Exponentielles & logarithmes

donne

$$\log_a(u) = v$$

puissance

Pascal Kaeser 2025

Table des matières

Exponentielles & logarithmes

1. Puissances et racines

<u>Extension du domaine de la puissance</u>

D'abord il y eut

$\boxed{a^p \text{ , avec p entier > 0}}$

$a^1 = a \qquad a^2 = aa \qquad a^3 = aaa \qquad a^4 = aaaa$ etc.

La propriété $a^p a^q = a^{p+q}$, en prenant $q=0$, donne $a^p a^0 = a^p$, ce qui conduit à définir :

$$\boxed{a^0 = 1 \quad \text{(si } a \neq 0 \text{)}}$$

La propriété $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, en prenant $p=0$, donne $\frac{a^0}{a^q} = a^{-q}$, ce qui conduit à définir :

$$\boxed{a^{-q} = \frac{1}{a^q} \quad \text{(si } a \neq 0 \text{)}}$$

En particulier :

$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ etc.

De la sorte, les puissances à exposants négatifs virent le jour.

La propriété $(a^m)^n = a^{mn}$, en prenant $m = \frac{p}{q}$ et $n=q$, donne $(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{\frac{p}{q}q}$, c-à-d $(a^{\frac{p}{q}})^q = a^p$, ce qui conduit à définir :

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad \text{(si } a>0 \text{) ou (si } a<0 \text{ et q impair)}}$$

En particulier :

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \qquad a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} \qquad a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$ etc.

Et c'est ainsi que les exposants purent devenir fractions.

Une opération plus délicate (passage à la limite) permet d'aller encore plus loin et d'étendre les exposants à tous les nombres réels.

Voici une liste des principales définitions et propriétés des puissances :

Soient p et q des entiers strictement positifs ; r et s des nombres réels.

$a^0=1$	$a^1=a$	$a^p=aa...a$	(a écrit p fois)	$a^{-q}=\dfrac{1}{a^q}$	
$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=(\sqrt[q]{a})^p$		$a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$	$a^{-\frac{1}{q}}=\dfrac{1}{\sqrt[q]{a}}$		
$a^{r+s}=a^r a^s$	$a^{r-s}=\dfrac{a^r}{a^s}$	$a^{rs}=(a^r)^s$	$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$	$(ab)^r=a^r b^r$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

Certaines de ces propriétés nécessitent des restrictions sur a ou sur b (il faut parfois exclure 0 ou les valeurs négatives).

Exemples 1.1 Calculs

$4^2=16$ $\quad 4^3=64$ $\quad (-4)^2=16$ $\quad (-4)^3=-64$

$2^{-1}=\dfrac{1}{2}=0.5$ $\quad 5^{-2}=\dfrac{1}{25}=0.04$ $\quad 2^{-3}=\dfrac{1}{8}=0.125$ $\quad 10^{-4}=\dfrac{1}{10000}=0.0001$

$16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4$ $\quad 125^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{125}=5$ $\quad 64^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{64})^2=4^2=16$

$25^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{25}}=\dfrac{1}{5}=0.2$ $\quad 32^{-\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{32^{\frac{4}{5}}}=\dfrac{1}{(\sqrt[5]{32})^4}=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}=0.0625$

Exercice 1 Calculer sans machine

$10^5=$ $\quad (-2)^4=$ $\quad (-2)^5=$ $\quad (-1)^{517}=$

$1^{517}=$ $\quad (-1)^{864}=$ $\quad 1^0=$ $\quad 0^1=$

$10^{-2}=$ $\quad (-1)^{(-17)}=$ $\quad 2^{-2}=$ $\quad 5^{-1}=$

$(-3)^{-2}=$ $\quad 10^{-3}=$ $\quad (-10)^{-1}=$ $\quad 81^{\frac{1}{2}}=$

$81^{\frac{1}{4}}=$ $\quad 64^{\frac{1}{2}}=$ $\quad 64^{\frac{1}{3}}=$ $\quad 1000^{\frac{2}{3}}=$

$4^{\frac{3}{2}}=$ $\quad 81^{\frac{3}{4}}=$ $\quad 10000^{-\frac{1}{2}}=$ $\quad 9^{-\frac{1}{2}}=$

$8^{-\frac{1}{3}}=$ $\quad 64^{-\frac{5}{6}}=$ $\quad 1000^{-\frac{5}{3}}=$ $\quad 0.01^{-\frac{3}{2}}=$

Remarque : Il faut être prudent avec la formule $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$ quand $a < 0$. Il est alors nécessaire que q soit impair, sinon surviennent des contradictions. Par exemple :

$$(-1)^{\frac{3}{1}} = (-1)^3 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$$

$$(-1)^{\frac{3}{1}} = (-1)^{\frac{6}{2}} = \sqrt[2]{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$$

$$(-1)^{\frac{3}{1}} = (-1)^{\frac{6}{2}} = (\sqrt[2]{-1})^6 \quad \text{non défini}$$

Seul le premier des trois calculs précédents est correct.

Exemples 1.2 Simplifications

$$\frac{a^3 a^5}{a^{10}} = \frac{a^8}{a^{10}} = a^{-2} \qquad (x^3)^{10} x^{-5} = x^{30} x^{-5} = x^{25} \qquad \frac{y^3}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{y^3}{y^{\frac{2}{5}}} = y^{3-\frac{2}{5}} = y^{\frac{15-2}{5}} = y^{\frac{13}{5}} = y^{2.6}$$

Exercice 2 Simplifier au maximum

$$a^4 a^7 \qquad x^{12} x^{-2} \qquad \frac{y^5 y}{y^6} \qquad (z^3)^5 \qquad (b^{-4})^{-5} \qquad \frac{(c^4)^3}{c^{11}} \qquad \frac{1}{w^{-2}}$$

$$\frac{x^0 x^6}{(x^{-3})^2} \qquad (2xy)^3 x^5 \qquad \frac{a^2 b^3 c}{abc} \qquad \frac{(a^2 b)^{-3}}{(b^{-5})^2} \qquad \left(\frac{u^4}{u}\right)^2 \qquad \left(\frac{s}{t}\right)^3 s t^2 \qquad \left(\frac{u^5}{3u^2}\right)^2$$

$$\sqrt[3]{x^{15}} \qquad \sqrt[6]{x^3} \qquad (x^2)^{\frac{3}{5}} \qquad y^{\frac{7}{2}} y^{\frac{5}{6}} \qquad x^2 \sqrt[3]{x} \qquad \frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{2}{9}}} \qquad \frac{\sqrt{x^5}}{x^7}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \qquad \frac{\sqrt[3]{x^5}\sqrt{x^7}}{\sqrt[6]{x}} \qquad \frac{\sqrt[3]{2a}\sqrt{75b}\sqrt[3]{4a^{11}}}{\sqrt{3b^5}}$$

Bref rappel sur la notation scientifique

Un nombre est écrit en notation scientifique quand il se présente ainsi :

$a \cdot 10^z$ où a est un nombre décimal (positif ou négatif) tel que $1 \leqslant |a| < 10$
et z est un entier relatif

($|a|$ s'appelle la mantisse du nombre)

Exemples 1.3

$$7800 = 7.8\cdot 10^3 \qquad 0.000925 = 9.25\cdot 10^{-4} \qquad 30 = 3\cdot 10^1$$

$$9 = 9\cdot 10^0 \qquad 10000 = 1\cdot 10^4$$

Exercice 3

Convertir en notation scientifique (avec au plus 3 chiffres après la virgule)

45’000’000’000 = 0.000’000’553’469 =

−387.26 = −0.90098 =

Convertir en notation usuelle (écriture décimale) :

$-6.51 \cdot 10^{-3}$ = $2.99 \cdot 10^{5}$ =

Convertir en notation scientifique (avec au plus 3 chiffres après la virgule)

$44.754 \cdot 10^{13}$ = $-0.007 \cdot 10^{-12}$ =

$890 \cdot 10^{-15}$ = $0.05 \cdot 10^{17}$ =

Exercice 4

Classer du plus petit au plus grand :

A = 3’500’000’000
B = 35 milliards
C = $4 \cdot 10^{129} \cdot 9 \cdot 10^{-122}$
D = $0.0035 \cdot 10^{14}$

Quelques équations avec des puissances et des racines

Soit l'équation $x^r = a$, avec $a \neq 0$ et $r \neq 0$

Cette équation a pour solution : $x = a^{1/r}$, sauf dans les cas suivants :

si $a > 0$ et r est un nombre rationnel qui, sous forme de fraction réduite, possède un numérateur pair, alors $x = \pm a^{1/r}$

si $a < 0$ et r n'est pas un nombre rationnel qui, sous forme de fraction réduite, possède un numérateur impair et un dénominateur impair, alors l'équation n'a pas de solution.

Exemples 1.4

$a > 0$ et exposant à numérateur impair :
$x^{3/4} = 10 \quad \rightarrow \quad \sqrt[4]{x^3} = 10 \quad \rightarrow \quad x^3 = 10^4 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{10^4} = 10^{4/3} \approx 21.544$

$a > 0$ et exposant à numérateur pair :
$x^{2/3} = 10 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{x^2} = 10 \quad \rightarrow \quad x^2 = 10^3 \quad \rightarrow \quad x = \pm \sqrt[2]{10^3} = \pm 10^{3/2} \approx \pm 31.623$

$a < 0$ et exposant à numérateur impair et à dénominateur impair :
$x^{3/5} = -10 \quad \rightarrow \quad \sqrt[5]{x^3} = -10 \quad \rightarrow \quad x^3 = (-10)^5 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{(-10)^5} = (-10)^{5/3} \approx -46.416$

$a < 0$ et exposant dont le numérateur ou le dénominateur est pair :
$x^{3/2} = -1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^3} = -1$ n'a pas de solution, parce qu'une racine carrée ne peut pas être négative.

$a < 0$ et exposant dont le numérateur ou le dénominateur est pair :
$x^{2/3} = -1 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{x^2} = -1 \quad \rightarrow \quad x^2 = (-1)^3 = -1$ n'a pas de solution, parce qu'un carré ne peut pas être négatif.

Pour résoudre $x^{0.2} = -3$, il faut transformer 0.2 en fraction réduite, ce qui donne 1/5. Le numérateur et le dénominateur sont impairs, donc la solution est $(-3)^{1/0.2} = (-3)^5 = -243$

cas avec un exposant entier :

$x^3 = 15 \quad \rightarrow \quad x = 15^{1/3} = \sqrt[3]{15} \approx 2.466$

$x^4 = 10 \quad \rightarrow \quad x = \pm 10^{1/4} = \pm \sqrt[4]{10} \approx \pm 1.778$

$x^3 = -15 \quad \rightarrow \quad x = (-15)^{1/3} = \sqrt[3]{-15} \approx -2.466$

$x^4 = -10 \quad \rightarrow$ pas de solution

$$x^{-3} = 15 \quad \rightarrow \quad x = 15^{1/(-3)} = 15^{-1/3} = \frac{1}{15^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{15}} \approx \frac{1}{2.466} \approx 0.405$$

$$x^{-4} = 10 \quad \rightarrow \quad x = \pm 10^{1/(-4)} = \pm 10^{-1/4} = \frac{\pm 1}{10^{1/4}} = \frac{\pm 1}{\sqrt[4]{10}} \approx \frac{\pm 1}{1.778} \approx \pm 0.562$$

Exercice 5 Résoudre

a) $x^5=20$

b) $x^5=-20$

c) $x^{-5}=100$

d) $x^{-5}=-100$

e) $\sqrt[5]{x}=2$

f) $\sqrt[5]{x}=-2$

g) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}=10$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}=-10$

i) $\sqrt[3]{x^5}=4$

j) $\sqrt[3]{x^5}=-4$

k) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}=2$

l) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}=-2$

m) $x^6=300$

n) $\dfrac{1}{x^4}=3$

o) $\dfrac{1}{x^2}=-1$

p) $\sqrt{x}=9$

q) $\sqrt[4]{x}=8$

r) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=4$

s) $\sqrt[4]{x^3}=10$

t) $\sqrt[4]{x^3}=-10$

u) $\sqrt[3]{x^4}=10$

v) $x^{0.3}=6$

w) $x^{0.6}=-13$

x) $x^{-0.4}=5$

y) $\sqrt[10]{x}\cdot x^{1.7}\cdot(x^{2.6})^2=21$

z) $\dfrac{x^3\cdot\sqrt[5]{x}}{x^4}=0.7$

Compliquons un peu les équations !

Exemples 1.5

a)

$2\sqrt{x-1}+3=13$ Isolons d'abord la racine :

$\sqrt{x-1}=\dfrac{13-3}{2}=5$ c-à-d :

$(x-1)^{1/2}=5$ d'où :

$x-1=5^2=25$ et enfin :

$x=25+1=26$

b)

$3(x+1)^4-5=29995$ Isolons d'abord la puissance :

$(x+1)^4=\frac{29995+5}{3}=10000$ d'où :

$x+1=\pm 10000^{1/4}=\pm\sqrt[4]{10000}=\pm 10$

$x=-1\pm 10$ c-à-d :

$x_1=-1+10=9$ et $x_2=-1-10=-11$

<u>Exercice 6</u> Résoudre

a) $\sqrt{1-x}=4$

b) $\sqrt{x+5}=-12$

c) $2\sqrt{11-x}-27=13$

d) $-2\sqrt[3]{x}=10$

e) $3\sqrt[4]{5x-1}=7$

f) $\sqrt{x-9}+1.5=1.3$

g) $\sqrt[3]{5-x}=-0.8$

h) $4\sqrt{x}+5\sqrt{x}+2=17$

i) $\sqrt[3]{\frac{x}{5}}=2$

j) $\sqrt[3]{\frac{5}{x}}=2$

k) $3\sqrt{5x^2+3x+1}=21$

l) $\frac{1}{\sqrt[5]{x+2}}+8=7.4$

m) $7(x+1)^5+4=100$

n) $(3x-5)^4=157$

o) $2x^4+5=11$

p) $2x^4-5=-11$

q) $-2x^7+5=11$

r) $3x^{1.2}+1=5$

s) $x^{2/3}+23=3$

t) $(2x)^{3/2}=5$

u) $16.5x^{0.6}=1.97$

v) $(5x+3)^{0.75}=81$

w) $15(10-x)^6-13=59$

x) $5(3x)^4=371$

Exercice 7 Résoudre

a) $\sqrt[6]{5x^4-7}=2.5$

b) $\sqrt[6]{5x^4-7}=-2.5$

c) $\sqrt[3]{5x^4-7}=-2.5$

d) $\sqrt[3]{5x^4-7}=-1.5$

e) $(5x^4-7)^2=9$

f) $(5x^4-7)^2=144$

g) $(5x^4-7)^2=-144$

h) $(5x^4-7)^3=-144$

i) $(5x^3-7)^2=144$

j) $5(5x^3-7)^3-7=0$

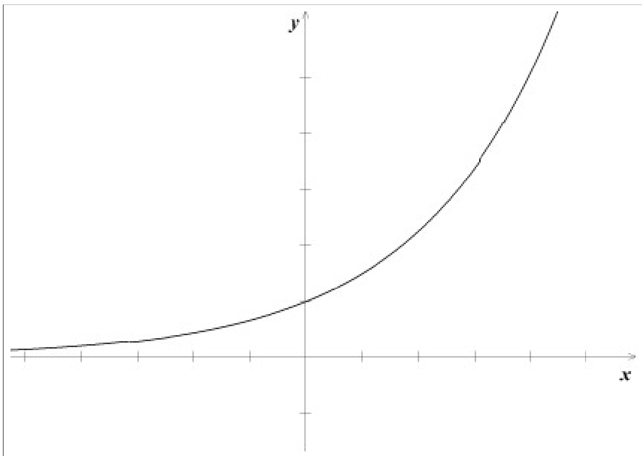
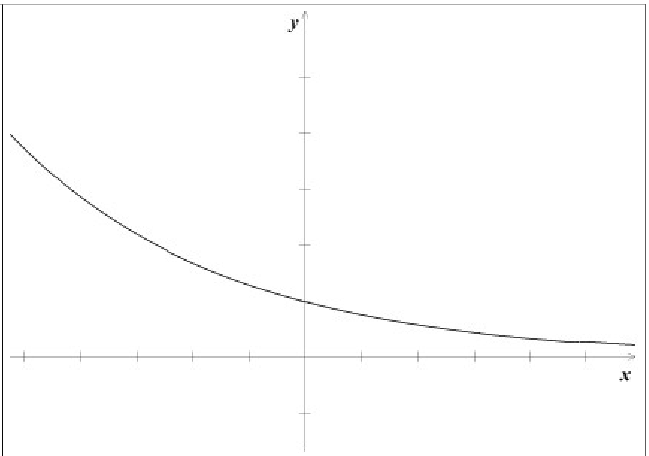
2. Fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont de la forme : $y=f(x)=a^x$ (avec $a>0$ et $a\neq 1$)

a s’appelle la <u>base</u>. On parle d’<u>exponentielle de base a</u>.

Une autre notation de a^x est $\exp_a(x)$

Graphiquement, nous obtenons :

	
a > 1	1 > a > 0
exponentielle croissante Si x → −∞, alors $a^x \to 0$ (asymptote horizontale à gauche y = 0) Si x → ∞, alors $a^x \to \infty$	exponentielle décroissante Si x → −∞, alors $a^x \to \infty$ Si x → ∞, alors $a^x \to 0$ (asymptote horizontale à droite y = 0)

<u>Remarque</u>

En posant $a=b^{-1}$ dans a^x , nous obtenons : $(b^{-1})^x$, c-à-d b^{-x} .

Or, si 1 > a > 0, alors b > 1.

En particulier : $0.5^x=2^{-x}$ $0.\overline{3}^x=3^{-x}$ $0.25^x=4^{-x}$ $0.2^x=5^{-x}$

Ainsi, toute exponentielle décroissante peut s’écrire b^{-x} , avec b > 1

Exercice 8

Soient les fonctions : $y = f(x) = 1.3^x$ et $y = g(x) = 0.7^x$

Compléter le tableau et représenter graphiquement ces deux fonctions

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)											
g(x)											

Une petite leçon de capitalisme

Soit un capital $C_0 = 15'000$ francs. Il est déposé sur un compte offrant un taux d'intérêt annuel de 2.25%. Exprimons ce taux sous forme décimale et notons-le *i* : $i = 0.0225$.
Au terme de chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital, ce qui l'augmente exponentiellement. On parle d'un dépôt à intérêts composés.

Au bout de la première année, il devient :
$C_1 = C_0 \cdot (1+i) = 15'000 \cdot (1+0.0225) = 15'337.50$ francs
Au bout de la deuxième année, il devient :
$C_2 = C_1 \cdot (1+i) = 15'337.50 \cdot (1+0.0225) = 15'682.59$ francs
Au bout de la troisième année, il devient :
$C_3 = C_2 \cdot (1+i) = 15'682.59 \cdot (1+0.0225) = 16'035.45$ francs
etc.

Il n'est pas difficile de voir que la formule générale est :

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1+i)^n}$$

Exercice 9

Un capital $C_0 = 15'000$ francs est déposé à intérêts composés sur un compte offrant un taux d'intérêt annuel de 2.25%. Quel sera le capital au bout de 10 ans ?

Exercice 10

Quel capital initial faut-il déposer à intérêts composés sur un compte offrant un taux d'intérêt annuel de 0.75%, pour avoir un capital de 50'000 francs au bout de 20 ans ?

Exercice 11

À quel taux d'intérêt annuel faut-il déposer un capital initial de 27'670 francs pour avoir au bout de 10 ans un capital de 30'000 francs ?

Exercice 12

À quel taux d'intérêt annuel faut-il déposer un capital pour qu'il double en 25 ans ?
[Indication : remplacer C_{25} par $2C_0$ dans la formule générale et simplifier les C_0]

Exercice 13

Isoler C_0 dans la formule générale.

Exercice 14

Isoler i dans la formule générale.

Exercice 15

Quel capital initial faut-il déposer à intérêts composés sur un compte offrant un taux d'intérêt annuel de 3.5%, pour avoir un capital de 26'000 francs au bout de
10 ans, 5 mois et 23 jours ?
[Indication : pour simplifier les calculs, une année bancaire comporte 12 mois de 30 jours, c'est-à-dire 360 jours. Ainsi, pour convertir ici la durée n en nombre décimal, il faut prendre : $n=10+\frac{5}{12}+\frac{23}{360}$]

Exercice 16

À quel taux d'intérêt annuel faut-il déposer un capital pour qu'il triple en
6 ans, 7 mois et 8 jours ?

*

Un placement à intérêts composés peut se faire d'une autre manière.
Comme avant, considérons un capital initial C_0 et un taux annuel i (exprimé sous forme décimale). Mais divisons l'année en n périodes. Un intérêt est ajouté au terme de chaque période et nous voulons connaître le capital au bout de x années, c'est-à-dire de nx périodes. La formule devient alors :

$$\boxed{C_{nx}=C_0\cdot\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nx}}$$

Exemple 2.1

Divisons l'année en 12 périodes d'un mois. Prenons un taux annuel incroyable de 32% et plaçons un capital initial de 7'000 francs. Quel est le capital au bout de 3 ans ?

Réponse : $C_{36}=7000\cdot\left(1+\frac{0.32}{12}\right)^{36}=18'053.39$ francs

Exemple 2.2

Avec un taux annuel encore plus incroyable de 100% et un capital initial de 1 franc, la formule devient :

$C_{nx}=(1+\frac{1}{n})^{nx}$ que l'on peut écrire aussi : $C_{nx}=\left[(1+\frac{1}{n})^{n}\right]^{x}$

Regardons ce que donne cette formule pour des valeurs de plus en plus grandes de n.

n	$\left[(1+\frac{1}{n})^{n}\right]^{x}$
1	2^x
10	2.59374246^x
100	2.70481383^x
1'000	2.71692393^x
10'000	2.71814593^x
100'000	2.71826824^x
1'000'000	2.71828047^x
10'000'000	2.71828169^x
100'000'000	2.71828182^x
1'000'000'000	2.71828183^x
10'000'000'000	2.71828183^x

Nous voyons que 1 franc, placé à 100% pendant x années, où chaque année est divisée en n périodes de comptabilisation des intérêts, donne un capital qui, pour n →∞, tend vers une exponentielle de base **2.7182818.......**

En hommage à Euler, cette base est notée **e**.

L'exponentielle de base e : e^x est parfois nommée exponentielle naturelle

Cette exponentielle joue un rôle très important en mathématiques et en physique.

Le nombre $e \approx 2.71828$ comporte une infinité de décimales. Il est irrationnel.

Exercice 17

Avec la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à la quatrième décimale :

$e^{2}=$ $e^{3}=$

$e^{3.5}=$ $e^{0.4}=$

$e^{-0.5}=$ $e^{-1.7}=$

$e^{-3}=$

3. Logarithmes

La solution de l'équation $x^3 = 60$ s'appelle « racine cubique de 60 »
ou « racine troisième de 60 »
ou « 60 puissance un tiers »

On peut la noter $\sqrt[3]{60}$
ou $60^{1/3}$
ou $rac_3(60)$
ou $root_3(60)$
ou root(60, 3)

Sa valeur arrondie au dixième est 3.9

*

La solution de l'équation $3^x = 60$ s'appelle « logarithme en base 3 de 60 »

de « logos » = raison
et de « arithmos » = nombre

On note cette solution $\log_3(60)$

Cherchons par tâtonnements sa valeur arrondie au dixième.

