80 boulons et je vais calculer la probabilité que le diamètre moyen dans un échantillon aléatoire de 80 boulons soit compris entre 5.8 mm et 6.2 mm ». L'échantillon sélectionné fournit un diamètre moyen de 6.1 mm, avec un écart-type de 0.8 mm.

Utilisons la formule 18.

$$\begin{aligned}
P(5.8 \leqslant M \leqslant 6.2) &= P(M \leqslant 6.2) - P(M < 5.8) \\
&= \Phi\left(\frac{6.2-6.1}{\frac{0.8}{\sqrt{79}}}\right) - \Phi\left(\frac{5.8-6.1}{\frac{0.8}{\sqrt{79}}}\right) \\
&= \Phi(1.111) - \Phi(-3.333) \\
&= 0.8667 - 0.0004 = 0.8663
\end{aligned}$$

Remarque

Ce calcul signifie :

Au vu des résultats du sondage et des hypothèses du modèle mathématique, dans 86.63 % de tous les échantillons de 80 boulons qu'il serait possible de former parmi le stock disponible de boulons, le diamètre moyen d'un boulon devrait s'écarter au plus de 0.2 mm d'une valeur désirée de 6 mm.

*

Exercice 3.3.1

Une publicité prétend qu'au moins 90 % des Suisses possèdent un couteau « McGyver ». Selon un sondage portant sur 150 personnes, 123 d'entre elles possèdent un tel couteau. En approximant par une loi normale l'estimateur G de la fréquence qui nous intéresse, y a-t-il une probabilité d'au moins 99 % que G soit en dessous de 90 %, ce qui constituerait un argument pour qualifier la publicité de très probablement mensongère ?

Exercice 3.3.2

Selon un fabricant de piles, grâce à des progrès technologiques, la durée moyenne de vie (sous des conditions très précises d'utilisation) du modèle « Thor » a pu être augmentée. Elle était auparavant de 120 h. La nouvelle durée moyenne n'a pas été communiquée. Une association de consommateurs procède à un test sur un échantillon de 80 piles. Les résultats donnent une moyenne de 121 h, avec un écart-type de 3.6 h. En approximant par une loi normale l'estimateur M de la moyenne qui nous intéresse, y a-t-il une probabilité d'au moins 99 % que M ne soit pas supérieur à 120 h, ce qui constituerait un argument pour mettre sérieusement en doute l'affirmation du fabricant de piles ?

*

Solutions

Exercice 3.3.1

$$\frac{123}{150}=0.82$$

$$P(G<0.9)\geqslant 0.99$$
$$\Phi\left(\frac{0.9-0.82}{\sqrt{\frac{0.82(1-0.82)}{150}}}\right)\geqslant 0.99$$
$$\Phi(2.5503)\geqslant 0.99$$
$$0.9946\geqslant 0.99$$

La réponse est oui.

Exercice 3.3.2

$$P(M\leqslant 120)\geqslant 0.99$$
$$\Phi\left(\frac{121-120}{\frac{3.6}{\sqrt{79}}}\right)\geqslant 0.99$$
$$\Phi(2.4689)\geqslant 0.99$$
$$0.9932\geqslant 0.99$$

La réponse est oui.

*

3.4 Prolongements & compléments culturels

Extension du domaine de la lutte :

Je passerai sous silence un sujet déprimant : les omniprésentes applications de la statistique.

Si j’avais décidé d’aller plus loin dans ce cours, je vous aurais montré comment :

- dessiner de fines moustaches à des boîtes ;
- discriminer sans honte des catégories de population ;
- découper un nuage avec une ligne idéale ;
- rebondir sur un coefficient d’aplatissement ;
- engager des variables dans des unions stables ;
- détecter les indices qui vont dans le sens de l’humour ;
- oser formuler des hypothèses nulles ;
- construire un raisonnement circulaire en s’appuyant sur le principe des moindres carrés ;
- profiter d’une régression vers la moyenne pour psychanalyser une variance ;
- chercher la corrélation qui tue ;

et autres joyeusetés...