$3^3 = 27$ et $3^4 = 81$ donc 3 < x < 4

$3^{3.5} = 46.8$
$3^{3.6} = 52.2$
$3^{3.7} = 58.3$
$3^{3.8} = 65.0$

Ainsi $\log_3(60) \approx 3.7$

*

Plus généralement, le logarithme en base a de y est défini par l'équivalence suivante :

$$\boxed{\log_a(y) = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = y}$$

En d'autres termes, $\log_a(y)$ est la solution x de l'équation $a^x = y$.

Certains logarithmes peuvent être calculés à la main.

Exemples 3.1

$\log_{10}(1000)$ est la solution de l'équation $10^x = 1000$. Cette solution est $x = 3$.
Ainsi : $\log_{10}(1000) = 3$

$\log_5(25)$ est la solution de l'équation $5^x = 25$. Cette solution est $x = 2$.
Ainsi : $\log_5(25) = 2$

$\log_2(\frac{1}{16})$ est la solution de l'équation $2^x = \frac{1}{16}$.
Or $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$, donc cette solution est $x = -4$.
Ainsi : $\log_2(\frac{1}{16}) = -4$

$\log_7(\sqrt[3]{49})$ est la solution de l'équation $7^x = \sqrt[3]{49}$.
Or $\sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7^2} = 7^{2/3}$, donc cette solution est $x = 2/3$.
Ainsi : $\log_7(\sqrt[3]{49}) = 2/3$

Exercice 18 Calculer

a) $\log_{10}(100'000) =$
b) $\log_{10}(0.01) =$
c) $\log_{10}(1) =$
d) $\log_3(9) =$
e) $\log_3(27) =$
f) $\log_3(1/3) =$
g) $\log_3(\sqrt{3}) =$
h) $\log_3(1/\sqrt{3}) =$
i) $\log_2(32) =$
j) $\log_2(1/32) =$
k) $\log_2(\sqrt{32}) =$
l) $\log_2(1/\sqrt{32}) =$
m) $\log_4(32) =$
n) $\log_8(32) =$

L'invention des logarithmes remonte au 17e siècle. Le responsable de cette merveille destinée à simplifier de nombreux calculs (oui ! oui !) est un Écossais :

John Napier (ou Neper)

Les logarithmes sont principalement employés dans trois bases :

en base 2 : logarithmes binaires $\log_2(x)$
en base 10 : logarithmes décimaux $\log_{10}(x)$ ou noté simplement $\log(x)$
en base e : logarithmes naturels $\log_e(x)$ ou noté simplement $\ln(x)$

Les logarithmes binaires sont utilisés en musique et en informatique.
Les logarithmes décimaux sont utilisés en astronomie, en acoustique, en chimie, en sismologie, etc.
Les logarithmes naturels sont utilisés en physique, en chimie, en médecine, en épidémiologie, en dynamique des populations, en climatologie, etc.

Les calculatrices électroniques fournissent généralement les logarithmes décimaux et les logarithmes naturels, mais pas toujours les autres.

Pour obtenir un logarithme en base a à partir de logarithmes décimaux, nous pouvons utiliser la formule :

$$\boxed{\log_a(x)=\frac{\log(x)}{\log(a)}}$$

Exemple 3.2

$$\log_2(50)=\frac{\log(50)}{\log(2)}\approx 5.6439$$

Exercice 19 Calculer à l'aide d'une machine

a) $\log(20)=$
b) $\ln(20)=$
c) $\log_5(20)=$
d) $\log_7(4)=$
e) $\log_3(0.2)=$
f) $\ln(0.5)=$
g) $\log(e^3)=$
h) $\ln(e^3)=$

*

Les logarithmes ont beaucoup de propriétés. En voici une qui permet de convertir en notation scientifique une puissance à exposant élevé.

$$\boxed{\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)}$$

<u>Exemple 3.3</u>

Comment écrire 837^{246} en notation scientifique ?

Appelons N ce nombre et calculons d'abord $\log(N)$ à l'aide de la formule ci-dessus.

$$\log(N) = \log(837^{246}) = 246 \log(837) \approx 718.9904627$$

L'équivalence $\log_a(y) = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = y$,
avec $a = 10$, $y = N$ et $x = 718.9904627$, nous permet d'écrire :

$$N = 10^{718.9904627}$$

Décomposons 718.9904627 en 718 + 0.9904627. Il en découle :

$$N = 10^{718.9904627} = 10^{718+0.9904627} = 10^{0.9904627} \cdot 10^{718} = 9.7828 \cdot 10^{718}$$

Pas mal, non ?

<u>Exercice 20</u>

Écrire 763^{-524} en notation scientifique.

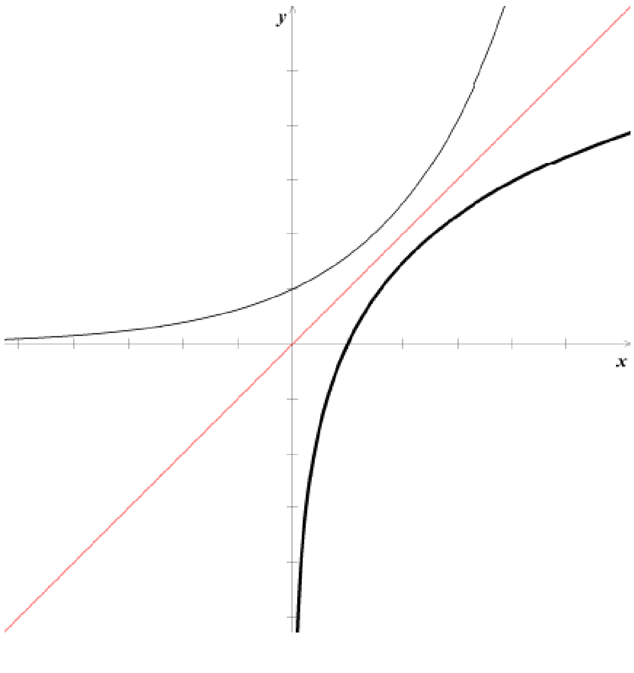
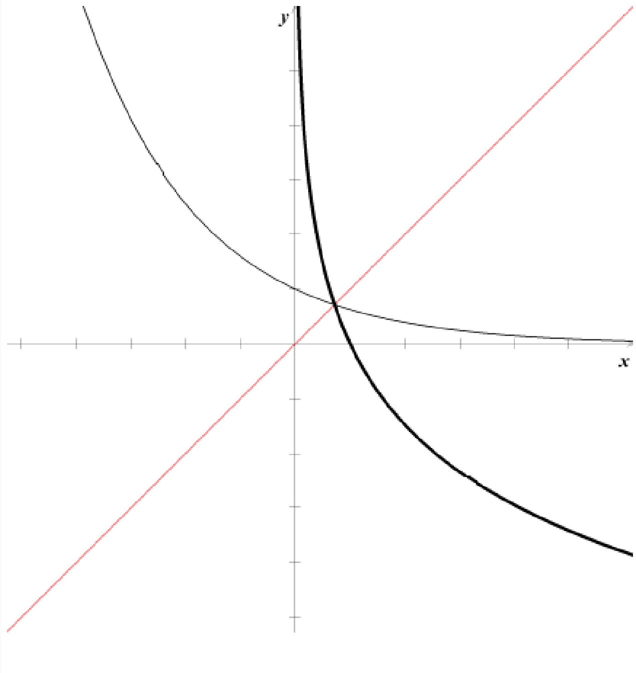
*

Sans les utiliser pour le moment, mentionnons quelques autres propriétés des logarithmes :

$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a) = 1$
$\log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$

*

Un logarithme en base a est la réciproque d'une exponentielle de base a.
Une explication détaillée de la notion de « réciproque » sera fournie plus tard. Pour le moment, contentons-nous de dire que le graphe d'un logarithme s'obtient en prenant le symétrique du graphe d'une exponentielle, selon un axe à 45° passant par l'origine.

	
a > 1	1 > a > 0
Domaine de définition : x > 0 logarithme croissant Si x → ∞, alors $\log_a(x) \to \infty$ Si x → 0+, alors $\log_a(x) \to -\infty$ (asymptote verticale x = 0)	Domaine de définition : x > 0 logarithme décroissant Si x → ∞, alors $\log_a(x) \to -\infty$ Si x → 0+, alors $\log_a(x) \to \infty$ (asymptote verticale x = 0)

Exercice 21

Soient les fonctions : $y = f(x) = 3 \cdot \log(7x + 28)$ et $y = g(x) = \ln(2x + 6)$

Compléter le tableau et représenter graphiquement ces deux fonctions

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)											
g(x)											

4. Équations exponentielles

Nous avons vu qu'un logarithme est la solution d'une équation exponentielle simple, plus précisément : $\log_a(y)$ est la solution x de l'équation $a^x = y$.

Cela nous permet de résoudre diverses équations où l'inconnue se trouve dans un exposant.

<u>Exemples 4.1</u>

$10^x = 13 \quad \rightarrow \quad x = \log_{10}(13) = \log(13) \approx 1.1139$

$e^x = 25 \quad \rightarrow \quad x = \log_e(25) = \ln(25) \approx 3.3189$

$3^x = 7 \quad \rightarrow \quad x = \log_3(7) = \frac{\log(7)}{\log(3)} \approx 1.7712$

$5 \cdot 7^x - 8 = 10 \quad \rightarrow \quad 7^x = \frac{10+8}{5} = 3.6 \quad \rightarrow \quad x = \log_7(3.6) = \frac{\log(3.6)}{\log(7)} \approx 0.6583$

$e^{2x+3} = 0.4 \quad \rightarrow \quad 2x + 3 = \log_e(0.4) = \ln(0.4) \quad \rightarrow \quad x = \frac{\ln(0.4) - 3}{2} \approx -1.9581$

<u>Exercice 22</u> Résoudre

a) $10^x = 137$

b) $10^x = -100$

c) $7^x = 12$

d) $e^x = 0.01$

e) $e^{2x} = 10$

f) $2^{-3x} = 5$

g) $2 \cdot 10^x = 50$

h) $3 \cdot e^{-x} = 7$

i) $2^{5-x} = 13$

j) $10^{4-5x} = 0.75$

k) $2 \cdot e^{1+2x} = 9$

l) $3.2 \cdot e^{-2.5x} = 70.13$

m) $3 \cdot e^{\sqrt{x}} + 1 = 22$

n) $\frac{1}{2^{1.73x}} = 10$

o) $\frac{15}{1 + 3 \cdot e^{-2x}} = 7$

p) $\sqrt[3]{10^{3x^2} - 5} = 4$

*

Et voici quelques équations plus compliquées qui demandent de l'astuce :

Exercice 23 Résoudre

a) $4^{x+1}\cdot 4^{x+6}=11$ b) $\dfrac{5^{3x-2}}{5^{7-x}}=2$ c) $8^{3x}=2^{2x-2}$

d) $9^{5x+1}=27^{2-4x}$ e) $\dfrac{1}{e^{3x+1}}=\dfrac{e^{-x}}{e^{x-5}}$ f) $2^{3x+1}=5^{x+2}$

g) $3^{2-x}=5^{4x-1}$ h) $10^{x}=23^{527}$ i) $e^{x+3}=123^{456}$

j) $47^{0.5-2x}=513^{824}$ k) $5e^{x}+13=7e^{x+2}$ l) $5^{2x}+3.8=19.2\cdot 5^{x}$

*

Revenons au capitalisme !

Il y a une chose que nous n'avons pas encore faite avec notre chère formule pour un placement à intérêts composés :

$$\boxed{C_n=C_0\cdot(1+i)^n}$$

où i est le taux d'intérêt annuel exprimé sous forme décimale
n est le nombre d'années du dépôt
C_0 est le capital initialement déposé
C_n est le capital au bout de n années de dépôt

Comment calculer la durée d'un placement ?

Exemple 4.2

Pendant combien de temps faut-il déposer un capital initial de 34'550 francs au taux d'intérêt annuel de 2.7% pour avoir à la fin un capital de 50'000 francs ?

Remplaçons les données dans la formule :

$50'000=34'550\cdot(1+0.027)^n$ Simplifions-la : $1.027^n=\dfrac{50'000}{34'550}\approx 1.447178$ d'où :

$$n\approx\log_{1.027}(1.447178)=\frac{\log(1.447178)}{\log(1.027)}\approx 13.873448 \quad \text{années}$$

Convertissons cette durée en années + mois + jours
(avec la convention : 1 année = 12 mois, 1 mois = 30 jours)

$0.873448\cdot 12=10.481376$ $0.481376\cdot 30=14.44128$

On obtient une durée de 13 ans + 10 mois + 14 jours

Exercice 24

Pendant combien de temps faut-il déposer un capital initial de 30’000 francs au taux d’intérêt annuel de 2.3% pour obtenir 5’000 francs d’intérêts (c’est-à-dire passer à un capital de 35’000 francs) ?

Exercice 25

Pendant combien de temps faut-il déposer un capital quelconque au taux d’intérêt annuel de 1.8% pour avoir à la fin un capital qui soit le double du capital initial ?

Exercice 26

Isoler *n* dans la formule $C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$

*

Un modèle ultra simpliste de croissance d’une population est :

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

où N_0 est la population de départ
a est une constante > 1
t est le temps

Exemple 4.3

Considérons la croissance d’une population de centaures. Posons le temps t en années et partons de l’hypothèse que la constante a vaut 1.618.

Si $N_0 = 40$, au bout de quel temps t aura-t-on $N(t) = 100$?

Il faut résoudre : $40 \cdot 1.618^t = 100$. On trouve : $1.618^t = \frac{100}{40} = 2.5$, d’où :
$t = \log_{1.618}(2.5) = \frac{\log(2.5)}{\log(1.618)} \approx 1.9$ ans, c-à-d environ 2 ans.

Exercice 27

Avec le même modèle et la même valeur de a , trouver le temps nécessaire pour qu’une population de centaures soit multipliée par 15.

*

Loi de croissance exponentielle

Dans plusieurs domaines (biologie, dynamique des populations, économie, etc.), des phénomènes sont modélisés par une loi exponentielle croissante :

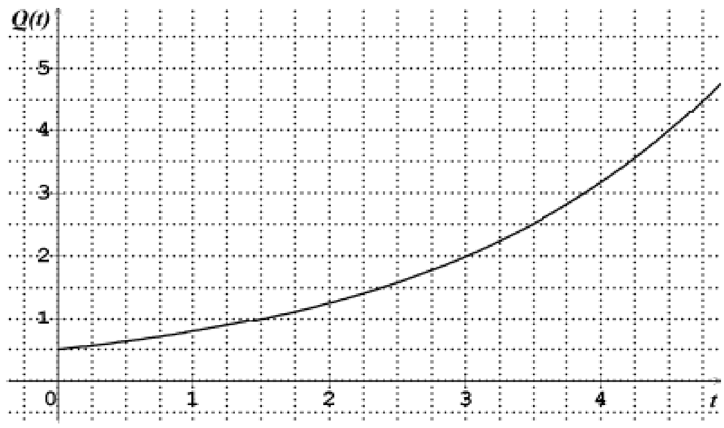
$Q(t)=Q_0 \cdot a^t$ où
- a est une constante > 1
- $t \geqslant 0$ est le temps
- Q_0 est la quantité initiale (quantité au temps zéro)
- $Q(t)$ est la quantité (variable) au temps t

Souvent, on préfère écrire une loi exponentielle croissante sous la forme :

$Q(t)=Q_0 \cdot e^{k \cdot t}$ où $e^k=a$, c'est-à-dire $k=\ln(a)$

Exemple 4.4

Voici le début du graphe de $Q(t)=0.5 \cdot 1.587^t=0.5 \cdot e^{0.462 \cdot t}$



*

La période de doublement d'une loi de croissance exponentielle est une durée T telle que :

$$\frac{Q(t+T)}{Q(t)}=2 \quad \text{pour tout} \quad t \geqslant 0$$

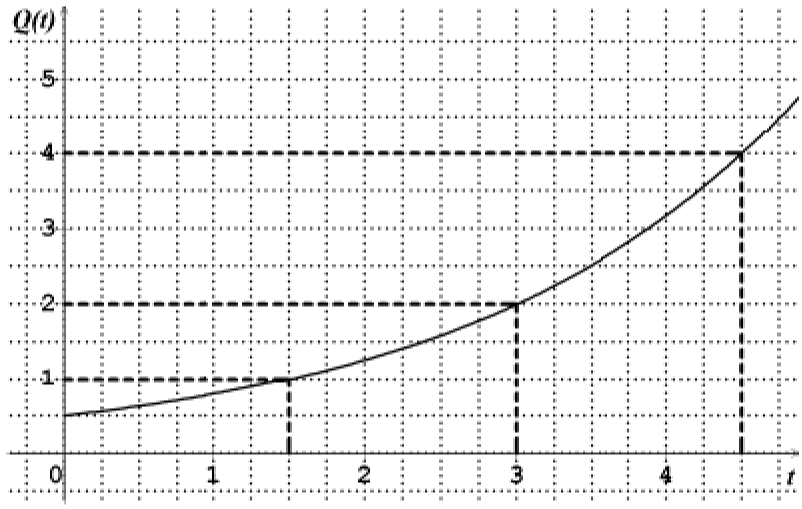
On peut la calculer ainsi : $\dfrac{Q(t+T)}{Q(t)}=\dfrac{Q_0 \cdot a^{t+T}}{Q_0 \cdot a^t}=a^T=2$

$$\text{Donc} \quad T=\log_a(2)$$

Et avec la forme $Q(t)=Q_0 \cdot e^{k \cdot t}$, nous obtenons : $T=\dfrac{\ln(2)}{k}$

Exemple 4.5

Voici à nouveau le début du graphe de $Q(t)=0.5\cdot 1.587^t=0.5\cdot e^{0.462\cdot t}$



Nous constatons graphiquement que la période de doublement est $T=1.5$

$$Q(T)=Q(1.5)=1=2\cdot 0.5$$
$$Q(2\mathrm{T})=Q(3)=2=2\cdot 1=2^2\cdot 0.5$$
$$Q(3\mathrm{T})=Q(4.5)=4=2\cdot 2=2^3\cdot 0.5$$

Par calcul : $T=\log_{1.587}(2)=1.5$ ou $T=\dfrac{\ln(2)}{0.462}=1.5$

Remarque : Nous avons toujours $Q(nT)=2^n\cdot Q_0$
Ainsi, par exemple, au bout d'un temps $7T$, la quantité atteint 128 fois Q_0

*

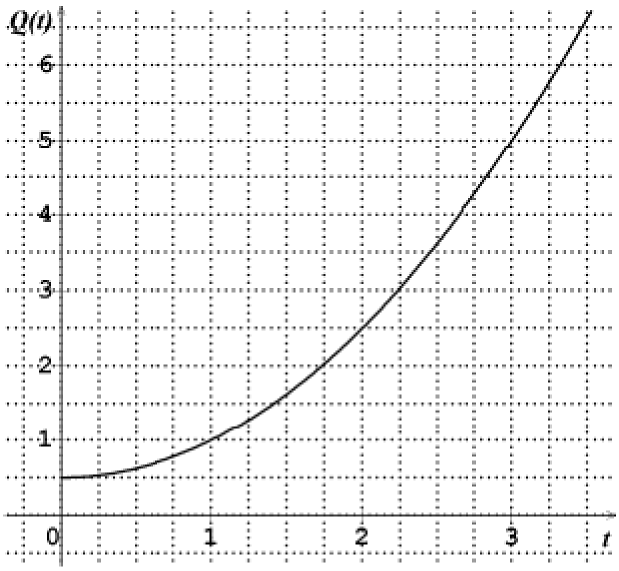
Ce phénomène de période constante de doublement ne se présente pas avec une loi de croissance non exponentielle.

Exemple 4.6

Soit une quantité $Q(t)$ qui croît en fonction du temps t selon la loi :

$$Q(t)=Q_0\cdot(1+t^2) \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0$$

Voici par exemple le graphe de cette loi pour $Q_0=0.5$:



Au bout de combien de temps Q_0 est-il multiplié par 2 ?

Algébriquement, nous pouvons faire ainsi : $2\cdot Q_0=Q_0\cdot(1+t^2)$ est équivalent à $2=1+t^2$ qui nous donne $t=1$

Graphiquement, nous voyons que c'est effectivement après un temps de 1 que la quantité atteint le double de la quantité initiale de 0.5, c'est-à-dire 1.

Par contre, au bout d'un temps d'une unité supplémentaire, la quantité n'est pas le double de 1, elle atteint 2.5. C'est au bout de 0.732 unité supplémentaire de temps que la quantité atteint 2. Et c'est ensuite au bout de 0.914 unité supplémentaire de temps que la quantité atteint 4.

Ici, la durée pour passer d'une certaine quantité au double de cette quantité varie au cours du processus, tandis qu'elle demeure constante pour une loi de croissance exponentielle.

Exercice 28

Une population de bactéries croît selon la loi : $Q(t)=100\cdot 1.8^t$,
où le temps t est exprimé en jours.

a) Quelle est la population initiale ?
b) Que donne k si nous voulons exprimer cette loi sous la forme : $Q(t)=100\cdot e^{k\cdot t}$?
c) Quelle est la période de doublement ?
d) Quelle est la population au bout de 13 périodes de doublement ?
e) Quelle est la période de triplement ?

Exercice 29

Une population de bactéries croît selon la loi : $Q(t)=500\cdot e^{0.8\cdot t}$,
où le temps t est exprimé en jours.

Calculer la période de doublement.

Exercice 30

Une population croît selon une loi exponentielle $Q(t)=Q_0\cdot a^t$.
Sachant que la période de doublement est 17 jours, calculer a .

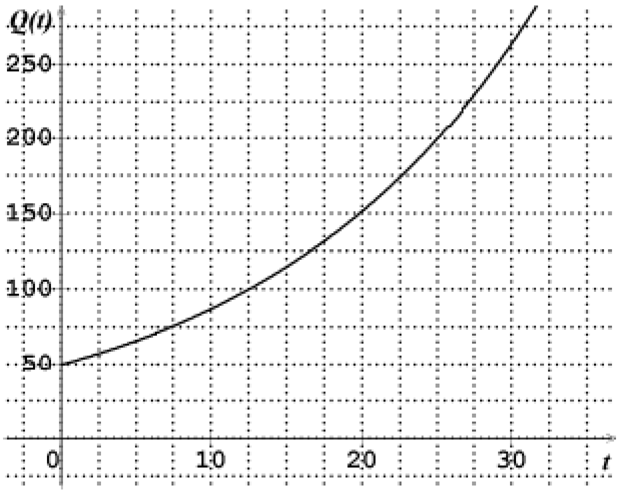
Exercice 31

Un capital croît selon une loi exponentielle $Q(t)=Q_0\cdot(1+i)^t$,
où le temps t est exprimé en années et où i est le taux d'intérêt annuel.

a) Si le taux vaut $i=1.25\%$, quelle est la période de doublement ?
b) Si la période de doublement vaut 20 ans, quel est le taux d'intérêt annuel ?
c) Si le taux vaut $i=2\%$, exprimer $Q(t)$ sous la forme $Q(t)=Q_0\cdot e^{k\cdot t}$.

Exercice 32

Le graphique suivant représente l'évolution exponentielle d'un capital placé à un taux d'intérêt annuel i . Trouver sur le graphique la période de doublement et exploiter cette valeur pour calculer i .



*

Loi de décroissance exponentielle

Dans plusieurs domaines (pharmacologie, radioactivité, électricité, etc.), des phénomènes sont modélisés par une loi exponentielle décroissante :

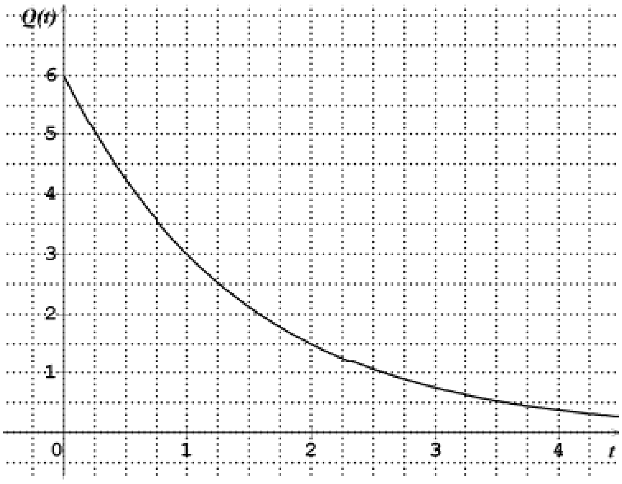
$Q(t)=Q_0 \cdot a^{-t}$ où a est une constante > 1
$t \geqslant 0$ est le temps
Q_0 est la quantité initiale (quantité au temps zéro)
$Q(t)$ est la quantité (variable) au temps t

Souvent, on préfère écrire une loi exponentielle décroissante sous la forme :

$Q(t)=Q_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ où $e^k=a$, c'est-à-dire $k=\ln(a)$

Exemple 4.7

Voici le début du graphe de $Q(t)=6\cdot 2^{-t}=6\cdot e^{-0.693\cdot t}$



*

La demi-vie d'une loi de décroissance exponentielle est une durée T telle que :

$$\frac{Q(t+T)}{Q(t)}=\frac{1}{2}=0.5 \quad \text{pour tout} \quad t\geqslant 0$$

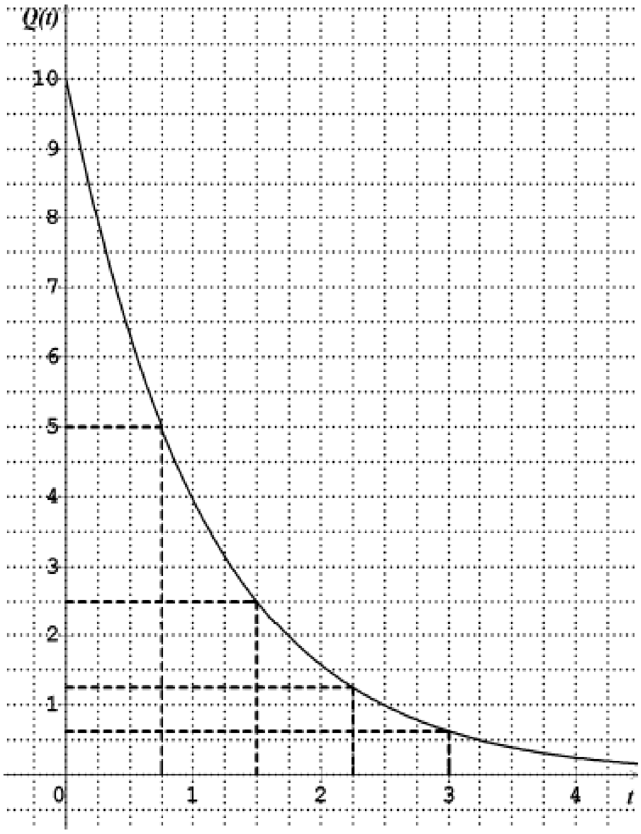
On peut la calculer ainsi : $\dfrac{Q(t+T)}{Q(t)}=\dfrac{Q_0\cdot a^{-(t+T)}}{Q_0\cdot a^{-t}}=a^{-T}=0.5$

Donc $T=-\log_a(0.5)=\log_a(2)$

Et avec la forme $Q(t)=Q_0\cdot e^{-k\cdot t}$, nous obtenons : $T=\dfrac{-\ln(0.5)}{k}=\dfrac{\ln(2)}{k}$

Exemple 4.8

Voici le début du graphe de $Q(t) = 10 \cdot 2.52^{-t} = 10 \cdot e^{-0.924 \cdot t}$



Nous constatons graphiquement que la demi-vie est $T = 0.75$

$$Q(T) = Q(0.75) = 5 = \frac{10}{2}$$
$$Q(2\mathrm{T}) = Q(1.5) = 2.5 = \frac{5}{2} = \frac{10}{2^2}$$
$$Q(3\mathrm{T}) = Q(2.25) = 1.25 = \frac{2.5}{2} = \frac{10}{2^3}$$
$$Q(4\mathrm{T}) = Q(3) = 0.625 = \frac{1.25}{2} = \frac{10}{2^4}$$

Par calcul : $T = \log_{2.52}(2) = 0.75$ ou $T = \dfrac{\ln(2)}{0.924} = 0.75$

Remarque : Nous avons toujours $Q(nT) = \dfrac{Q_0}{2^n}$

Ainsi, par exemple, au bout d'un temps $7T$, il ne reste plus que 0.78% de Q_0

*

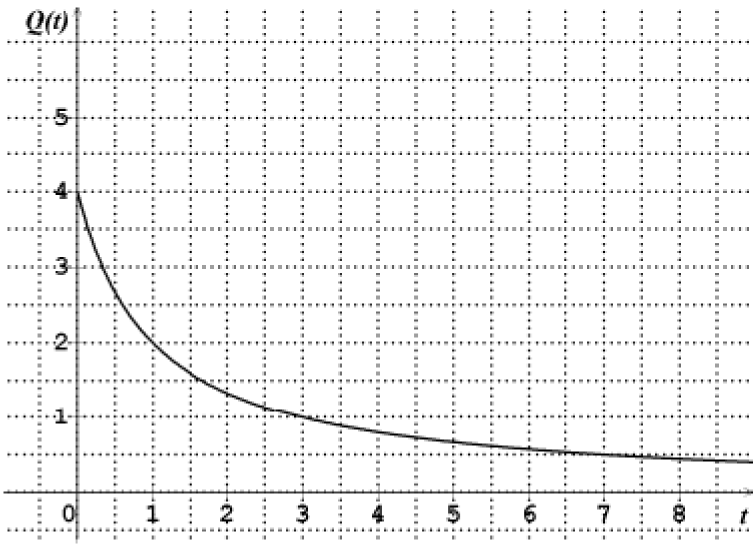
Ce phénomène de demi-vie constante ne se présente pas avec une loi de décroissance non exponentielle.

Exemple 4.9

Soit une quantité $Q(t)$ qui décroît en fonction du temps t selon la loi :

$$Q(t)=\frac{Q_0}{1+t} \qquad \text{pour} \quad t\geqslant 0$$

Voici par exemple le graphe de cette loi pour $Q_0=4$:



Au bout de combien de temps Q_0 est-il divisé par 2 ?

Algébriquement, nous pouvons faire ainsi : $\frac{Q_0}{2}=\frac{Q_0}{1+t}$ est équivalent à $2=1+t$ qui nous donne $t=1$

Graphiquement, nous voyons que c'est effectivement après un temps de 1 que la quantité restante vaut la moitié de la quantité initiale de 4, c'est-à-dire 2.

Par contre, au bout d'un temps d'une unité supplémentaire, la quantité restante n'est pas la moitié de 2, elle est de 1.33. Ce n'est qu'au bout de 2 unités supplémentaires de temps que la quantité restante est de 1. Et c'est ensuite au bout de 4 unités supplémentaires de temps que la quantité restante est de 0.5.

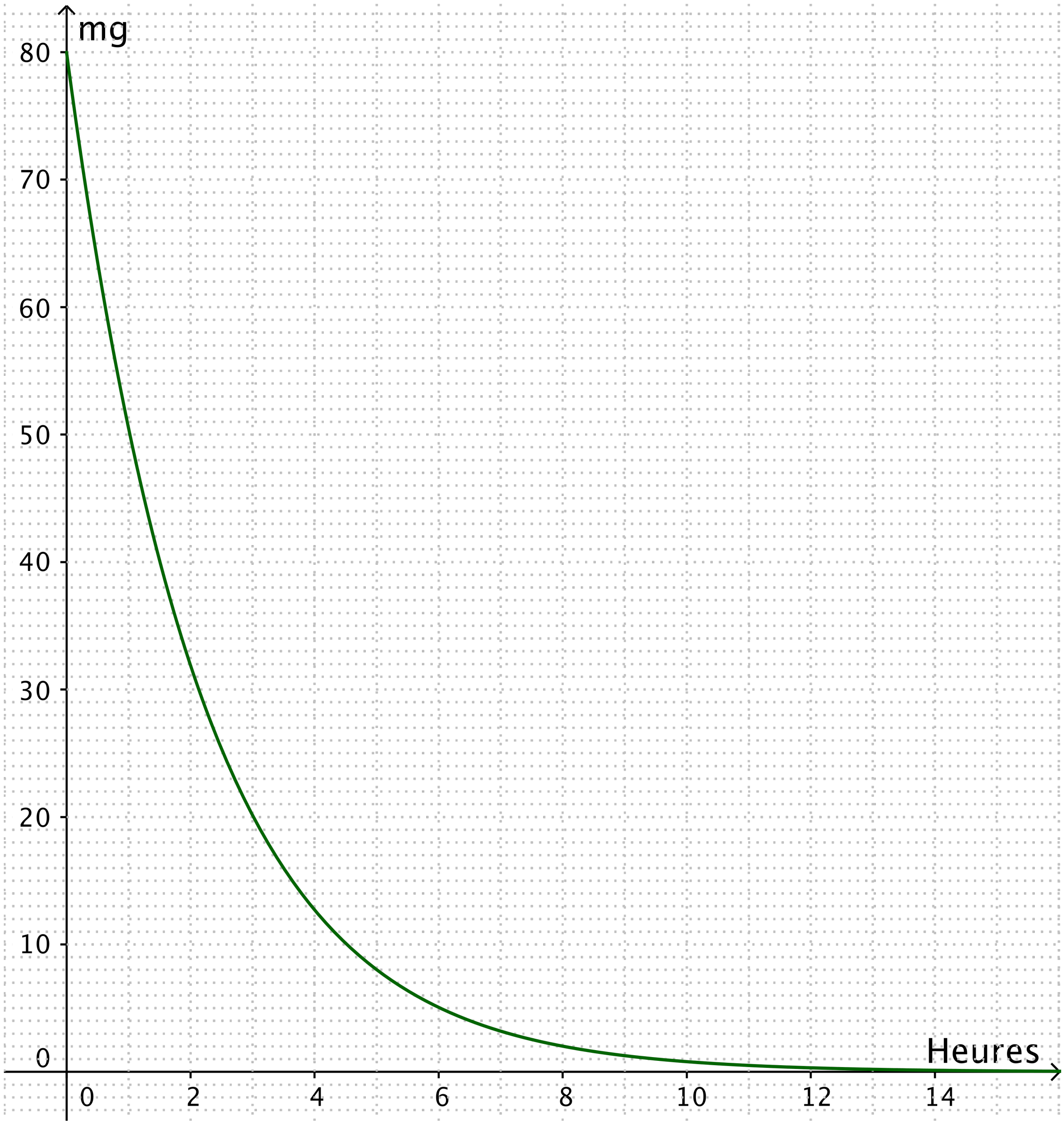
Ici, la durée pour passer d'une certaine quantité à la moitié de cette quantité varie au cours du processus, tandis qu'elle demeure constante pour une loi de décroissance exponentielle.

Exercice 33

On injecte une dose d'un médicament à un patient. La quantité présente dans le sang en fonction du temps est donnée par la fonction :

$Q(t)=Q_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ avec
$Q(t)$: la quantité de médication (en mg) au temps t
Q_0 : la quantité initiale de médicament en mg.
k : la constante caractéristique du médicament.
t : le temps, en heures

Voici le graphique de la fonction $Q(t)$:



a) Quelle est la quantité de médicament injecté au patient ?
b) Trouvez graphiquement la demi-vie de ce médicament.
c) Calculez la constante caractéristique du médicament.

Exercice 34

Pour le radium 228, la loi de décroissance radioactive est la suivante :

$$A(t) = A_0 e^{-0.103t}$$

où *t* est le temps en années
A(t) est l'activité au temps t
A_0 est l'activité initiale

a) L'activité d'un échantillon de radium 228 est de 500 désintégrations* par seconde. Calculer son activité 30 ans plus tard.
(*par « désintégration », on entend ici « transformation d'un neutron en proton, avec émission d'un électron » [radioactivité β^-])

b) Calculer la demi-vie (ou période) du radium 228, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que l'activité diminue de moitié.

Exercice 35

Une personne exposée à un gaz toxique tel que le VX ou le sarin doit recevoir l'injection d'une dose de 1 milligramme d'atropine. La quantité d'atropine dans le sang suit une loi de décroissance exponentielle :

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

où $Q(t)$ est la quantité au temps *t* (en heures), Q_0 la quantité initiale et *k* une constante.

La demi-vie de l'atropine, c'est-à-dire le temps nécessaire au métabolisme pour que la quantité dans le système sanguin diminue de moitié, est de 2 heures.

a) Calculer la constante *k*.

b) Utiliser ce résultat pour déterminer le temps nécessaire à l'élimination de 90% de l'atropine.

Indication : $e^{-kt} = \dfrac{Q(t)}{Q_0} = 10\% = 0.1$

c) Compléter le tableau suivant et esquisser la représentation graphique de la courbe.

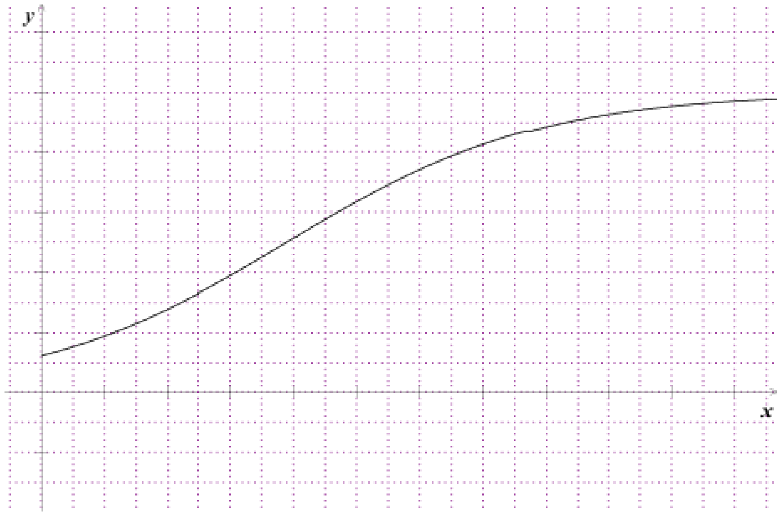
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Q(t)$										

d) Vérifier qu'une durée de 10 fois la demi-vie réduit la quantité d'atropine dans le système sanguin d'environ 99.9 %.

Les fonctions logistiques en épidémiologie

Les fonctions logistiques forment la catégorie la plus simple de fonctions qui permettent de modéliser l'évolution temporelle de la proportion de personnes infectées par un virus ou une bactérie.

Ces fonctions ont l'allure suivante :



La formule algébrique d'une fonction logistique est :

$f(x)=\dfrac{a}{1+b\cdot e^{-cx}}$ où x est le temps en jours.

La valeur $f(0)=\dfrac{a}{1+b}$ est le pourcentage de personnes infectées à un moment que nous décidons de fixer comme temps zéro. Prenons par exemple 2.5 %

Ainsi $\dfrac{a}{1+b}=2.5$ donc $a=2.5(1+b)$ si bien que : $f(x)=\dfrac{2.5(1+b)}{1+b\cdot e^{-cx}}$

Cette fonction comporte une asymptote horizontale en $y=2.5(1+b)$. Posons cette valeur égale à 100 %, d'où :

$b=\dfrac{100}{2.5}-1=39$ de sorte que : $f(x)=\dfrac{100}{1+39\cdot e^{-cx}}$

Nous ne connaissons pas la valeur de c. Supposons : $c=0.024$

Exercice 36

Au bout de combien de jours, la proportion de personnes infectées sera-t-elle de

a) 5 % b) 50 % c) 75 % d) 90 %

Quelques autres lois exponentielles

En changeant les lettres, la formule de décroissance exponentielle : $Q(t)=Q_0 e^{-kt}$ s'applique aussi

à la pression atmosphérique : $P(h)=P_0 \cdot e^{-\alpha h}$
(où $P(h)$ représente la pression atmosphérique à l'altitude h)

à la loi de refroidissement de Newton : $T(t)=T_0 \cdot e^{-ct}$
(où $T(t)$ représente la température au temps t d'un objet mis à refroidir dans un milieu à température plus basse)

à la loi de Beer-Lambert : $I(x)=I_0 \cdot e^{-cx}$
(où $I(x)$ représente l'intensité d'un faisceau lumineux à une profondeur x sous le niveau de la mer ou d'un lac)

à la loi d'un courant électrique dans un circuit RL en série : $I(t)=I_0 \cdot e^{-Rt/L}$
(où $I(t)$ représente l'intensité du courant au temps t)

etc.

Nous avons aussi :

La loi d'Antoine sur la pression $P(T)$ d'une vapeur en fonction de sa température :

$$P(T)=e^{a+\frac{b}{c+T}}$$

La loi de von Bertalanffy sur la longueur $L(A)$ d'un poisson (d'une espèce donnée) en fonction de son âge :

$$L(A)=p(1-q e^{-rA})$$

etc.

Exercice 37

a) Isoler T dans la loi d'Antoine.

b) Isoler A dans la loi de Bertalanffy.

5. Équations logarithmiques

L'équivalence : $\log_a(u)=v \quad \leftrightarrow \quad u=a^v$
permet de résoudre bon nombre d'équations logarithmiques.

Exemples 5.1

$\log_2(x)=3.5 \quad \to \quad x=2^{3.5}\approx 11.3137$

$\log_5(x)=-0.7 \quad \to \quad x=5^{-0.7}\approx 0.3241$

$\log(x)=1.3 \quad \to \quad x=10^{1.3}\approx 19.9526$

$\ln(x)=-1 \quad \to \quad x=e^{-1}\approx 0.3679$

$5\cdot\log_2(x)+1=4 \quad \to \quad \log_2(x)=\frac{4-1}{5}=\frac{3}{5} \quad \to \quad x=2^{3/5}\approx 1.5157$

$\ln(3x-2)=1.8 \quad \to \quad 3x-2=e^{1.8} \quad \to \quad x=\frac{e^{1.8}+2}{3}\approx 2.6832$

Exercice 38 Résoudre

a) $\log_{16}(x)=1.25$

b) $\ln(x)=3.4$

c) $\log(x)=-2.05$

d) $\log_x(13)=3$

e) $\log_x(13)=-5$

f) $\log_x(13)=\frac{5}{4}$

g) $\log_x(13)=2$

h) $4\log(5x)=9$

i) $3\ln(2x+1)=7$

j) $\log_2(1-x)+2=5$

k) $\log(-x)=-3$

l) $\sqrt{\ln(x)}=1.5$

m) $\log(5x+7)=-1$

n) $(\log_7(x)+2)^3=125$

o) $-4\ln(3x-5)+7=8$

p) $\log(\sqrt{x}+1.3)=0.11$

q) $\ln(5-3e^{2x})=0.9$

r) $\frac{1}{4-2\log(7x+6)}=3$

*

Une autre équivalence : $\log_a(u)=\log_a(v) \quad \leftrightarrow \quad u=v$
(avec la condition $u>0$ et $v>0$)
permet de résoudre de nouvelles équations logarithmiques, surtout si on prend en compte des propriétés comme :

$$\log_a(u)+\log_a(v)=\log_a(uv) \qquad \log_a(u)-\log_a(v)=\log_a\left(\frac{u}{v}\right)$$

Exemples 5.2

a) $\log(2x-5)=\log(x-3) \quad \rightarrow \quad 2x-5=x-3 \quad \rightarrow \quad x=2$

mais cette valeur est à rejeter, car, pour $x=2$, $2x-5<0$ et $x-3<0$

donc l'équation n'a pas de solution.

b) $\log(x+3)+\log(5)=\log(x+8) \quad \rightarrow \quad \log((x+3)\cdot 5)=\log(x+8) \quad \rightarrow$

$(x+3)\cdot 5=x+8 \quad \rightarrow \quad 5x+15=x+8 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-7}{4}=-1.75$

c) $\ln(2x+4)=2+\ln(x-3) \quad \rightarrow \quad \ln(2x+4)-\ln(x-3)=2 \quad \rightarrow$

$\ln\left(\frac{2x+4}{x-3}\right)=2 \quad \rightarrow \quad \frac{2x+4}{x-3}=e^2 \quad \rightarrow \quad 2x+4=(x-3)\cdot e^2 \quad \rightarrow$

$2x+4=e^2\cdot x-3\cdot e^2 \quad \rightarrow \quad 2x-e^2\cdot x=-3\cdot e^2-4 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-3\cdot e^2-4}{2-e^2}\approx 4.8556$

Exercice 39 Résoudre

a) $\log(5x+4)=\log(2x+17)$

b) $\ln(x-2)+\ln(10)=\ln(3x+5)$

c) $\log(x+7)-\log(5)=\log(x+1)$

d) $\ln(x-4)-\ln(2)=\ln(3-x)$

e) $\log(15x-6)-\log(3)=\log(x+4)+\log(2)$

f) $\ln(2x+9)-\ln(x-7)=3$

g) $\log(2x+11)-1.5=\log(x+6)$

h) $\log_5(2x-1)+\log_5(x+3)=1$

i) $\log_2(1-5x)+\log_2(x)=\log_2(0.1-2x)$

j) $\ln(x^2+5x-1)+\ln(3)=2\ln(3x)$

Une formule qui fait du bruit

Gustav Fechner (un philosophe et savant du 19e siècle) est à l'origine de l'idée suivante : l'écart subjectif entre deux sensations serait proportionnel au logarithme du rapport des grandeurs physiques les provoquant. Appliquée à l'acoustique, cette idée a donné la formule suivante :

$L=100+20\log\left(\frac{p}{2}\right)$ où p est la pression du son en pascals [Pa]

et L le niveau sonore en décibels [dB]

Par exemple, pour une pression de $2\cdot 10^{-3}$ Pa, le niveau sonore est de :
$L=100+20\log\left(10^{-3}\right)=100+20\cdot(-3)=100-60=40$ dB

Remarque : la formule donnée correspond au système SPL (Sound Pression Level). Il existe aussi un système SIL (Sound Intensity Level), basé sur l'intensité *I* en W/m^2, qui définit une autre échelle de décibels à partir de la formule $L_i=120+10\log(I)$.