Je me suis limité à raconter des histoires à une seule variable, et ça donne déjà des formules balèzes ! Je vous laisse imaginer le bonheur qui pourrait vous submerger en découvrant un ballet de variables...

*

Un échantillon biaisé de citations sur la statistique

Dans les situations critiques, quand on parle avec un calibre bien en pogne, personne ne conteste plus. Y a des statistiques là-dessus.
Michel Audiard

Les statistiques, c'est comme le bikini. Ce qu'elles révèlent est suggestif. Ce qu'elles dissimulent est essentiel.
Aaron Levenstein

Je ne crois aux statistiques que lorsque je les ai moi-même falsifiées.
Winston Churchill

On peut tout démontrer avec des statistiques et surtout l'existence de statisticiens.
George Bernard Shaw

Mettez un pied dans le four et l'autre dans un seau d'eau glacée. D'après les statisticiens, vous devriez vous sentir très à l'aise en moyenne.
Bobby Bragan

La statistique est une science moderne et positive. Elle met en lumière les faits les plus obscurs. Ainsi, dernièrement, grâce à des recherches laborieuses, nous sommes arrivés à connaître le nombre exact de veuves qui ont passé le Pont-Neuf pendant le cours de l'année 1860 : il y en avait 13'453... dont une douteuse.
Eugène Labiche

Alors que l'homme, dans son individualité, demeure insondable, dans une collectivité, il se fait certitude mathématique. On ne peut jamais prédire ce qu'un homme va faire, mais on peut dire avec précision ce qu'un nombre moyen fera. Les individus diffèrent, mais les moyennes restent constantes.
Conan Doyle

*

Bibliographie

Biggs N.L. (1989). *Discrete mathematics*. Oxford Science Publications, revised edition

Borel E. (1950). *Les probabilités et la vie*. Collection Que sais-je ? PUF, 3e édition.

Boursin J.-L. (1986). *Les structures du hasard*. Collection Points, Seuil.

Bronner G. (1997). *L'incertitude*. Collection Que sais-je ? PUF.

CRM (2018). *Formulaires et tables*. CRM Éditions

Dagnelle P. (1998). *Statistique théorique et appliquée*. De Boeck

Dodge Y. (1999). *Premiers pas en statistique*. Springer.

Gauvrit N. (2007). *Statistiques, méfiez-vous !* Ellipses.

Gonick L. & Smith W. (2016). *Les statistiques en BD*. Larousse.

Janvier M. (1999). *Statistique descriptive*. Dunod.

Kahneman D. (2016). *Système 1/Système 2*. Collection Champs, Flammarion, édition révisée.

Lipschutz S. (1973). *Probabilités*. Série Schaum, McGraw-Hill Inc.

Rey O. (2016). *Quand le monde s'est fait nombre*. Stock.

Spiegel M.R. (1972). *Théorie et applications de la statistique*. Série Schaum, McGraw-Hill Inc.

Taillard F. (1991). *Probabilités et statistique*. Tricorne, 5e édition.

Du même auteur

(1997). *Nouveaux exercices de style, jeux mathématiques et poésie*. Collection Le jardin des sciences. Diderot.

(2002). *Je suis le ténébreux*. (Ouvrage collectif publié sous le pseudonyme de Camille Abaclar). Quintette.

(2004). *C'est-à-dire*. Ecritextes.

(2007). *Mathématiques et littérature*. (Ouvrage collectif sous la direction d'Alain Zalmanski). Collection Bibliothèque Tangente n° 28. Pole.

(2008). *33 de fratrazii*. (Ouvrage collectif, traduction en roumain par Serban Foarta). Editura Art.

(2017). *Maths langage express*. (Ouvrage collectif sous la direction de Stanislas Dehaene). Comité international des jeux mathématiques.

(2017). *Les jeux oulipiques d'Oleyres*. (Ouvrage collectif sous la direction de Schüp). Centre de recherches périphériscopiques.

(2019). *Hussardises*. Bibracte.

(2023). *Feuillets jubilatoires*. (Ouvrage collectif sous la direction de Schüp). Centre de recherches périphériscopiques.