Exercice 40

a) Isoler p dans la formule $L=100+20\log\left(\frac{p}{2}\right)$

b) Compléter le tableau suivant :

SON	**Pression p [Pa]**	**Niveau L [dB] (SPL)**
Seuil de l'audition		0
Chambre à coucher calme, de nuit		30
Conversation normale à une distance de 1 m	$2\cdot 10^{-2}$	
Aspirateur à une distance de 1 m	$6.3\cdot 10^{-2}$	
Camion diesel à une distance de 10 m		90
Tronçonneuse à une distance de 1 m		110
Seuil de la douleur	63	
Avion à réaction à une distance de 50 m	200	

c) Considérons deux sons, l'un de pression p_1 et de niveau L_1, l'autre d'intensité p_2 et de niveau L_2. Nous avons donc :

$L_1 = 100 + 20\log\left(\frac{p_1}{2}\right)$ et $L_2 = 100 + 20\log\left(\frac{p_2}{2}\right)$

Écrire une formule qui soit la plus simple possible pour $L_1 - L_2$

d) Compléter :

Si le rapport $\frac{p_1}{p_2}$ vaut 2, alors la différence $L_1 - L_2$ vaut ....

Si la différence $L_1 - L_2$ vaut 20, alors le rapport $\frac{p_1}{p_2}$ vaut ....

<u>Quel est l'âge de ce crâne ?</u>

La datation au carbone 14 repose sur le fait que la quantité présente de cet isotope radioactif dans un os diminue à partir de la mort selon une loi connue. Plus précisément, cette quantité est divisée par deux tous les 5734 ans (avec une marge d'erreur de 40 ans).

Dès lors, l'âge A d'un vieil os (jusqu'à 50'000 ans) peut être évalué en mesurant sa concentration C en carbone 14 :

C = (quantité de carbone 14) / (quantité totale de carbone).

La formule donnant A en fonction de C est :

$$A = -8272\ln\left(C \cdot 10^{12}\right)$$

<u>Exercice 41</u>

a) Si, pour un tibia trouvé dans une fouille archéologique, la concentration C vaut $3 \cdot 10^{-13}$, quel est environ l'âge de ce tibia ?

b) Quelle est la concentration C d'un crâne vieux de 25'000 ans ?

c) Isoler C dans la formule.

Le réapprentissage selon Ebbinghaus

Au 19e siècle, Hermann Ebbinghaus se livra à des expériences sur la mémorisation et l'oubli. L'une des expériences se déroulait ainsi :

Il avait préparé de très nombreuses séries de 13 syllabes (sans signification).
Il en prenait une au hasard et la lisait à haute voix au rythme de 150 unités à la minute.
Après une pause de 15 secondes, une seconde lecture commençait.
Et ainsi de suite.

Il ne s'arrêtait qu'au moment où il pouvait réciter de mémoire la série complète.
Il notait le temps t_1 qu'avait nécessité cet apprentissage.

Après une durée T passée à faire autre chose, il recommençait la même tâche avec la même série et notait le temps t_2 que nécessitait ce réapprentissage.

Comme la mémoire avait gardé une trace du premier apprentissage, le temps t_2 était inférieur au temps t_1.

L'économie E de temps en % était $E=\frac{t_1-t_2}{t_1}\cdot 100$.

Il fit de même avec beaucoup d'autres séries de syllabes, en variant la durée T séparant l'apprentissage du réapprentissage.

Il construisit ainsi le graphique de E en fonction de T et chercha une formule qui rendrait compte de cette courbe.

Il trouva la formule suivante :

$$E=\frac{100\cdot 1.84}{(\log(60T))^{1.25}+1.84}$$ (pour une durée T en heures ≥ 1/60)

Exercice 42

a) Compléter le tableau suivant et tracer une représentation graphique
de la « courbe de l'oubli ».

T	0.25	0.5	1	5	10	20	30	40	50	60	100
E											

b) Trouvée la durée T pour que l'économie de temps descende à 10%.

Quelques autres lois logarithmiques

En chimie, le **pH d'une substance** a été défini comme l'opposé du logarithme décimal de la concentration des ions d'hydrogène (en moles/litre). La définition actuelle est plus compliquée.

En astronomie, la **magnitude apparente** m d'une étoile est définie par la loi de Pogson :

$m = -2.5\log(E) + c$, où E est l'éclat ou l'éclairement de l'étoile
et c est une constante d'étalonnage

En sismologie, la **magnitude d'un séisme** a été définie comme le logarithme décimal de l'amplitude maximale observée sur un sismographe d'un certain type à une distance de 100 km de l'épicentre. La définition actuelle est plus compliquée.

En thermodynamique, l'**entropie** S d'un système a été définie par :

$S = k_B \ln(\Omega)$, où k_B est la constante de Boltzmann
et Ω une grandeur compliquée mesurant
un nombre de configurations microscopiques

6. Problèmes supplémentaires

Exercice 43

La magnitude apparente m et la magnitude absolue M d'une étoile sont des grandeurs liées à sa luminosité. La formule suivante les relie à la distance d (en années-lumière) qui sépare une étoile de la Terre :

$$m - M = 5\log\left(\frac{d}{3.2616}\right) - 5$$

Rigel est une étoile de la constellation d'Orion. Sa magnitude apparente m vaut 0.12 et sa magnitude absolue M vaut −7. Calculer la distance d (arrondie au dixième).

Exercice 44

Le 28 mai 2019, un séisme de magnitude 4.2 secoue la région de Montreux. La magnitude M et l'énergie E (en joules) d'un tremblement de terre sont liées par la formule suivante :

$$M = \frac{\log(E) - 4.4}{1.5}$$

a) Calculer la magnitude (arrondie au dixième) d'un séisme dont l'énergie est de $1.5 \cdot 10^{15}$ joules.

b) Calculer l'énergie du séisme de Montreux le 28 mai 2019 (réponse en notation scientifique en arrondissant au 3^{e} chiffre après la virgule).

Exercice 45

Dans certaines conditions, la température d'un café diminue selon la formule suivante :

$$T(t) = (T_0 - T_{ambiante}) \cdot e^{-0.08t} + T_{ambiante}$$

avec :

T_0	température initiale du café (en °C)
$T_{ambiante}$	température ambiante dans l'endroit où se trouve la tasse de café (en °C)
t	temps en minutes
$T(t)$	température du café après t minutes (en °C)

Supposons que la température ambiante est de 18°C et la température initiale du café de 60°C.

a) Quelle sera la température du café après 5 minutes ? [arrondir la réponse au degré]

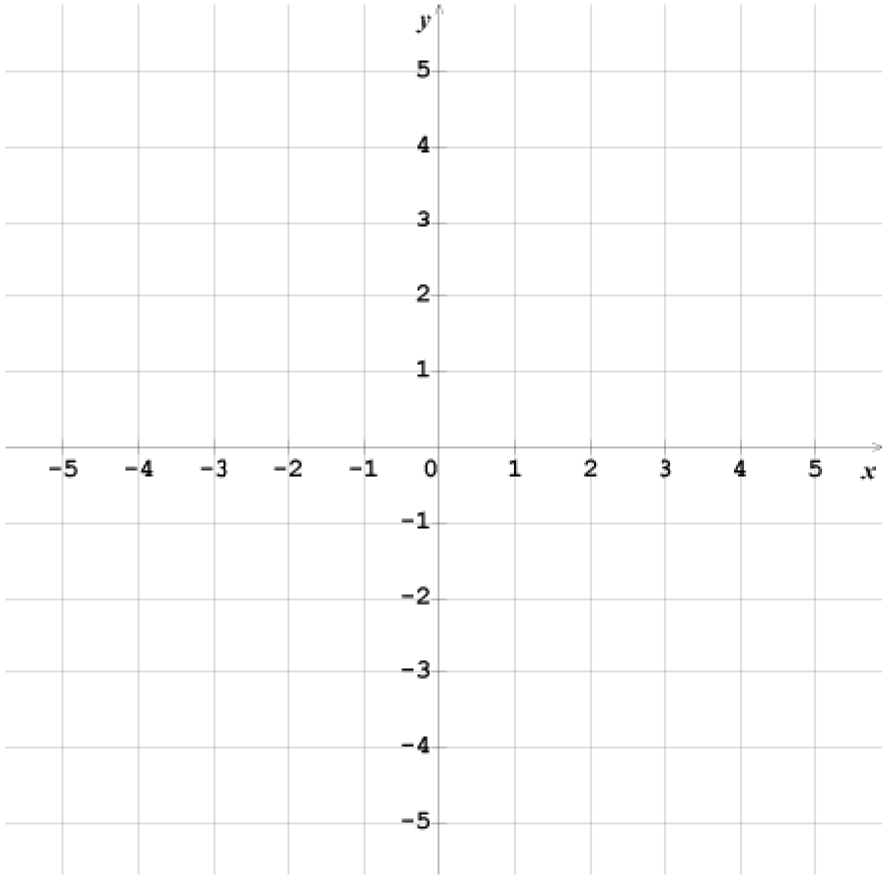
b) Au bout de combien de temps la température du café descendra-t-elle à 40°C ? [convertir la réponse en minutes + secondes]

Exercice 46

Soit la fonction définie par $f(x) = \ln(0.5x + 2)$

a) Compléter le tableau de valeurs (au dixième près) et représenter avec précision la courbe de la fonction *f* dans le repère ci-dessous.

x	*f*(x)
−3.9	
−3.5	
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	



b) D'après le graphique, quelle est approximativement la valeur de x pour laquelle *f*(x) égale 1. Répondre à 0.1 près et montrer la valeur sur le graphique.

c) À l'aide d'une équation, calculer au millième près la solution de la question b).

Exercice 47

La loi de décroissance radioactive est la suivante :

$$A(t)=A_0 e^{-kt}$$

où *t* est le temps en années
A(t) est l'activité au temps t
A_0 est l'activité initiale
k est une constante

Sachant que le radium 226 a une demi-vie de 1'590 ans, calculer la constante *k*.

Exercice 48

Dans un placement à intérêts composés, un capital est soumis à un taux d'intérêt annuel négatif $i=-0.5\%$. Au bout de combien de temps ce capital sera-t-il divisé par 3 ?

Exercice 49

Considérons deux placements à intérêts composés.

Dans le placement A, un capital initial de 1'000 francs est soumis au taux d'intérêt annuel de 2 %.

Dans le placement B, un capital initial de 600 francs est soumis au taux d'intérêt annuel de 3 %.

Au bout de combien de temps, les deux capitaux atteindront-ils la même valeur ?

Exercice 50 *Équations simples, mais diaboliques...*

Résoudre :

a)	$\sqrt{x}=\sqrt{5}$	S = {5}
b)	$x^2=5^2$	S = {−5 ; 5}
c)	$\sqrt{x^2}=\sqrt{5^2}$	S = {−5 ; 5}
d)	$(\sqrt{x})^2=(\sqrt{5})^2$	S = {5}
e)	$(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[3]{5})^2$	S = {−5 ; 5}
f)	$10^x=10^5$	S = {5}
g)	$10^{(x^2)}=10^{(5^2)}$	S = {−5 ; 5}
h)	$(10^x)^2=(10^5)^2$	S = {5}
i)	$2\cdot\log(x)=2\cdot\log(5)$	S = {5}
j)	$\log(x^2)=\log(5^2)$	S = {−5 ; 5}
k)	$(\log(x))^2=(\log(5))^2$	S = {0.2 ; 5}
l)	$(-1)^x=(-1)^5$	S={toutes les fractions avec un numérateur impair et un dénominateur impair}

Remarques

1. Les équations i) et j) ne sont pas équivalentes en dépit de la formule $\log(u^v)=v\cdot\log(u)$, car celle-ci n'est valable que pour u > 0.

2. Une fonction *f* est dite <u>injective</u> quand, pour tout nombre a situé dans son domaine de définition, l'équation $f(x)=f(a)$ possède pour unique solution $x=a$.
Les fonctions $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, 10^x , e^x , $\log(x)$, $\ln(x)$ sont injectives.
Les fonctions x^2 , x^4 , $\sqrt[3]{x^2}$, $\sin(x)$ ne sont pas injectives.

7. Intervalles infinis & inéquations

Intervalles infinis

Outre R qui peut être écrit comme l'intervalle]−∞ ; +∞[, il y a 4 types d'intervalles infinis

[a ; +∞[= l'ensemble des réels x ≥ a
]a ; +∞[= l'ensemble des réels x > a
]−∞ ; a] = l'ensemble des réels x ≤ a
]−∞ ; a[= l'ensemble des réels x < a

Notons que :

du côté où se trouve +∞ ou −∞, le crochet est toujours orienté vers l'extérieur

du côté où se trouve a, le crochet est orienté vers l'intérieur quand on a le signe ≥ ou ≤, et il est orienté vers l'extérieur quand on a le signe > ou <

Dans [2 ; +∞[, le nombre 2 fait partie de l'intervalle (c'est son élément le plus petit)

Dans]2 ; +∞[, le nombre 2 ne fait pas partie de l'intervalle (cet intervalle n'a pas de plus petit élément)

Inéquations du premier degré

Une inéquation du 1^er^ degré se résout comme une équation du 1^er^ degré, à la différence qu'une multiplication ou une division par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

La solution d'une inéquation sera donnée sous forme d'intervalle.

Exemples 7.1

I.

$$\begin{aligned} 2x+1 &\leqslant 0 \\ 2x &\leqslant -1 \\ x &\leqslant -\frac{1}{2} \\ x &\in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} -4-3x &> 0 \\ -3x &> 4 \\ x &< -\frac{4}{3} \\ x &\in \left]-\infty ; -\frac{4}{3}\right[\end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} 2x+5 &< 3x+12 \\ 2x-3x &< 12-5 \\ -x &< 7 \\ x &> -7 \\ x &\in]-7 ; +\infty[\end{aligned}$$

Exercice 51

Résoudre chaque inéquation, et donner le résultat sous forme d'intervalle.

a) $5x+7<3$

b) $-2x-9\geqslant 1$

c) $4-10x\leqslant 0$

d) $3x+8>-x+1$

e) $-4x-5\leqslant 6x$

f) $\frac{x}{2}+7>3$

g) $5-\frac{x}{4}>11$

8. Étudier des fonctions

(*plus particulièrement des fonctions puissances, exponentielles et logarithmiques*)

Domaine et ensemble des images

Soit une fonction réelle f donnée par une égalité y = f(x)

Pour un x donné, l'éventuel y correspondant s'appelle l'image de x

Pour un y donné, les éventuels x dont y est l'image s'appellent les pré-images de y

Exemples 8.1

a) f : $y=\sqrt{x-1}$

L'image de 5 est $y=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2$

L'image de 10 est $y=\sqrt{10-1}=\sqrt{9}=3$

0 n'a pas d'image, car $\sqrt{0-1}=\sqrt{-1}$ n'est pas réel

La pré-image de 7 est le x qui vérifie $7=\sqrt{x-1}$. Il faut résoudre cette équation.

$$x-1=7^2=49$$

$$x=50$$

La pré-image de 8 est le x qui vérifie $8=\sqrt{x-1}$. Il faut résoudre cette équation.

$$x-1=8^2=64$$

$$x=65$$

−2 n'a pas de pré-image, car il n'existe aucun x pour lequel $-2=\sqrt{x-1}$
(une racine carrée n'est jamais négative)

b) g : $y=x^2+3$

L'image de 4 est $y=4^2+3=16+3=19$

L'image de 5 est $y=5^2+3=25+3=28$

Les pré-images de 67 sont les x qui vérifient $67=x^2+3$. Il faut résoudre cette équation.

$$x^2=67-3=64$$

$$x=\pm\sqrt{64}=\pm 8$$

1 n'a pas de pré-image, car l'équation $1=x^2+3$ est équivalente à $x^2=-2$ qui n'a pas de solutions réelles.

Exercice 52

a) Soit f : $y=3\sqrt{5-x}$. Trouver, si c'est possible :

- a1) L'image de −31
- a2) L'image de 1
- a3) L'image de 21
- a4) La pré-image de 24
- a5) La pré-image de −6

b) Soit g : $y=(x+5)^2+7$. Trouver, si c'est possible :

- b1) L'image de −20
- b2) Les pré-images de 151
- b3) Les pré-images de 3

c) Soit h : $y=2\log(3x-8)$. Trouver, si c'est possible :

- c1) L'image de 54
- c2) L'image de 2
- c3) La pré-image de 5
- c4) La pré-image de −1

d) Soit i : $y=3\,e^{-2x}$. Trouver, si c'est possible :

- d1) L'image de 0.7
- d2) L'image de −0.8
- d3) La pré-image de 15
- d4) La pré-image de −3

Cas particuliers

L'image de 0 s'appelle l'ordonnée à l'origine de la fonction.
Les pré-images de 0 s'appellent les zéros de la fonction.

Suite de l'exercice 52 Pour chacune des fonctions données, calculer l'ordonnée à l'origine et les zéros.

*

Soit une fonction réelle f donnée par une égalité y = f(x)

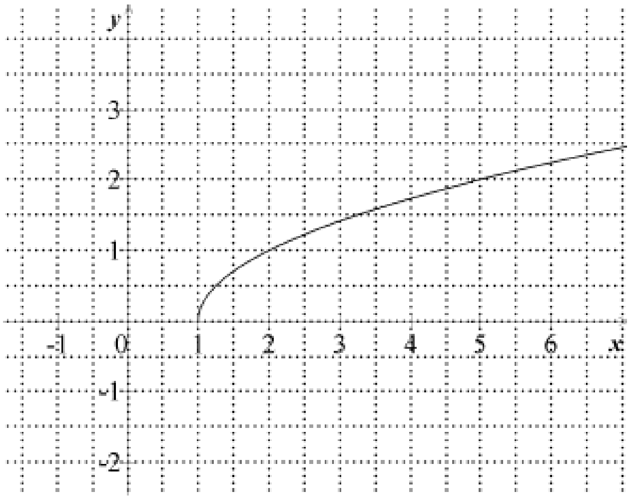
Le domaine de f, noté Dom(f) ou D_f,
est l'ensemble de tous les x réels qui possèdent une image.

L'ensemble des images de f, noté Im(f),
est l'ensemble de tous les y réels qui possèdent au moins une pré-image.

Exemples 8.2

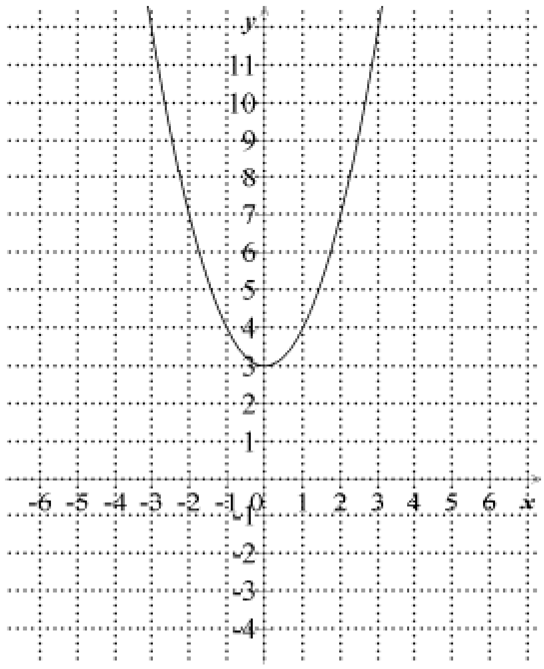
f : $y=\sqrt{x-1}$

Dom(f) = [1 ; +∞[(tous les x ≥ 1)
Im(f) = [0 ; +∞[(tous les y ≥ 0)



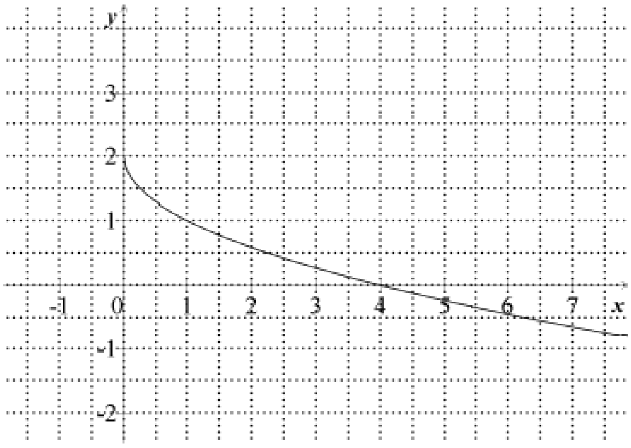
g : $y=x^2+3$

Dom(g) = R (tous les réels)
Im(g) = [3 ; +∞[(tous les y ≥ 3)



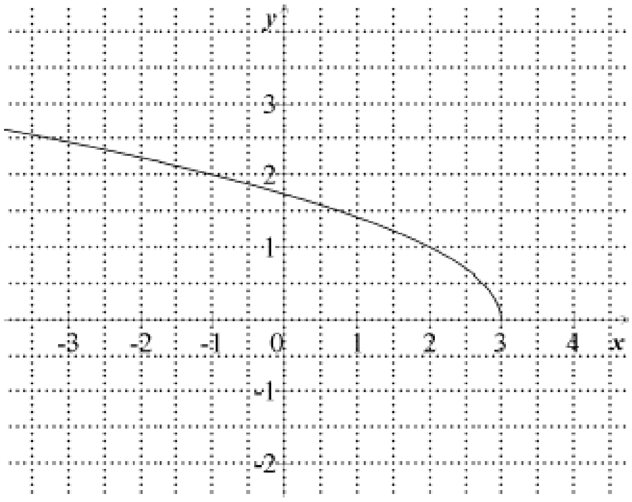
h : $y=2-\sqrt{x}$

Dom(h) = [0 ; +∞[(tous les x ≥ 0)
Im(h) =]−∞ ; 2] (tous les y ≤ 2)



i : $y=\sqrt{3-x}$

Dom(i) =]−∞ ; 3] (tous les x ≤ 3)
Im(i) = [0 ; +∞[(tous les x ≥ 0)



Quelques domaines :

Le domaine d'une fonction de la forme $y=\sqrt{u(x)}$
s'obtient en résolvant l'inéquation $u(x)\geqslant 0$

Le domaine d'une fonction de la forme $y=\log_a(u(x))$
s'obtient en résolvant l'inéquation $u(x)>0$

Le domaine d'une fonction de la forme $y=C\cdot a^{kx}$ est R

Exemples 8.3

a) f : $y=\sqrt{x-1}$

x − 1 ≥ 0 ↔ x ≥ 1 ↔ x dans l'intervalle [1 ; +∞[, donc Dom(f) = [1 ; +∞[

b) g : $y=\sqrt{3-x}$

3 − x ≥ 0 ↔ 3 ≥ x ↔ x dans l'intervalle]−∞ ; 3], donc Dom(g) =]−∞ ; 3]

c) h : $y=\log(x+3)$

x + 3 > 0 ↔ x > −3 ↔ x dans l'intervalle]−3 ; +∞[, donc Dom(h) =]−3 ; +∞[

d) i : $y=\ln(4-x)$

4 − x > 0 ↔ 4 > x ↔ x dans l'intervalle]−∞ ; 4[, donc Dom(i) =]−∞ ; 4[

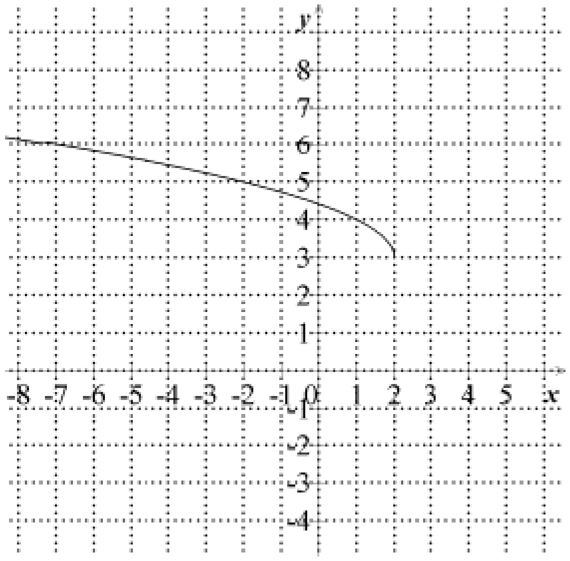
Exercice 53 Trouver le domaine

a) f : $y=\sqrt{x+8}$ b) g : $y=\sqrt{-9-x}$

c) h : $y=\log(x-5)$ d) i : $y=\ln(2x-6)$

e) j : $y=\log(-7-x)$ f) k : $y=\ln(5-2x)$

<u>Exercice 54</u> D'après les graphiques suivants, donner le domaine, l'ensemble des images, l'ordonnée à l'origine et les zéros.

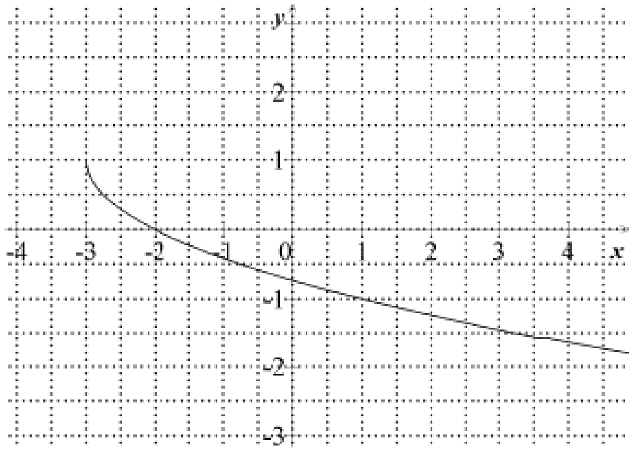


Dom(f) =

Im(f) =

OàO =

Zéros =

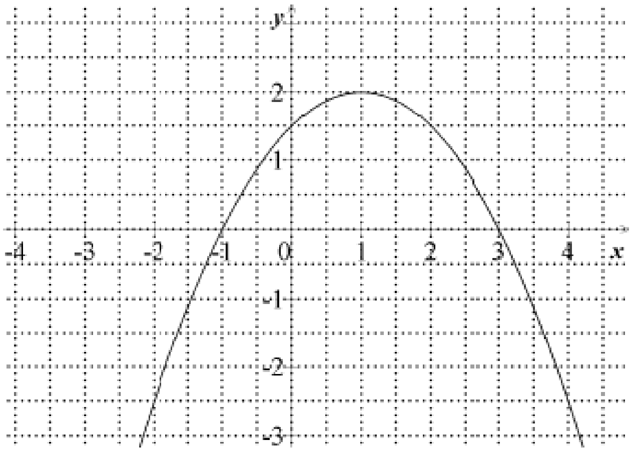


Dom(g) =

Im(g) =

OàO =

Zéros =

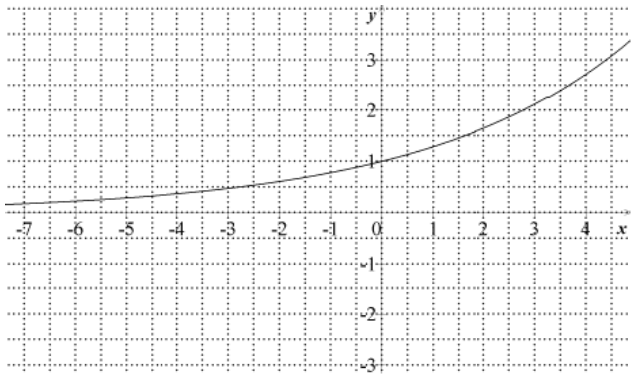


Dom(h) =

Im(h) =

OàO =

Zéros =



Dom(i) =

Im(i) =

OàO =

Zéros =

Réciproque

Soit une fonction réelle f donnée par une égalité y = f(x)

Si on échange x et y et s'il est possible d'isoler y de manière à obtenir de l'autre côté de l'égalité une expression unique en x, la fonction fabriquée de la sorte s'appelle la réciproque de f. On la note f^{-1}.

Exemples 8.4

a) f : $y=x+3$

Échanger x et y : $x=y+3$
Isoler y : $y=x-3$ Cette égalité définit f^{-1}.

b) g : $y=2x$

Échanger x et y : $x=2y$
Isoler y : $y=\frac{x}{2}$ Cette égalité définit g^{-1}.

c) h : $y=3x+4$

Échanger x et y : $x=3y+4$
Isoler y : $y=\frac{x-4}{3}$ Cette égalité définit h^{-1}.

d) i : $y=\sqrt{x-3}+2$

Échanger x et y : $x=\sqrt{y-3}+2$
Isoler y : $\sqrt{y-3}=x-2$
$y-3=(x-2)^2$
$y=(x-2)^2+3$ Cette égalité définit i^{-1}.

e) j : $y=10^x$

Échanger x et y : $x=10^y$
Isoler y : $y=\log(x)$ Cette égalité définit j^{-1}.

f) k : $y=\ln(4-3x)$

Échanger x et y : $x=\ln(4-3y)$
Isoler y : $4-3y=e^x$
$-3y=e^x-4$
$y=\frac{e^x-4}{-3}=\frac{4-e^x}{3}$ Cette égalité définit k^{-1}.

g) l : $y=3\cdot 10^{-5x}$

Échanger x et y : $x=3\cdot 10^{-5y}$

Isoler y : $10^{-5y}=\frac{x}{3}$

$-5y=\log\left(\frac{x}{3}\right)$

$y=\frac{-\log\left(\frac{x}{3}\right)}{5}$ Cette égalité définit l $^{-1}$.

<u>Exercice 55</u> Donner la réciproque

a) f : $y=5-4x$

b) g : $y=x^{2/3}$

c) h : $y=4-\sqrt{3-5x}$

d) i : $y=\frac{3x+2}{5x-7}$

e) j : $y=8+\log(4x-1)$

f) k : $y=\ln(5x+2)-4$

g) l : $y=-2\cdot e^{4x+3}$

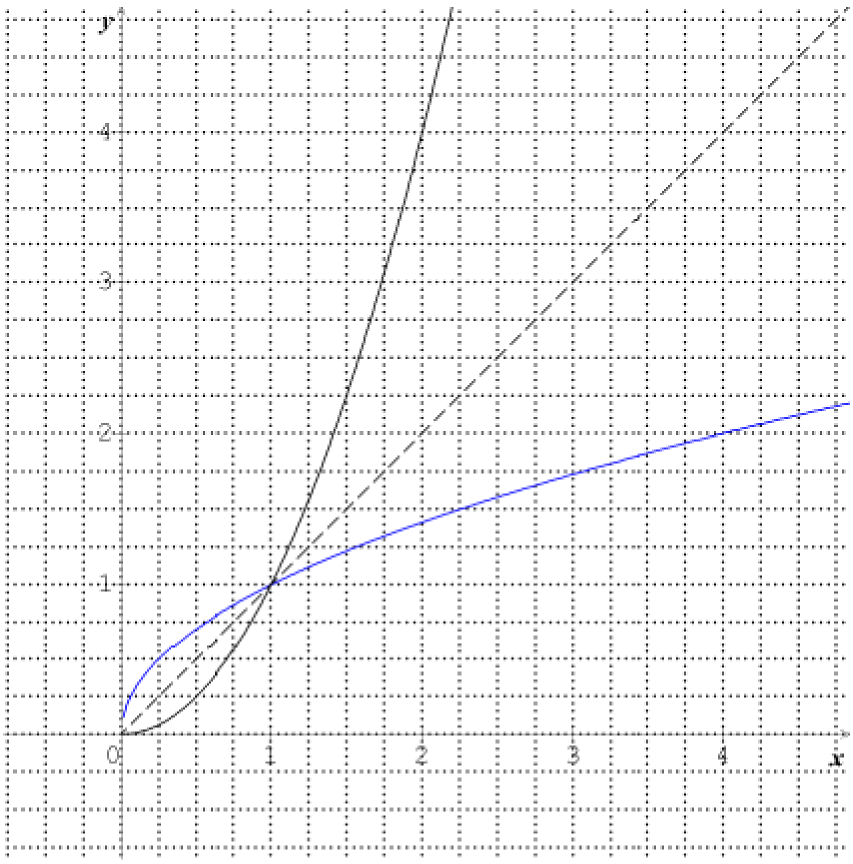
h) m : $y=5\cdot 10^{7-2x}$

*

Si une fonction f possède une réciproque f^{-1}, alors le graphe de f^{-1} s'obtient à partir du graphe de f en effectuant une symétrie axiale selon l'axe y = x (droite à 45°, partageant équitablement les quadrants I et III). Il faut toutefois préciser que la réciproque doit parfois être restreinte : l'ensemble des valeurs de x permises pour f^{-1} est l'ensemble des images de f.

Exemple 8.5

La réciproque de f : $y=\sqrt{x}$ est f^{-1} : $y=x^2$ (restreinte aux réels positifs)



Exercice 56 Soit f : $y=0.45\,x^{1.65}$

a) Trouver sa réciproque
b) Remplir le tableau :

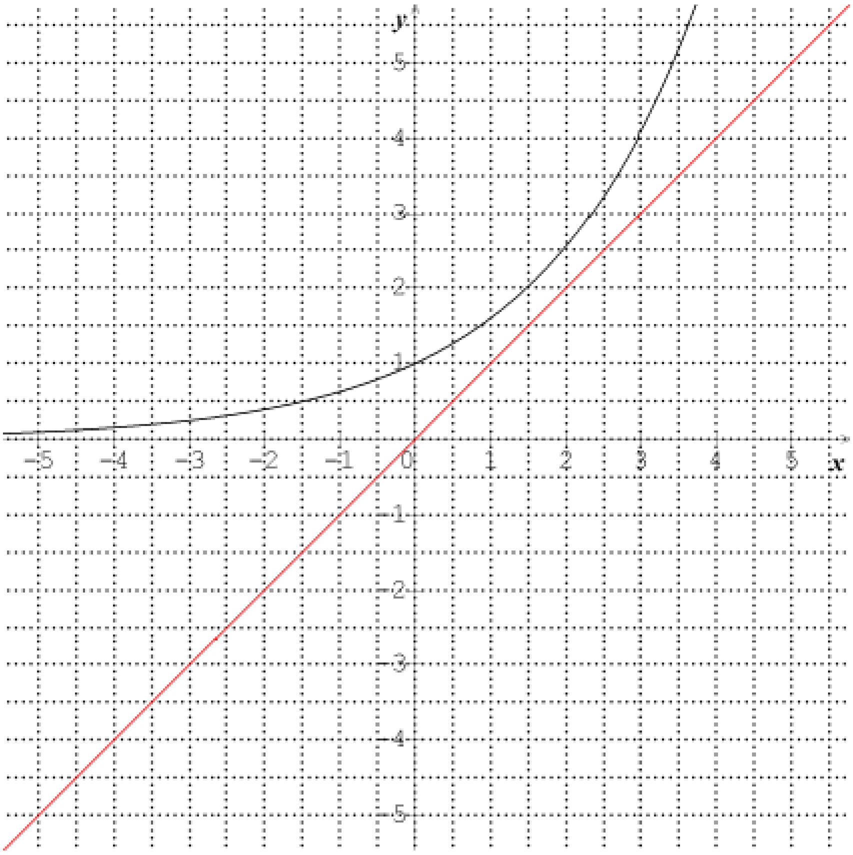
x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x)$											
$f^{-1}(x)$											

c) Représenter graphiquement f , f^{-1} et l'axe oblique à 45°

Exercice 57

Voici le graphe de l'exponentielle de base 1.6 : f : $y = 1.6^x$
et d'une droite à 45°

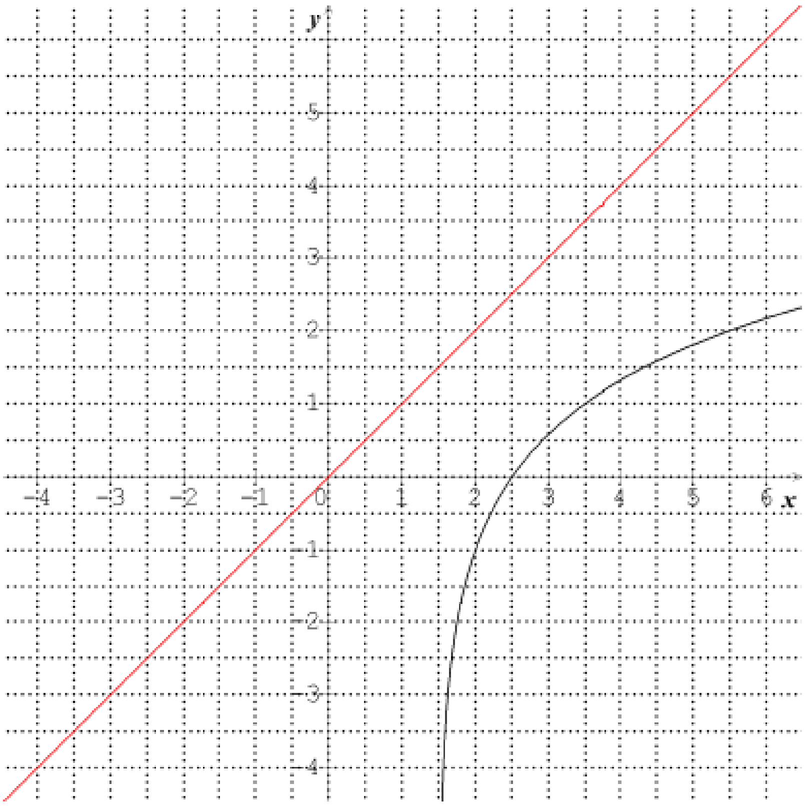
Au moyen de la symétrie d'axe à 45°, représenter approximativement la réciproque de f.
Donner aussi l'expression algébrique de cette réciproque.



Exercice 58

Voici le graphe de : f : $y = \log_2(x - 1.5)$ et d'une droite à 45°

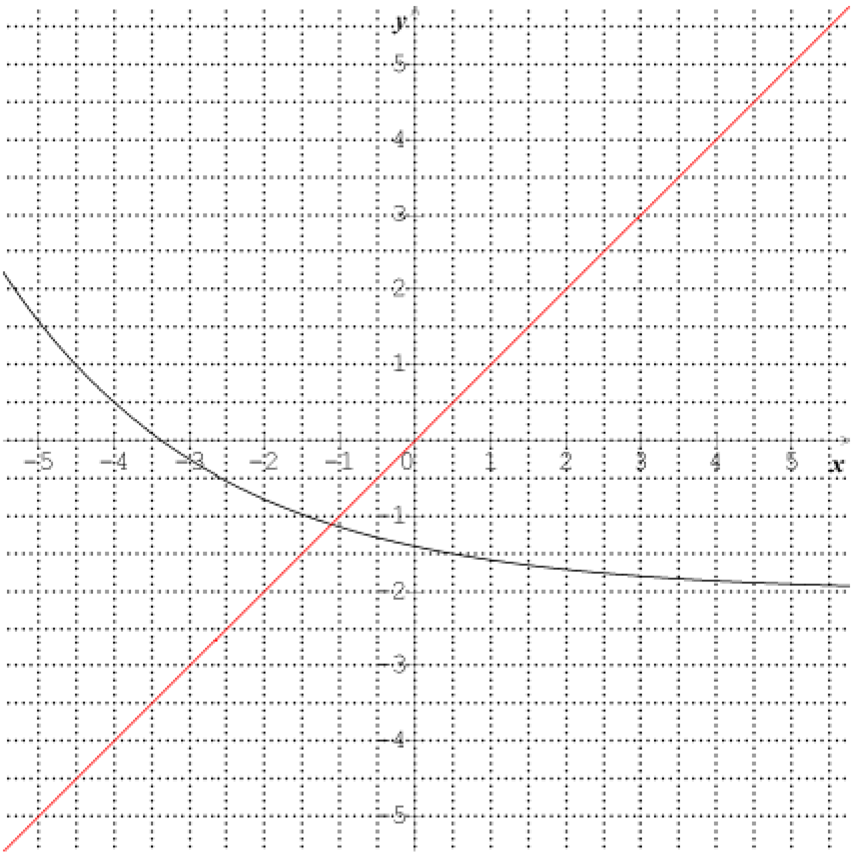
Au moyen de la symétrie d'axe à 45°, représenter approximativement la réciproque de f.
Donner aussi l'expression algébrique de cette réciproque.



Exercice 59

Voici le graphe de : f : $y=0.6 \cdot 0.7^{x}-2$ et d'une droite à 45°

Au moyen de la symétrie d'axe à 45°, représenter approximativement la réciproque de f.
Donner aussi l'expression algébrique de cette réciproque.



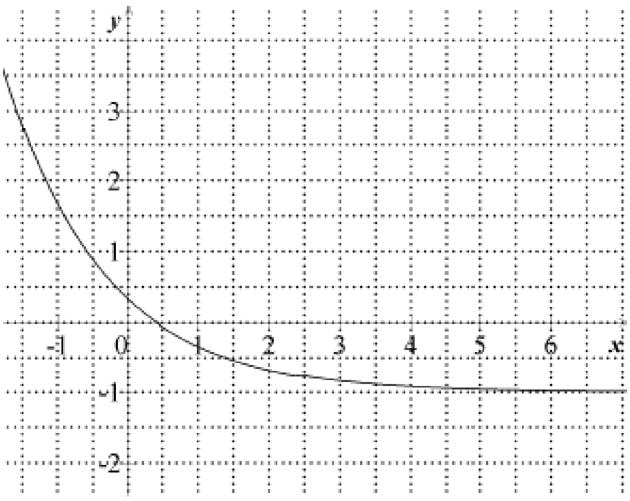
Asymptotes des fonctions exponentielles et logarithmiques

Les fonctions de la forme : $y = C \cdot a^{px+q} + D$
ont une asymptote horizontale en $y = D$
(à gauche ou à droite, selon les valeurs des paramètres)

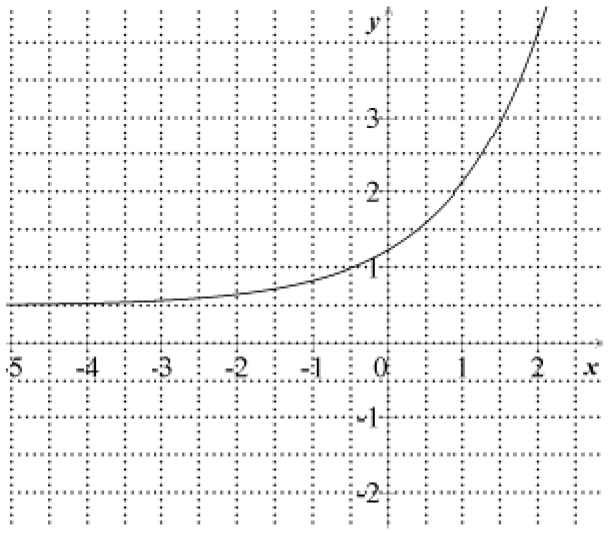
Les fonctions de la forme : $y = C \cdot \log_a(px+q) + D$
ont une asymptote verticale en $x = \dfrac{-q}{p}$
(en haut ou en bas, selon les valeurs des paramètres)

Exemples 8.6

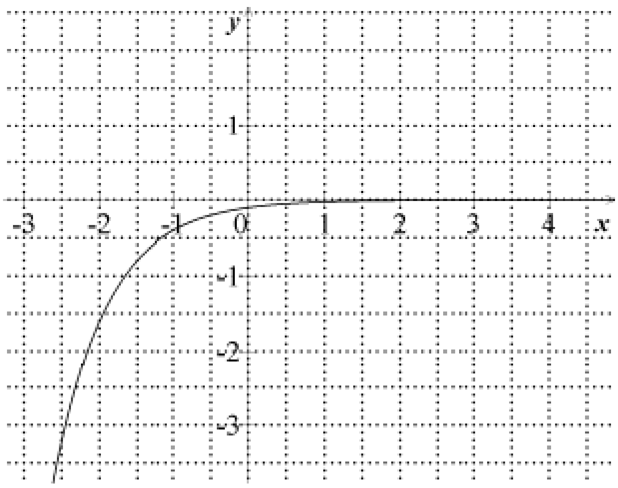
$y = 0.4 \cdot e^{-0.7x+1.2} - 1$ AH : $y = -1$ à droite



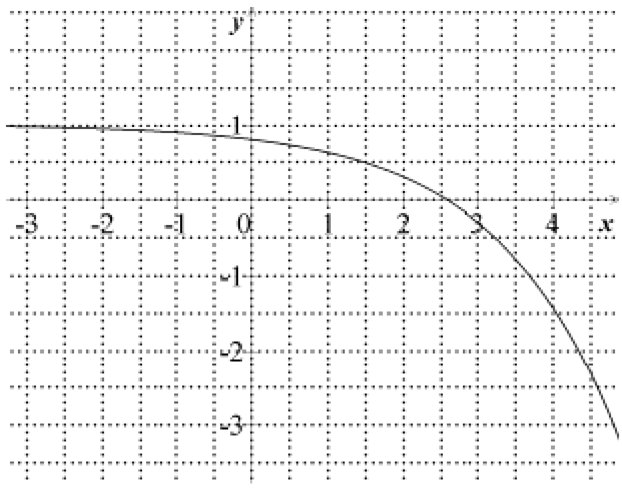
$y = 0.2 \cdot e^{0.8x+1.3} + 0.5$ AH : $y = 0.5$ à gauche

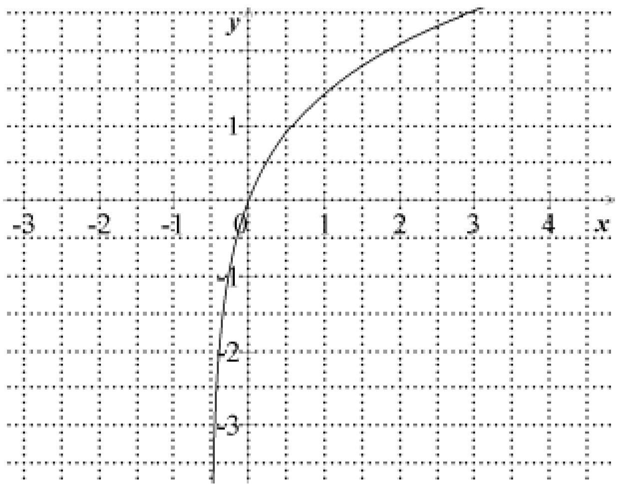
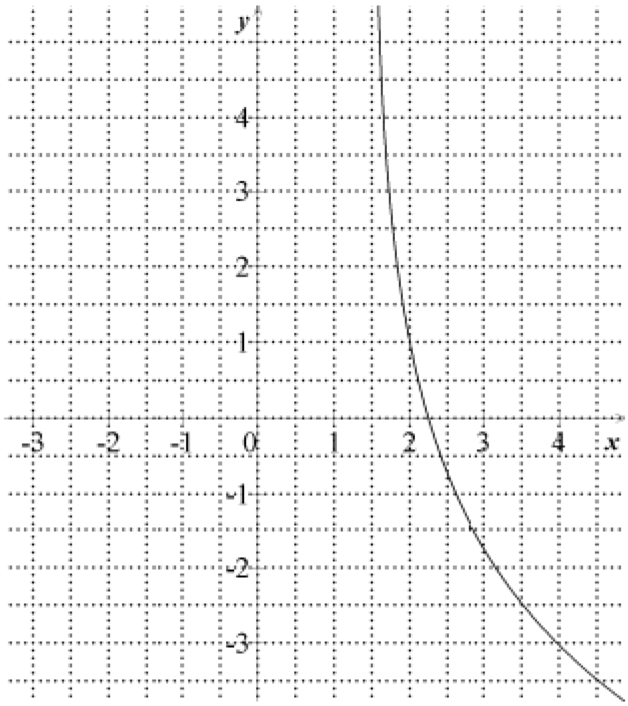
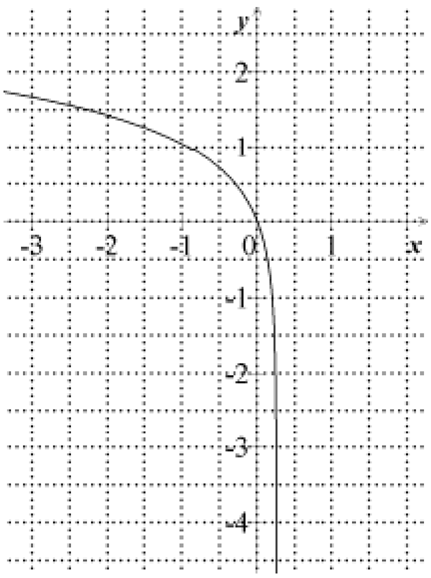
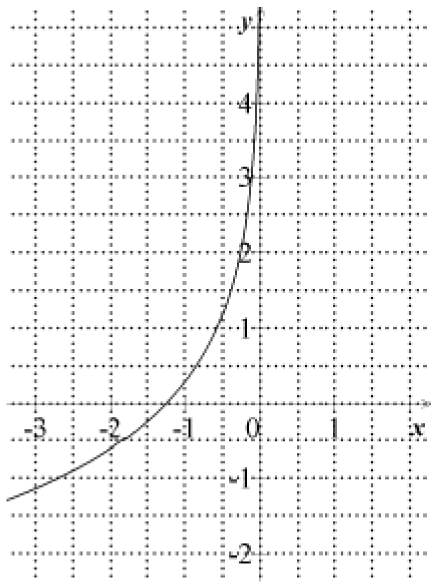


$y = -0.2 \cdot 0.5^{2x+1}$ AH : $y = 0$ à droite



$y = -0.2 \cdot 2^{0.9x} + 1$ AH : $y = 1$ à gauche



$y=3\cdot\log(2x+1)$ AV : $x=-1/2$ en bas 	$y=-2.5\cdot\ln(2x-3)+1$ AV : $x=3/2$ en haut 
$y=1.5\cdot\log(1-4x)$ AV : $x=1/4$ en bas 	$y=-3\cdot\log(-0.8x)$ AV : $x=0$ en haut 

Exercice 60

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'asymptote, calculer quelques points et tracer une esquisse du graphe.

a) $y=-0.5\cdot 0.8^{2x}+1$

b) $y=2\cdot\ln(2x-5)+1$

c) $y=-0.5\cdot 2^{0.8x}$

d) $y=-\log(3-2x)$

e) $y=0.4\cdot 0.7^{0.5x+1}-1.5$

f) $y=-3\cdot\log(4x+5)-0.5$

Résolution graphique d'équations

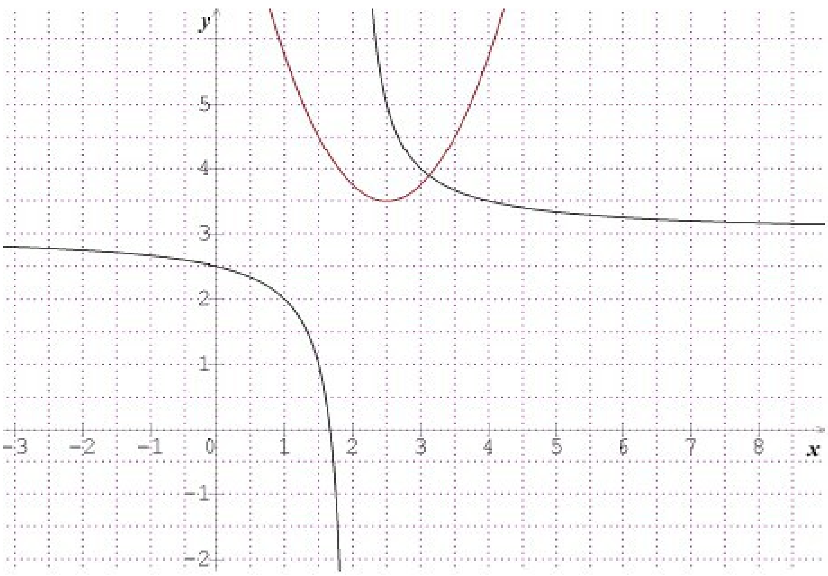
Une équation de la forme $f(x)=g(x)$ peut être résolue approximativement en représentant sur un même repère les graphes de f et de g, puis en précisant les valeurs horizontales des points d'intersection.

Exemple 8.7

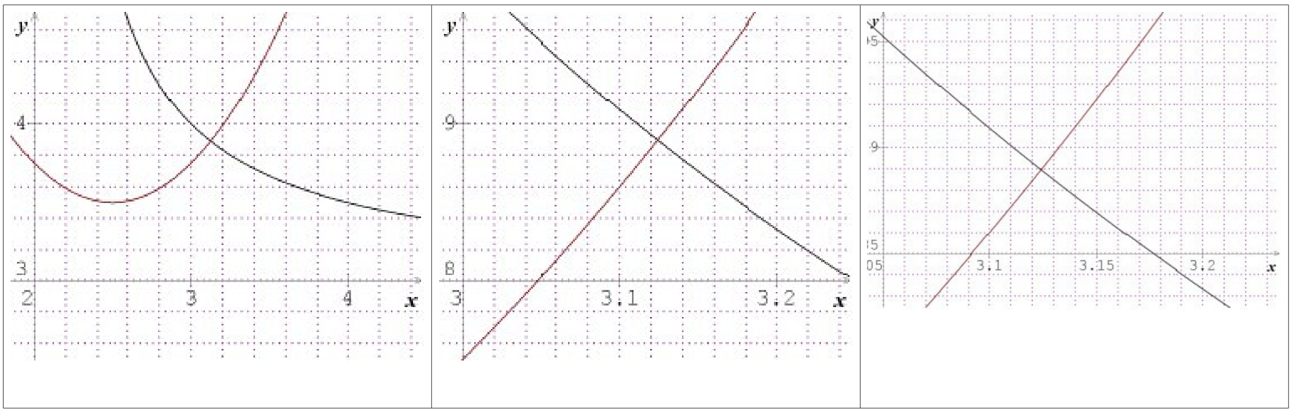
Pour résoudre l'équation $3+\dfrac{1}{x-2}=3.5+(x-2.5)^2$,

posons $f(x)=3+\dfrac{1}{x-2}$ et $g(x)=3.5+(x-2.5)^2$

Représentons ces fonctions graphiquement :



et zoomons sur l'intersection :

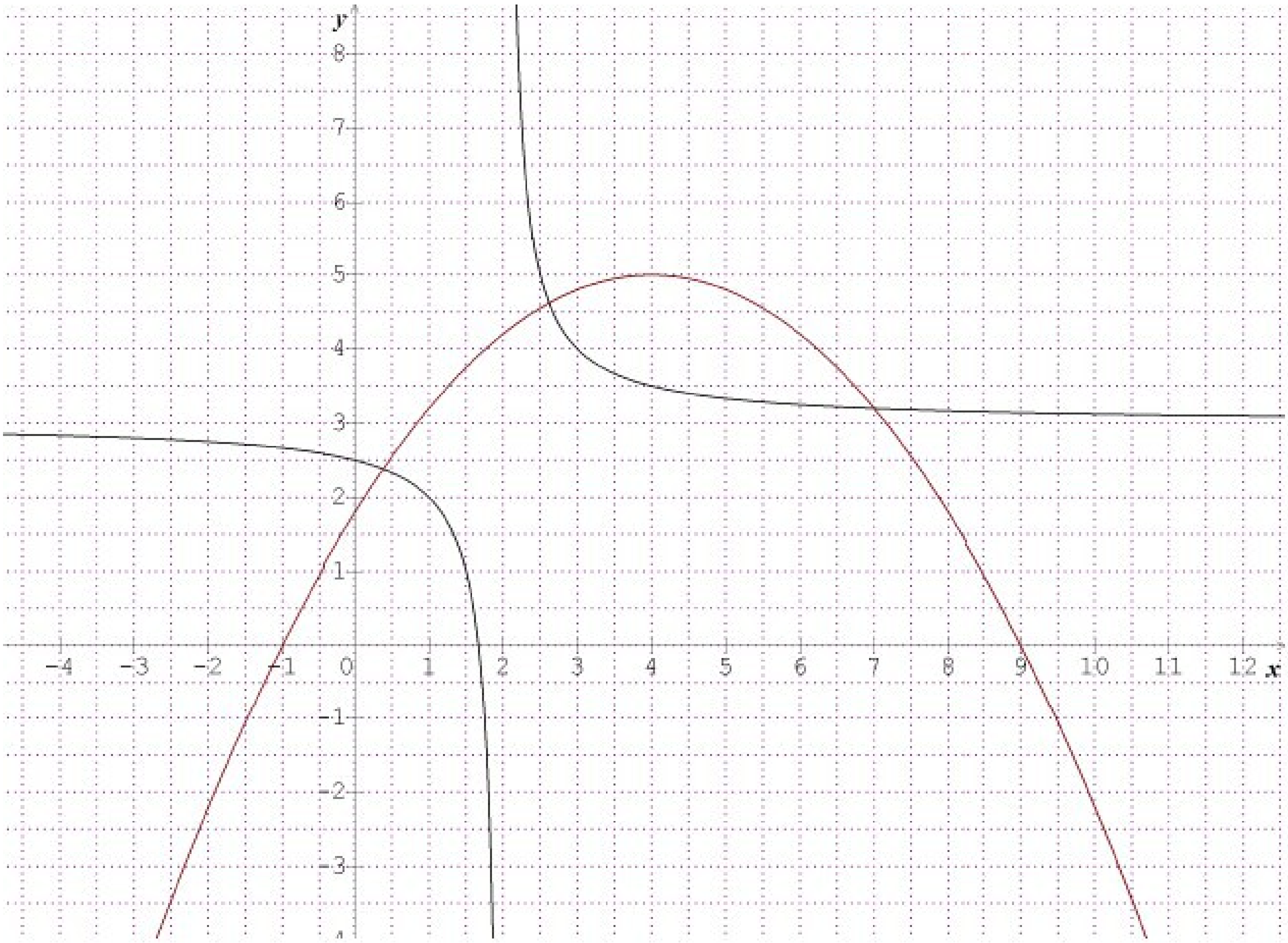


On voit que la solution est environ 3.125

<u>Exemple 8.8</u> Pour résoudre l'équation $3+\frac{1}{x-2}=5-0.2(x-4)^2$,

posons $f(x)=3+\frac{1}{x-2}$ et $g(x)=5-0.2(x-4)^2$

Représentons ces fonctions graphiquement :



Il y a trois solutions. Elles valent environ 0.4, 2.6 et 7.

Comment faire sans logiciel graphique ? Il faut d'abord, en calculant quelques points, tracer plus ou moins bien, à la main, les graphes de f et de g, pour localiser à peu près les points d'intersection. À ce stade, si le travail a été bien fait, nous pouvons constater qu'il y a un point d'intersection entre 0 et 1, un autre entre 2 et 3, un dernier en 7. Pour préciser les deux premiers, on remplit des tableaux :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	2.5	2.47	2.44	2.41	2.38	2.33	2.29	2.23	2.17	2.09	2
g(x)	1.8	1.96	2.11	2.26	2.41	2.55	2.69	2.82	2.95	3.08	3.2

Les valeurs les plus proches de f(x) et de g(x) sont pour x = 0.4
(remarque : ici, nous aurions pu arrêter les calculs à partir de 0.5)

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
f(x)	/	13	8	6.33	5.5	5	4.67	4.43	4.25	4.11	4
g(x)	4.2	4.28	4.35	4.42	4.49	4.55	4.61	4.66	4.71	4.76	4.8

Les valeurs les plus proches de f(x) et de g(x) sont pour x = 2.6

Exercice 61

Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a) $0.5x^3=-3x^2+6x$

b) $x^2-2=\sqrt{-x}$

c) $2\cdot e^{0.7x}=\log(2x+5)+0.7$

Exercice 62

Soit l'équation a) de l'exercice précédent :

$$0.5x^3=-3x^2+6x$$

On peut la transformer en :

$$0.5x^3+3x^2-6x=0$$

La résoudre consiste à chercher les zéros de la fonction :

$$f(x)=0.5x^3+3x^2-6x$$

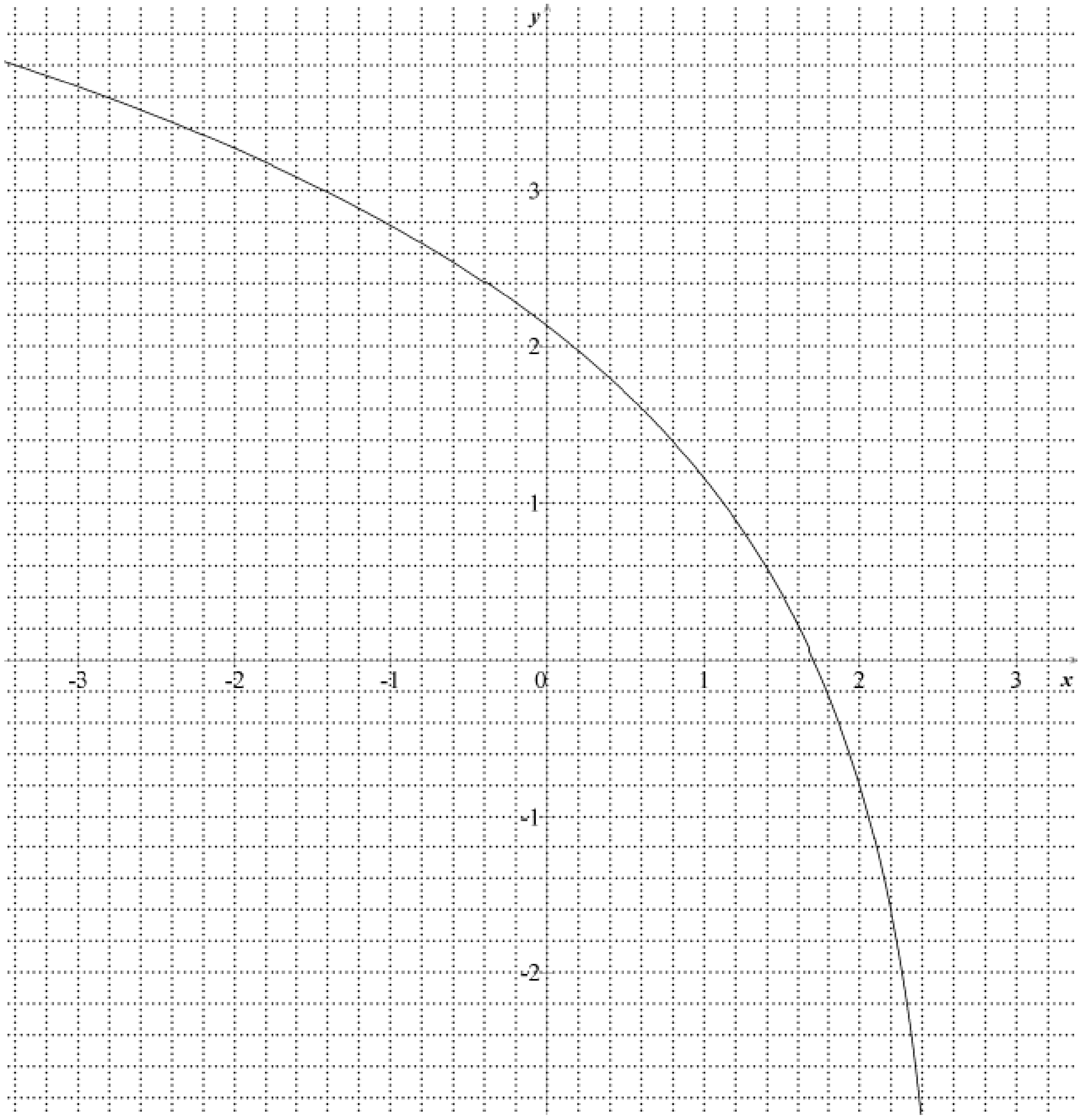
Chercher graphiquement ces zéros.

Exercice 63

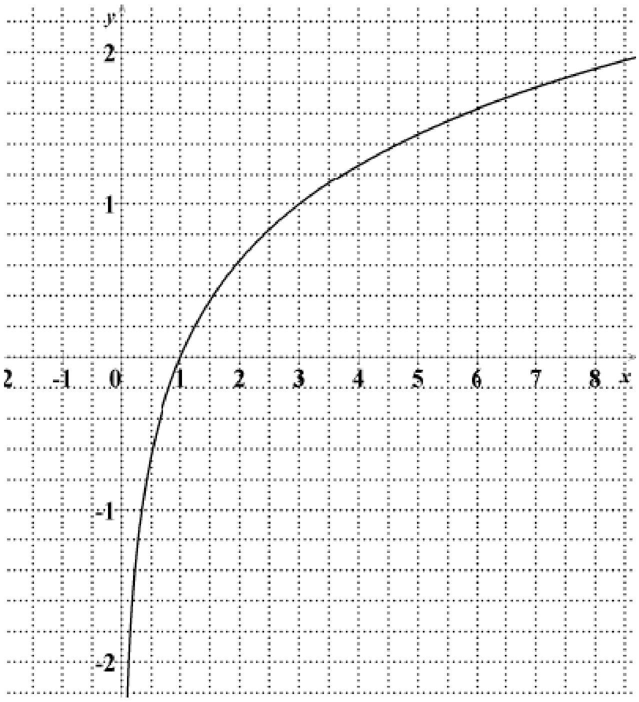
Sur le repère suivant est tracé le graphe de la fonction f : $y=2\cdot\ln(13-5x)-3$

Tracer le graphe de la fonction g : $y=2^{1.8x}-1$

Et résoudre graphiquement l'équation $2\cdot\ln(13-5x)-3=2^{1.8x}-1$
avec une précision de deux décimales



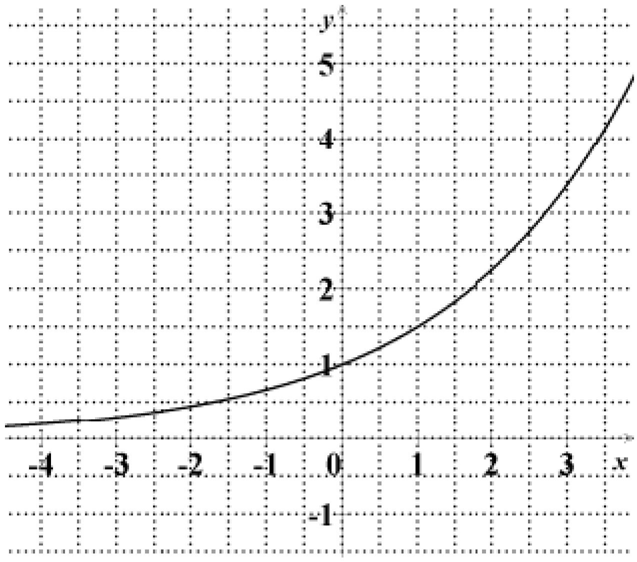
Exercice 64 Sur le repère suivant est tracé le graphe de la fonction f : $y=\log_a(x)$



a) Déterminer la valeur de a

b) Résoudre graphiquement l'équation $\log_a(x)=0.2(x-2)^2-0.8$

Exercice 65 Sur le repère suivant est tracé le graphe de la fonction f : $y=a^x$



a) Déterminer la valeur de a

b) Résoudre graphiquement l'équation $a^x=0.6x+1.37$

Exercice 66

Soit la fonction définie par $f(x) = \ln(4x+3)$

a) Déterminer le domaine de définition de f
b) Représenter graphiquement cette fonction
c) Donner l'équation de son asymptote et préciser si elle est horizontale ou verticale
d) Calculer l'ordonnée à l'origine
e) Calculer le zéro
f) Calculer l'image de 403
g) Calculer la pré-image de 4.25
h) Calculer la réciproque de f
i) Résoudre graphiquement l'équation $\ln(4x+3) = 4 - 0.8x$

Exercice 67

Soit la fonction définie par $f(x) = 2^{1.5x-1} - 3$

a) Déterminer le domaine de définition de f
b) Représenter graphiquement cette fonction
c) Donner l'équation de son asymptote et préciser si elle est horizontale ou verticale
d) Calculer l'ordonnée à l'origine
e) Calculer le zéro
f) Calculer l'image de 4.5
g) Calculer la pré-image de 150
h) Calculer la réciproque de f
i) Résoudre graphiquement l'équation $2^{1.5x-1} - 3 = 3 - 0.7x$

9. Exercices supplémentaires

Exercice 68 Résoudre les équations suivantes :

a) $3\sqrt{2-5x}+1=13$
b) $\sqrt{4\mathrm{x}+49}-5=x$
c) $0.2\cdot 0.0018^{-x}=15'000$
d) $4\log_8(\mathrm{e}^{2x+1}-0.7)=-1$
e) $5(7-3x)^4-8=60$
f) $\log_{5x-2}(64)=3$
g) $4(2x+1)^{\frac{5}{3}}+7=100$
h) $\sqrt[3]{x^7}=5x^{\frac{1}{3}}$
i) $\ln(\sqrt[4]{x^3})+\ln(x^2)-\ln(\frac{1}{x})=0.5$
j) $\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{3x-1}}{\mathrm{e}^{4-2x}}=514^{283}$
k) $2\log(x)-\log(x+3)=1$
l) $\ln(1-x)-\ln(x-2)=x$
m) $7\cdot 2^{x+1}=5\cdot 3^{4-x}$
n) $2+\sqrt[3]{\log(1+\sqrt{x})}=0$
o) $\mathrm{e}^2 2^x+2^{x+3}=\sqrt{\log(50)}$
p) $\sqrt{5^x}=3^{x+7}$
q) $\ln(15x^2)-\ln(5x)=2$
r) $4^{\log(x)}=5$
s) $x^{\log(x)}=5$
t) $\log(\log(x))=3$
u) $\log(8+\ln(6+3^{\sqrt{x}}))=1$
v) $\log_3(3^x+1)=-x-2+\log_3(4)$
w) $4\log(x)=\log(x^2-2)+\log(8)$
x) $2\log_2(x)+\log_x(2)=3$

Exercice 69

Sans calculatrice, trouver la valeur de x qui vérifie l'égalité :

$$\log(x)=2\log(5)+4\log(3)$$

Exercice 70

La demi-vie du paracétamol est d'environ 2 heures. En prenant comme modèle la loi :

$$Q(t)=Q_0\,\mathrm{e}^{-kt}$$

où t est le temps en heures
$Q(t)$ est la quantité de paracétamol dans l'organisme au temps t
Q_0 est la quantité de paracétamol que le patient a absorbée

calculer la constante k

Exercice 71

Il y a 65 millions d'années, sur le continent indien qui se trouvait alors à une latitude de −12° (aux environs des actuelles îles Comores), se produisit une immense éruption volcanique, qui joua probablement un rôle important dans l'extinction des dinosaures et qui couvrit de lave une surface de 500'000 km^2. Il en reste aujourd'hui des traces à l'ouest de l'Inde : les trapps du Deccan.

Cette éruption répandit dans l'atmosphère une quantité de $\boldsymbol{Q_0=7\cdot 10^{16}}$ kg de dioxyde de carbone. Le climat chaud et humide favorise une altération rapide des laves émises. Cette altération s'effectue par des réactions chimiques qui transforment le dioxyde de carbone en ions bicarbonates.

Des études en paléoclimatologie permettent de proposer le modèle suivant pour évaluer la quantité résiduelle $\boldsymbol{Q(t)}$ de dioxyde de carbone dans l'atmosphère $\boldsymbol{t}$ années après l'éruption :

$$\boldsymbol{Q(t)=Q_0\cdot e^{-kt}}$$

où la constante $\boldsymbol{k}$ est estimée à $\boldsymbol{8\cdot 10^{-6}}$

a) Écrivez 5 millions en notation scientifique.

b) 5 millions d'années après l'éruption, quelle était la quantité résiduelle de dioxyde de carbone dans l'atmosphère ? [*arrondir au dixième de kg*]

c) Combien de milliers d'années durent s'écouler pour que la quantité de dioxyde de carbone émise par l'éruption dans l'atmosphère fût divisée par 100 ?
[*arrondir au millier d'années*]

Exercice 72

En 1909, Søren Sørensen définit le pH (potentiel hydrogène) d'une solution comme l'opposé du logarithme décimal de la concentration (en moles par litre) des ions hydrogène. En 1924, Sørensen donne du pH une nouvelle définition, où la concentration est remplacée par la notion plus complexe d'activité. En prenant la première définition, répondre aux questions suivantes :

a) Sachant que le pH du sang humain est compris entre 7.38 et 7.42, dans quel intervalle varie la concentration des ions hydrogène ?

b) Sachant que le pH du jus de citron est compris entre 2.4 et 2.6, dans quel intervalle varie la concentration des ions hydrogène ?

c) L'acide carborane est l'acide le plus fort. Son pH vaut –18. Sachant que l'eau pure a un pH de 7, calculer le rapport :

$$\frac{\text{concentration des ions hydrogène dans l'acide carborane}}{\text{concentration des ions hydrogène dans l'eau}}$$

Exercice 73

La magnitude (apparente) d'un système d'étoiles doubles est donnée par la formule :

$$m=-2.5\log\left(10^{-0.4m_1}+10^{-0.4m_2}\right)$$

où m_1 et m_2 sont les magnitudes des deux étoiles formant le système.

Si $m_2=m_1+0.5$ et $m=5$, alors que vaut m_1 ?

Exercice 74

Les plantes transpirent, ce qui a pour effet de rejeter de la vapeur d'eau dans l'atmosphère. Les océans, les mers, les lacs et les cours d'eau rejettent aussi de la vapeur d'eau dans l'atmosphère. L'ensemble de ces phénomènes s'appelle *l'évapotranspiration*. On la mesure par la quantité $\boldsymbol{H}$, en mm/an, sachant que 1 mm/an correspond à 1 litre d'eau par an pour chaque mètre carré de surface.

Il existe une relation empirique (c'est-à-dire basée sur l'expérience) entre la pression $\boldsymbol{P}$ du dioxyde de carbone (CO_2) dans l'atmosphère et l'évapotranspiration $\boldsymbol{H}$. Si l'unité de pression est l'atmosphère (atm), la formule de Brook et Hanson (1991) est :

$$\log(P) = -3.47 + 2.09\left(1 - \mathrm{e}^{-0.00172\,H}\right)$$

a) Calculer la pression du dioxyde de carbone dans l'atmosphère si l'évapotranspiration est de 1000 mm/an. [*réponse arrondie à la 4ᵉ décimale*]
b) Si la pression du dioxyde de carbone dans l'atmosphère est de 0.005 atm, calculer l'évapotranspiration correspondante. [*réponse arrondie à l'unité*]

Exercice 75

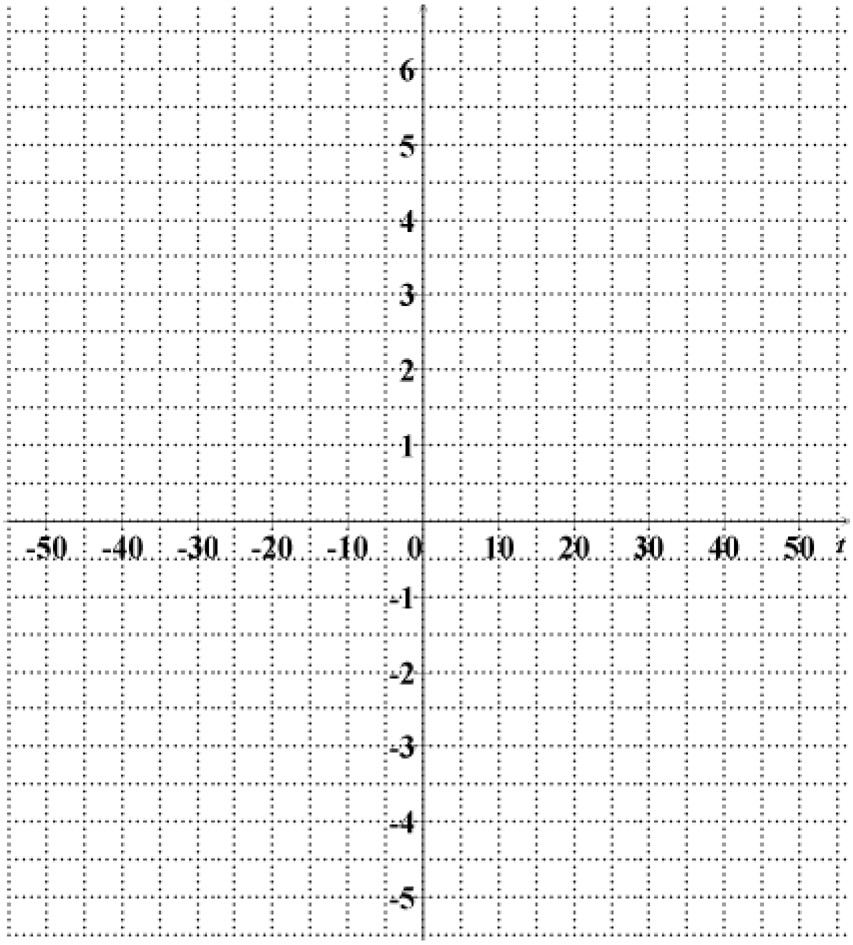
Soit la fonction donnée par : $f(x) = -1.5\ln(-x-100)$. Trouver :

a) le domaine de définition (sous forme d'intervalle)
b) l'asymptote (préciser sa nature)
c) l'ordonnée à l'origine
d) le zéro
e) l'image de –102
f) la pré-image de 2
g) une esquisse du graphe

Exercice 76

Soit la fonction donnée par $C(t) = 1.5 \cdot 1.04^t$, où t est une variable réelle.

a) Représentez graphiquement cette fonction, pour t variant de −50 à 30, avec un pas de 10



b) Calculez la pré-image de 20.

c) Cette fonction admet-elle une asymptote ? Si oui, précisez sa nature (horizontale ou verticale) et donnez son équation.

d) Si nous décidons d’interpréter cette fonction comme donnant le capital qui résulte d’un dépôt pendant t années de 1.5 million de francs sur un compte à intérêts composés, avec un taux d’intérêt annuel fixe, quel est ce taux d’intérêt, exprimé en pour cent ?

Solutions de la plupart des exercices

Exercice 1

$10^5=100'000$	$(-2)^4=16$	$(-2)^5=-32$	$(-1)^{517}=-1$
$1^{517}=1$	$(-1)^{864}=1$	$1^0=1$	$0^1=0$
$10^{-2}=0.01$	$(-1)^{(-17)}=-1$	$2^{-2}=0.25$	$5^{-1}=0.2$
$(-3)^{-2}=0.\overline{1}$	$10^{-3}=0.001$	$(-10)^{-1}=-0.1$	$81^{\frac{1}{2}}=9$
$81^{\frac{1}{4}}=3$	$64^{\frac{1}{2}}=8$	$64^{\frac{1}{3}}=4$	$1000^{\frac{2}{3}}=100$
$4^{\frac{3}{2}}=8$	$81^{\frac{3}{4}}=27$	$10000^{-\frac{1}{2}}=0.01$	$9^{-\frac{1}{2}}=0.\overline{3}$
$8^{-\frac{1}{3}}=0.5$	$64^{-\frac{5}{6}}=\frac{1}{32}$	$1000^{-\frac{5}{3}}=10^{-5}$	$0.01^{-\frac{3}{2}}=1000$

Exercice 2

$a^4a^7=a^{11}$ $x^{12}x^{-2}=x^{10}$ $\frac{y^5y}{y^6}=1$ $(z^3)^5=z^{15}$ $(b^{-4})^{-5}=b^{20}$ $\frac{(c^4)^3}{c^{11}}=c$ $\frac{1}{w^{-2}}=w^2$

$\frac{x^0x^6}{(x^{-3})^2}=x^{12}$ $(2xy)^3x^5=8x^8y^3$ $\frac{a^2b^3c}{abc}=ab^2$ $\frac{(a^2b)^{-3}}{(b^{-5})^2}=a^{-6}b^7$ $\left(\frac{s}{t}\right)^3st^2=s^4t^{-1}$

$\left(\frac{u^5}{3u^2}\right)^2=\frac{u^6}{9}$ $\sqrt[3]{x^{15}}=x^5$ $\sqrt[6]{x^3}=x^{1/2}$ $(x^2)^{\frac{3}{5}}=x^{6/5}$ $y^{\frac{7}{2}}y^{\frac{5}{6}}=y^{13/3}$ $x^2\sqrt[3]{x}=x^{7/3}$ $\frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{2}{9}}}=y^{10/9}$

$\frac{\sqrt{x^5}}{x^7}=x^{-9/2}$ $\frac{x}{\sqrt{x}}=x^{1/2}$ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=x^{1/6}$ $\frac{\sqrt[3]{x^5}\sqrt{x^7}}{\sqrt[6]{x}}=x^5$ $\frac{\sqrt[3]{2a}\sqrt{75b}\sqrt[3]{4a^{11}}}{\sqrt{3b^5}}=10a^4b^{-2}$

Exercice 3

$45'000'000'000 = 4.5 \cdot 10^{10}$
$-387.26 = -3.873 \cdot 10^2$

$-6.51 \cdot 10^{-3} = -0.00651$

$44.754 \cdot 10^{13} = 4.475 \cdot 10^{14}$
$890 \cdot 10^{-15} = 8.9 \cdot 10^{-13}$

$0.000'000'553'469 = 5.535 \cdot 10^{-7}$
$-0.90098 = -9.01 \cdot 10^{-1}$

$2.99 \cdot 10^5 = 299'000$

$-0.007 \cdot 10^{-12} = -7 \cdot 10^{-15}$
$0.05 \cdot 10^{17} = 5 \cdot 10^{15}$

Exercice 4

Classer du plus petit au plus grand :

A = 3’500’000’000 = 3.5•10^9^
B = 35 milliards = 3.5•10^10^
C = $4\cdot 10^{129}\cdot 9\cdot 10^{-122}$ = 3.6•10^8^
D = $0.0035\cdot 10^{14}$ = 3.5•10^11^

C < A < B < D

Exercice 5

a) $x^5=20 \rightarrow x=20^{1/5}=1.821$

b) $x^5=-20 \rightarrow x=(-20)^{1/5}=-1.821$

c) $x^{-5}=100 \rightarrow x=100^{-1/5}=0.398$

d) $x^{-5}=-100 \rightarrow x=(-100)^{-1/5}=-0.398$

e) $\sqrt[5]{x}=2 \rightarrow x=2^5=32$

f) $\sqrt[5]{x}=-2 \rightarrow x=(-2)^5=-32$

g) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=10 \rightarrow x=10^{-5}$

h) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=-10 \rightarrow x=-10^{-5}$

i) $\sqrt[3]{x^5}=4 \rightarrow x=4^{3/5}=2.297$

j) $\sqrt[3]{x^5}=-4 \rightarrow x=(-4)^{3/5}=-2.297$

k) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}=2 \rightarrow x=2^{-3/5}=0.660$

l) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}=-2 \rightarrow x=(-2)^{-3/5}=-0.660$

m) $x^6=300 \rightarrow x=\pm 300^{1/6}=\pm 2.587$

n) $\frac{1}{x^4}=3 \rightarrow x=\pm 3^{-1/4}=\pm 0.760$

o) $\frac{1}{x^2}=-1$ → pas de solution

p) $\sqrt{x}=9 \rightarrow x=9^2=81$

q) $\sqrt[4]{x}=8 \rightarrow x=8^4=4096$

r) $\frac{1}{\sqrt{x}}=4 \rightarrow x=4^{-2}=0.0625$

s) $\sqrt[4]{x^3}=10 \rightarrow x=10^{4/3}=21.544$

t) $\sqrt[4]{x^3}=-10$ → pas de solution

u) $\sqrt[3]{x^4}=10 \rightarrow x=\pm 10^{3/4}=\pm 5.623$

v) $x^{0.3}=6 \rightarrow x=6^{10/3}=392.498$

w) $x^{0.6}=-13 \rightarrow x=(-13)^{5/3}=-71.874$

x) $x^{-0.4}=5 \rightarrow x=\pm 5^{-5/2}=\pm 0.0179$

y) $\sqrt[10]{x}\cdot x^{1.7}\cdot (x^{2.6})^2=21 \rightarrow x=21^{1/7}=1.545$

z) $\frac{x^3\cdot\sqrt[5]{x}}{x^4}=0.7 \rightarrow x=\pm 0.7^{-5/4}=\pm 1.562$

Exercice 6

a) $\sqrt{1-x}=4 \rightarrow 1-x=4^2=16 \rightarrow x=1-16=-15$

b) $\sqrt{x+5}=-12$ →pas de solution

c) $2\sqrt{11-x}-27=13 \rightarrow 11-x=20^2=400 \rightarrow x=11-400=-389$

d) $-2\sqrt[3]{x}=10 \rightarrow x=(-5)^3=-125$

e) $3\sqrt[4]{5x-1}=7 \rightarrow 5x-1=(\frac{7}{3})^4 \rightarrow x=\frac{(\frac{7}{3})^4+1}{5}=6.128$

f) $\sqrt{x-9}+1.5=1.3 \rightarrow \sqrt{x-9}=-0.2$ → pas de solution

g) $\sqrt[3]{5-x}=-0.8 \rightarrow 5-x=(-0.8)^3=-0.512 \rightarrow x=5.512$

h) $4\sqrt{x}+5\sqrt{x}+2=17 \rightarrow 9\sqrt{x}=15 \rightarrow x=(\frac{15}{9})^2=2.778$

i) $\sqrt[3]{\frac{x}{5}}=2 \rightarrow \frac{x}{5}=2^3=8 \rightarrow x=5\cdot 8=40$

j) $\sqrt[3]{\frac{5}{x}}=2 \rightarrow \frac{5}{x}=2^3=8 \rightarrow x=\frac{5}{8}=0.625$

k) $3\sqrt{5x^2+3x+1}=21 \rightarrow 5x^2+3x+1=(\frac{21}{3})^2=49 \rightarrow 5x^2+3x-48=0$ (équ. 2e degré)
→ $x=2.813$ ou $x=-3.413$

l) $\frac{1}{\sqrt[5]{x+2}}+8=7.4 \rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{x+2}}=-0.6 \rightarrow \sqrt[5]{x+2}=\frac{1}{-0.6}=-\frac{5}{3} \rightarrow x+2=(-\frac{5}{3})^5$
→ $x=(-\frac{5}{3})^5-2=-14.86$

m) $7(x+1)^5+4=100 \rightarrow (x+1)^5=\frac{100-4}{7}=\frac{96}{7} \rightarrow x=(\frac{96}{7})^{1/5}-1=0.688$

n) $(3x-5)^4=157 \rightarrow 3x-5=\pm 157^{1/4} \rightarrow x=\frac{\pm 157^{1/4}+5}{3} \rightarrow x=2.847$ ou $x=0.487$

o) $2x^4+5=11 \rightarrow x^4=\frac{11-5}{2}=3 \rightarrow x=\pm 3^{1/4}=\pm 1.316$

p) $2x^4-5=-11 \rightarrow x^4=\frac{-11+5}{2}=-3$ → pas de solution

q) $-2x^7+5=11 \rightarrow x^7=\frac{11-5}{-2}=-3 \rightarrow x=(-3)^{1/7}=-1.17$

r) $3x^{1.2}+1=5 \rightarrow x^{6/5}=\frac{5-1}{3}=\frac{4}{3} \rightarrow x=\pm(\frac{4}{3})^{5/6}=\pm 1.271$

s) $x^{2/3}+23=3 \rightarrow x^{2/3}=3-23=-20$ → pas de solution

t) $(2x)^{3/2}=5 \;\rightarrow\; 2x=5^{2/3} \;\rightarrow\; x=\dfrac{5^{2/3}}{2}=1.462$

u) $16.5x^{0.6}=1.97 \;\rightarrow\; x^{3/5}=\dfrac{1.97}{16.5} \;\rightarrow\; x=\left(\dfrac{1.97}{16.5}\right)^{5/3}=0.0289$

v) $(5x+3)^{0.75}=81 \;\rightarrow\; 5x+3=81^{4/3} \;\rightarrow\; x=\dfrac{81^{4/3}-3}{5}=69.493$

w) $15(10-x)^6-13=59 \;\rightarrow\; (10-x)^6=\dfrac{59+13}{15}=4.8 \;\rightarrow\; 10-x=\pm 4.8^{1/6} \;\rightarrow\; x=\dfrac{\pm 4.8^{1/6}-10}{-1}$

$\rightarrow\; x=8.701$ ou $x=11.299$

x) $5(3x)^4=371 \;\rightarrow\; (3x)^4=\dfrac{371}{5}=74.2 \;\rightarrow\; 3x=\pm 74.2^{1/4} \;\rightarrow\; x=\dfrac{\pm 74.2^{1/4}}{3}=\pm 0.978$

Exercice 7 Résoudre

a) $\sqrt[6]{5x^4-7}=2.5 \;\rightarrow\; x^4=\dfrac{2.5^6+7}{5} \;\rightarrow\; x=\pm\left(\dfrac{2.5^6+7}{5}\right)^{1/4}=\pm 2.662$

b) $\sqrt[6]{5x^4-7}=-2.5$ $\rightarrow$ pas de solution

c) $\sqrt[3]{5x^4-7}=-2.5 \;\rightarrow\; x^4=\dfrac{(-2.5)^3+7}{5}=-1.725$ $\rightarrow$ pas de solution

d) $\sqrt[3]{5x^4-7}=-1.5 \;\rightarrow\; x^4=\dfrac{(-1.5)^3+7}{5}=0.725 \;\rightarrow\; x=\pm 0,725^{1/4}=\pm 0.923$

e) $(5x^4-7)^2=9 \;\rightarrow\; 5x^4-7=\pm 3 \;\rightarrow\; x^4=\dfrac{\pm 3+7}{5} \;\rightarrow\; x^4=2$ ou $x^4=0.8$

$\rightarrow\; x=\pm 2^{1/4}=\pm 1.189$ ou $x=\pm 0.8^{1/4}=\pm 0.946$

f) $(5x^4-7)^2=144 \;\rightarrow\; 5x^4-7=\pm 12 \;\rightarrow\; x^4=\dfrac{\pm 12+7}{5} \;\rightarrow\; x^4=3.8$ ou $x^4=-1$

$\rightarrow\; x=\pm 3.8^{1/4}=\pm 1.396$

g) $(5x^4-7)^2=-144$ $\rightarrow$ pas de solution

h) $(5x^4-7)^3=-144 \;\rightarrow\; 5x^4-7=(-144)^{1/3} \;\rightarrow\; x^4=\dfrac{(-144)^{1/3}+7}{5}$

$\rightarrow\; x=\pm\left(\dfrac{(-144)^{1/3}+7}{5}\right)^{1/4}=\pm 0.77$

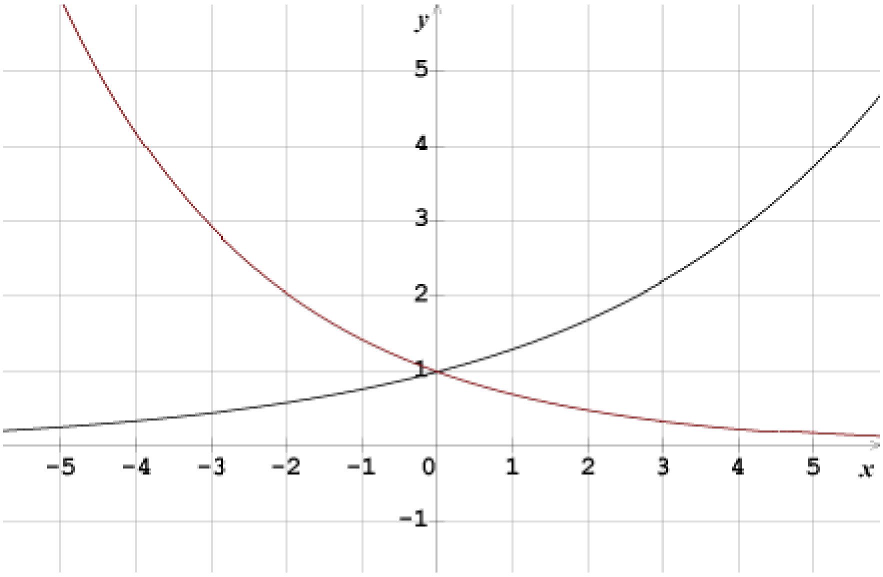
i) $(5x^3-7)^2=144 \;\rightarrow\; 5x^3-7=\pm 12 \;\rightarrow\; x^3=\dfrac{\pm 12+7}{5} \;\rightarrow\; x=\left(\dfrac{\pm 12+7}{5}\right)^{1/3}$

$\rightarrow\; x=1.56$ ou $x=-1$

j) $5(5x^3-7)^3-7=0 \;\rightarrow\; 5x^3-7=1.4^{1/3} \;\rightarrow\; x^3=\dfrac{1.4^{1/3}+7}{5} \;\rightarrow\; x=\left(\dfrac{1.4^{1/3}+7}{5}\right)^{1/3}=1.175$

Exercice 8 $y=f(x)=1.3^x$ et $y=g(x)=0.7^x$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	0.27	0.35	0.46	0.59	0.77	1	1.3	1.69	2.2	2.86	3.71
g(x)	5.95	4.16	2.92	2.04	1.43	1	0.7	0.49	0.34	0.24	0.17



Exercice 9

$$C_{10}=15'000\cdot(1+\frac{2.25}{100})^{10}=18'738.05$$ francs

Exercice 10

$$C_0=\frac{50'000}{(1+\frac{0.75}{100})^{20}}=43'059.49$$ francs

Exercice 11

$$i=\left(\frac{30'000}{27'670}\right)^{1/10}-1=0.00812=0.812\,\%$$

Exercice 12

$$i=2^{1/25}-1=0.0281=2.81\,\%$$

Exercice 13

$$C_0=\frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Exercice 14

$$i=\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{1/n}-1$$

Exercice 15

$$C_0=\frac{26'000}{(1+\frac{3.5}{100})^{10+\frac{5}{12}+\frac{23}{360}}}=18'129.68$$ francs

Exercice 16

$$i=3^{\frac{1}{6+\frac{7}{12}+\frac{8}{360}}}-1=0.1809=18.09\%$$

Exercice 17

$e^2=7.3891$ $e^3=20.0855$

$e^{3.5}=33.1155$ $e^{0.4}=1.4918$

$e^{-0.5}=0.6065$ $e^{-1.7}=0.1827$

$e^{-3}=0.0498$

Exercice 18

a) $\log_{10}(100'000)=5$
b) $\log_{10}(0.01)=-2$
c) $\log_{10}(1)=0$
d) $\log_3(9)=2$
e) $\log_3(27)=3$
f) $\log_3(1/3)=-1$
g) $\log_3(\sqrt{3})=\frac{1}{2}$
h) $\log_3(1/\sqrt{3})=-\frac{1}{2}$
i) $\log_2(32)=5$
j) $\log_2(1/32)=-5$
k) $\log_2(\sqrt{32})=\frac{5}{2}$
l) $\log_2(1/\sqrt{32})=-\frac{5}{2}$
m) $\log_4(32)=\frac{5}{2}$
n) $\log_8(32)=\frac{5}{3}$

Exercice 19

a) $\log(20)=1.301$

b) $\ln(20)=2.996$

c) $\log_5(20)=1.861$

d) $\log_7(4)=0.712$

e) $\log_3(0.2)=-1.465$

f) $\ln(0.5)=-0.693$

g) $\log(e^3)=1.303$

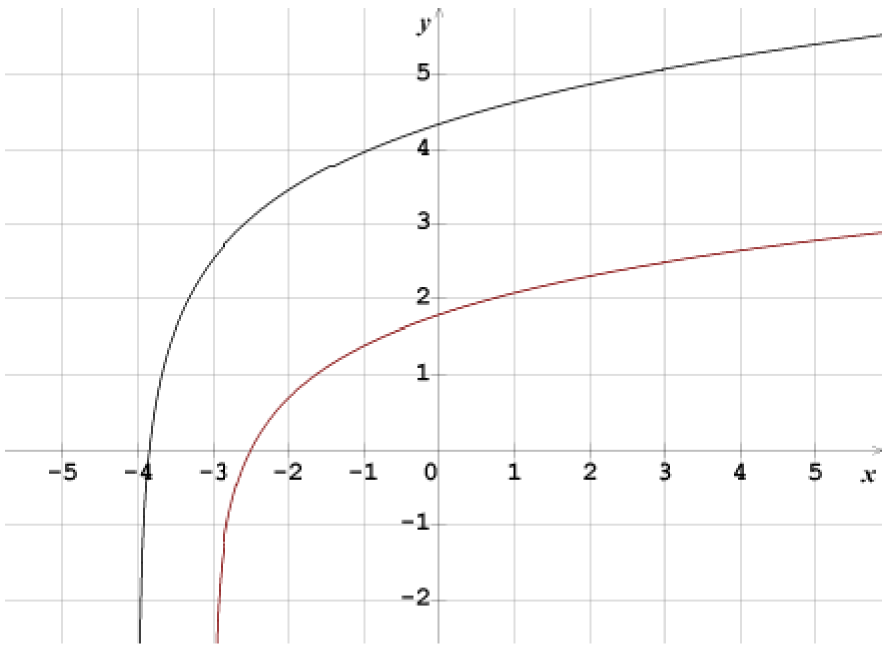
h) $\ln(e^3)=3$

Exercice 20

$$763^{-524}=10^{-524\log(763)}=10^{-1510.442858}=10^{-0.442858}\cdot 10^{-1510}=0.3607\cdot 10^{-1510}=3.607\cdot 10^{-1511}$$

Exercice 21 $y=f(x)=3\cdot\log(7x+28)$ et $y=g(x)=\ln(2x+6)$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	/	/	2.54	3.44	3.97	4.34	4.63	4.87	5.07	5.24	5.4
g(x)	/	/	/	0.69	1.39	1.79	2.08	2.3	2.48	2.64	2.77



Exercice 22

a) $10^x = 137$ $\quad x = \log(137) = 2.137$

b) $10^x = -100$ $\quad$ pas de solution

c) $7^x = 12$ $\quad x = \dfrac{\log(12)}{\log(7)} = 1.277$

d) $e^x = 0.01$ $\quad x = \ln(0.01) = -4.605$

e) $e^{2x} = 10$ $\quad x = \dfrac{\ln(10)}{2} = 1.151$

f) $2^{-3x} = 5$ $\quad x = \dfrac{\dfrac{\log(5)}{\log(2)}}{-3} = -0.774$

g) $2 \cdot 10^x = 50$ $\quad x = \log(25) = 1.398$

h) $3 \cdot e^{-x} = 7$ $\quad x = -\ln\left(\dfrac{7}{3}\right) = -0.847$

i) $2^{5-x} = 13$ $\quad x = \dfrac{\dfrac{\log(13)}{\log(2)} - 5}{-1} = 1.2996$

j) $10^{4-5x} = 0.75$ $\quad x = \dfrac{\log(0.75) - 4}{-5} = 0.825$

k) $2 \cdot e^{1+2x} = 9$ $\quad x = \dfrac{\ln(4.5) - 1}{2} = 0.252$

l) $3.2 \cdot e^{-2.5x} = 70.13$ $\quad x = \dfrac{\ln\left(\dfrac{70.13}{3.2}\right)}{-2.5} = -1.235$

m) $3 \cdot e^{\sqrt{x}} + 1 = 22$ $\quad x = (\ln(7))^2 = 3.787$

n) $\dfrac{1}{2^{1.73x}} = 10$ $\quad x = \dfrac{\dfrac{\log(10)}{\log(2)}}{-1.73} = -1.92$

o) $\dfrac{15}{1 + 3 \cdot e^{-2x}} = 7$ $\quad x = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\dfrac{15}{7} - 1}{3}\right)}{-2} = 0.483$

p) $\sqrt[3]{10^{3x^2}-5}=4 \rightarrow 10^{3x^2}-5=4^3=64 \rightarrow 10^{3x^2}=64+5=69 \rightarrow 3x^2=\log(69)$

$\rightarrow x^2=\dfrac{\log(69)}{3} \rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{\log(69)}{3}}=\pm 0.783$

Exercice 23

a) $4^{x+1}\cdot 4^{x+6}=11 \rightarrow 4^{2x+7}=11 \rightarrow 2x+7=\dfrac{\log(11)}{\log(4)} \rightarrow x=\dfrac{\dfrac{\log(11)}{\log(4)}-7}{2}=-2.635$

b) $\dfrac{5^{3x-2}}{5^{7-x}}=2 \rightarrow 5^{4x-9}=2 \rightarrow 4x-9=\dfrac{\log(2)}{\log(5)} \rightarrow x=\dfrac{\dfrac{\log(2)}{\log(5)}+9}{4}=2.358$

c) $8^{3x}=2^{2x-2} \rightarrow 2^{9x}=2^{2-4x} \rightarrow 9x=2-4x \rightarrow 13x=2 \rightarrow x=\dfrac{2}{13}=0.154$

d) $9^{5x+1}=27^{2-4x} \rightarrow 3^{10x+2}=3^{6-12x} \rightarrow 10x+2=6-12x \rightarrow 22x=4$

$\rightarrow x=\dfrac{4}{22}=\dfrac{2}{11}=0.182$

e) $\dfrac{1}{e^{3x+1}}=\dfrac{e^{-x}}{e^{x-5}} \rightarrow e^{-3x-1}=e^{-2x+5} \rightarrow -3x-1=-2x+5 \rightarrow x=-6$

f) $2^{3x+1}=5^{x+2} \rightarrow 2\cdot 8^x=25\cdot 5^x \rightarrow \left(\dfrac{8}{5}\right)^x=\dfrac{25}{2} \rightarrow 1.6^x=12.5 \rightarrow x=\dfrac{\log(12.5)}{\log(1.6)}=5.374$

g) $3^{2-x}=5^{4x-1} \rightarrow 9\cdot 3^{-x}=625^x\cdot 5^{-1} \rightarrow (625\cdot 3)^x=9\cdot 5 \rightarrow 1875^x=45$

$\rightarrow x=\dfrac{\log(45)}{\log(1875)}=0.505$

h) $10^x=23^{527} \rightarrow x=\log(23^{527})=527\log(23)=717.631$

i) $e^{x+3}=123^{456} \rightarrow x+3=\ln(123^{456})=456\ln(123)=2194.356 \rightarrow x=2191.356$

j) $47^{0.5-2x}=513^{824} \rightarrow 0.5-2x=\log_{47}(513^{824})=824\log_{47}(513)=1335.523$

$\rightarrow x=\dfrac{1335.523-0.5}{-2}=-667.515$

k) $5e^x+13=7e^{x+2} \rightarrow 5e^x+13=7e^2e^x \rightarrow 13=7e^2e^x-5e^x \rightarrow 13=(7e^2-5)e^x$

$\rightarrow e^x=\dfrac{13}{7e^2-5} \rightarrow x=\ln\left(\dfrac{13}{7e^2-5}\right)=-1.279$

l) $5^{2x}+3.8=19.2\cdot 5^x$ $\rightarrow$ (en posant $y=5^x$) $y^2+3.8=19.2y \rightarrow y^2-19.2y+3.8=0$

$\rightarrow y=19$ ou $y=0.2 \rightarrow 5^x=19$ ou $5^x=0.2$

$\rightarrow x=\dfrac{\log(19)}{\log(5)}=1.829$ ou $x=\dfrac{\log(0.2)}{\log(5)}=-1$

Exercice 24

$35'000=30'000\cdot\left(1+\dfrac{2.3}{100}\right)^n \rightarrow 1.023^n=\dfrac{35'000}{30'000} \rightarrow n=\dfrac{\log\left(\dfrac{35'000}{30'000}\right)}{\log(1.023)}=6.7789867$

$\rightarrow n=6$ ans 9 mois 10 jours

Exercice 25

$$\left(1+\frac{1.8}{100}\right)^{n}=2 \quad\rightarrow\quad n=\frac{\log(2)}{\log(1.018)}=38.85371982 \quad\rightarrow\quad n=38 \text{ ans } 10 \text{ mois } 7 \text{ jours}$$

Exercice 26

$$n=\frac{\log\left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)}{\log(1+i)}$$

Exercice 27

$$1.618^{t}=15 \quad\rightarrow\quad t=\log_{1.618}(15)=\frac{\log(15)}{\log(1.618)}=5.627809 \text{ ans}$$

Exercice 28

a) 100
b) $k=\ln(1.8)=0.588$
c) $T=\log_{1.8}(2)=1.179$ jour
d) $Q(13\,T)=2^{13}\cdot 100=819'200$
e) $\log_{1.8}(3)=1.869$ jour

Exercice 29

$$T=\frac{\ln(2)}{0.8}=0.866$$

Exercice 30

$$a^{17}=2 \quad\rightarrow\quad a=2^{1/17}=1.0416$$

Exercice 31

a) $T=\log_{1.0125}(2)=55.8$ ans
b) $(1+i)^{20}=2 \quad\rightarrow\quad i=2^{1/20}-1=0.035=3.5\%$
c) $k=\ln(1.02)=0.0198 \quad\rightarrow\quad Q(t)=Q_0\cdot e^{0.0198\cdot t}$

Exercice 32

$$T=12.5 \quad\rightarrow\quad (1+i)^{12.5}=2 \quad\rightarrow\quad i=2^{1/12.5}-1=0.057=5.7\%$$

Exercice 33

a) 80 mg
b) 1.5 h
c) $k=\frac{\ln(2)}{T}=\frac{\ln(2)}{1.5}=0.462$

Exercice 34

a) $A(30)=500\,e^{-0.103\cdot 30}=22.75$ désintégrations par seconde

b) $e^{-0.103t}=\frac{1}{2}=0.5 \;\rightarrow\; x=\frac{\ln(0.5)}{-0.103}=6.73$ ans

Exercice 38

a) $\log_{16}(x)=1.25 \;\rightarrow\; x=16^{1.25}=32$

b) $\ln(x)=3.4 \;\rightarrow\; x=e^{3.4}=29.964$

c) $\log(x)=-2.05 \;\rightarrow\; x=10^{-2.05}=0.00891$

d) $\log_x(13)=3 \;\rightarrow\; x^3=13 \;\rightarrow\; x=13^{1/3}=2.351$

e) $\log_x(13)=-5 \;\rightarrow\; x^{-5}=13 \;\rightarrow\; x=13^{-1/5}=0.599$

f) $\log_x(13)=\frac{5}{4} \;\rightarrow\; x^{5/4}=13 \;\rightarrow\; x=13^{4/5}=7.783$

g) $\log_x(13)=2 \;\rightarrow\; x^2=13 \;\rightarrow\; x=\pm 13^{1/2}=\pm 3.606$ → mais, comme x est la base d'un logarithme, x > 0, donc $x=3.606$

h) $4\log(5x)=9 \;\rightarrow\; x=\frac{10^{9/4}}{5}=35.566$

i) $3\ln(2x+1)=7 \;\rightarrow\; x=\frac{e^{7/3}-1}{2}=4.656$

j) $\log_2(1-x)+2=5 \;\rightarrow\; 1-x=2^{5-2}=8 \;\rightarrow\; x=1-8=-7$

k) $\log(-x)=-3 \;\rightarrow\; -x=10^{-3}=0.001 \;\rightarrow\; x=-0.001$

l) $\sqrt{\ln(x)}=1.5 \;\rightarrow\; \ln(x)=1.5^2=2.25 \;\rightarrow\; x=e^{2.25}=9.488$

m) $\log(5x+7)=-1 \;\rightarrow\; 5x+7=10^{-1}=0.1 \;\rightarrow\; x=\frac{0.1-7}{5}=-1.38$

n) $(\log_7(x)+2)^3=125 \;\rightarrow\; \log_7(x)+2=125^{1/3}=5 \;\rightarrow\; \log_7(x)=5-2=3 \;\rightarrow\; x=7^3=343$

o) $-4\ln(3x-5)+7=8 \ \rightarrow\ \ln(3x-5)=\dfrac{8-7}{-4}=-0.25 \ \rightarrow\ 3x-5=e^{-0.25}$
$\rightarrow\ x=\dfrac{e^{-0.25}+5}{3}=1.926$

p) $\log(\sqrt{x}+1.3)=0.11 \ \rightarrow\ \sqrt{x}+1.3=10^{0.11} \ \rightarrow\ \sqrt{x}=10^{0.11}-1.3=-0.012$
→ pas de solution

q) $\ln(5-3e^{2x})=0.9 \ \rightarrow\ 5-3e^{2x}=e^{0.9} \ \rightarrow\ e^{2x}=\dfrac{e^{0.9}-5}{-3} \ \rightarrow\ x=\dfrac{\ln\left(\dfrac{e^{0.9}-5}{-3}\right)}{2}=-0.0831$

r) $\dfrac{1}{4-2\log(7x+6)}=3 \ \rightarrow\ 4-2\log(7x+6)=\dfrac{1}{3} \ \rightarrow\ \log(7x+6)=\dfrac{4-\dfrac{1}{3}}{2}=\dfrac{11}{6}$
$\rightarrow\ 7x+6=10^{\frac{11}{6}} \ \rightarrow\ x=\dfrac{10^{\frac{11}{6}}-6}{7}=8.876$

Exercice 39 Résoudre

a) $\log(5x+4)=\log(2x+17) \ \rightarrow\ 5x+4=2x+17 \ \rightarrow\ x=\dfrac{17-4}{5-2}=\dfrac{13}{3}=4.333$

b) $\ln(x-2)+\ln(10)=\ln(3x+5) \ \rightarrow\ \ln((x-2)\cdot 10)=\ln(3x+5) \ \rightarrow\ (x-2)\cdot 10=3x+5$
$\rightarrow\ x=\dfrac{25}{7}=3.571$

c) $\log(x+7)-\log(5)=\log(x+1) \ \rightarrow\ \log\left(\dfrac{x+7}{5}\right)=\log(x+1) \ \rightarrow\ \dfrac{x+7}{5}=x+1$
$\rightarrow\ x+7=5(x+1) \ \rightarrow\ x=\dfrac{1}{2}=0.5$

d) $\ln(x-4)-\ln(2)=\ln(3-x) \ \rightarrow\ \ln\left(\dfrac{x-4}{2}\right)=\ln(3-x) \ \rightarrow\ \dfrac{x-4}{2}=3-x$
$\rightarrow\ x-4=2(3-x) \ \rightarrow\ x=\dfrac{10}{3}=3.333$ à rejeter → pas de solution

e) $\log(15x-6)-\log(3)=\log(x+4)+\log(2) \ \rightarrow\ \log\left(\dfrac{15x-6}{3}\right)=\log((x+4)\cdot 2)$
$\rightarrow\ \dfrac{15x-6}{3}=(x+4)\cdot 2 \ \rightarrow\ 15x-6=(x+4)\cdot 6 \ \rightarrow\ x=\dfrac{30}{11}=2.727$

f) $\ln(2x+9)-\ln(x-7)=3 \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{2x+9}{x-7}\right)=3 \;\rightarrow\; \frac{2x+9}{x-7}=e^3 \;\rightarrow\; 2x+9=e^3(x-7)$

$\rightarrow\; 2x+9=e^3x-7e^3 \;\rightarrow\; e^3x-2x=9+7e^3 \;\rightarrow\; (e^3-2)x=9+7e^3$

$\rightarrow\; x=\frac{9+7e^3}{e^3-2}=8.272$

g) $\log(2x+11)-1.5=\log(x+6) \;\rightarrow\; \log(2x+11)-\log(x+6)=1.5$

$\rightarrow\; \log\left(\frac{2x+11}{x+6}\right)=1.5 \;\rightarrow\; \frac{2x+11}{x+6}=10^{1.5} \;\rightarrow\; 2x+11=10^{1.5}(x+6)$

$\rightarrow\; 2x+11=10^{1.5}x+10^{1.5}\cdot 6 \;\rightarrow\; 10^{1.5}x-2x=11-10^{1.5}\cdot 6 \;\rightarrow\; (10^{1.5}-2)x=11-10^{1.5}\cdot 6$

$\rightarrow\; x=\frac{11-10^{1.5}\cdot 6}{10^{1.5}-2}=-6.034$ à rejeter → pas de solution

h) $\log_5(2x-1)+\log_5(x+3)=1 \;\rightarrow\; \log_5((2x-1)(x+3))=1$

$\rightarrow\; (2x-1)(x+3)=5^1=5 \;\rightarrow\; 2x^2+5x-8=0 \;\rightarrow\; x=1.108$ ou $x=-3.608$

la deuxième solution est à rejeter

i) $\log_2(1-5x)+\log_2(x)=\log_2(0.1-2x) \;\rightarrow\; \log_2((1-5x)x)=\log_2(0.1-2x)$

$\rightarrow\; (1-5x)x=0.1-2x \;\rightarrow\; -5x^2+3x-0.1=0 \;\rightarrow\; x=0.035$ ou $x=0.565$

la deuxième solution est à rejeter

j) $\ln(x^2+5x-1)+\ln(3)=2\ln(3x) \;\rightarrow\; \ln((x^2+5x-1)3)=\ln((3x)^2)$

$\rightarrow\; 3x^2+15x-3=9x^2 \;\rightarrow\; -6x^2+15x-3=0 \;\rightarrow\; x=0.219$ ou $x=2.281$

Exercice 40

a) $L=100+20\log(\frac{p}{2}) \rightarrow p=2\cdot 10^{\frac{L-100}{20}}$

b)

SON	Pression p [Pa]	Niveau L [dB] (SPL)
Seuil de l'audition	$2\cdot 10^{-5}$	0
Chambre à coucher calme, de nuit	$6.3\cdot 10^{-4}$	30
Conversation normale à une distance de 1 m	$2\cdot 10^{-2}$	60
Aspirateur à une distance de 1 m	$6.3\cdot 10^{-2}$	70
Camion diesel à une distance de 10 m	0.63	90
Tronçonneuse à une distance de 1 m	6.3	110
Seuil de la douleur	63	130
Avion à réaction à une distance de 50 m	200	140

c) $L_1=100+20\log(\frac{p_1}{2})$ et $L_2=100+20\log(\frac{p_2}{2})$

$\rightarrow L_1-L_2=20(\log(\frac{p_1}{2})-\log(\frac{p_2}{2}))=20\log(\frac{p_1}{p_2})$

d)

Si le rapport $\frac{p_1}{p_2}$ vaut 2, alors la différence L_1-L_2 vaut $20\log(2)=66.44$

Si la différence L_1-L_2 vaut 20, alors le rapport $\frac{p_1}{p_2}$ vaut $10^1=10$

Exercice 41

a) $A = -8272 \ln(3 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{12}) = -8272 \ln(3 \cdot 10^{-1}) = 9959$ ans

b) $C = e^{\frac{25000}{-8272}} \cdot 10^{-12} = 4.87 \cdot 10^{-14}$

c) $C = e^{\frac{A}{-8272}} \cdot 10^{-12}$

Exercice 43

$0.12 + 7 = 5 \log\left(\frac{d}{3.2616}\right) - 5 \;\rightarrow\; x = 3.2616 \cdot 10^{\frac{7.12+5}{5}} = 865.8$ A-L

Exercice 44

a) $M = \frac{\log(1.5 \cdot 10^{15}) - 4.4}{1.5} = 7.2$

b) $E = 10^{1.5 \cdot 4.2 + 4.4} = 5.011 \cdot 10^{10}$ joules

Exercice 45

a) $T(5) = (60-18) \cdot e^{-0.08 \cdot 5} + 18 = 46$ °C

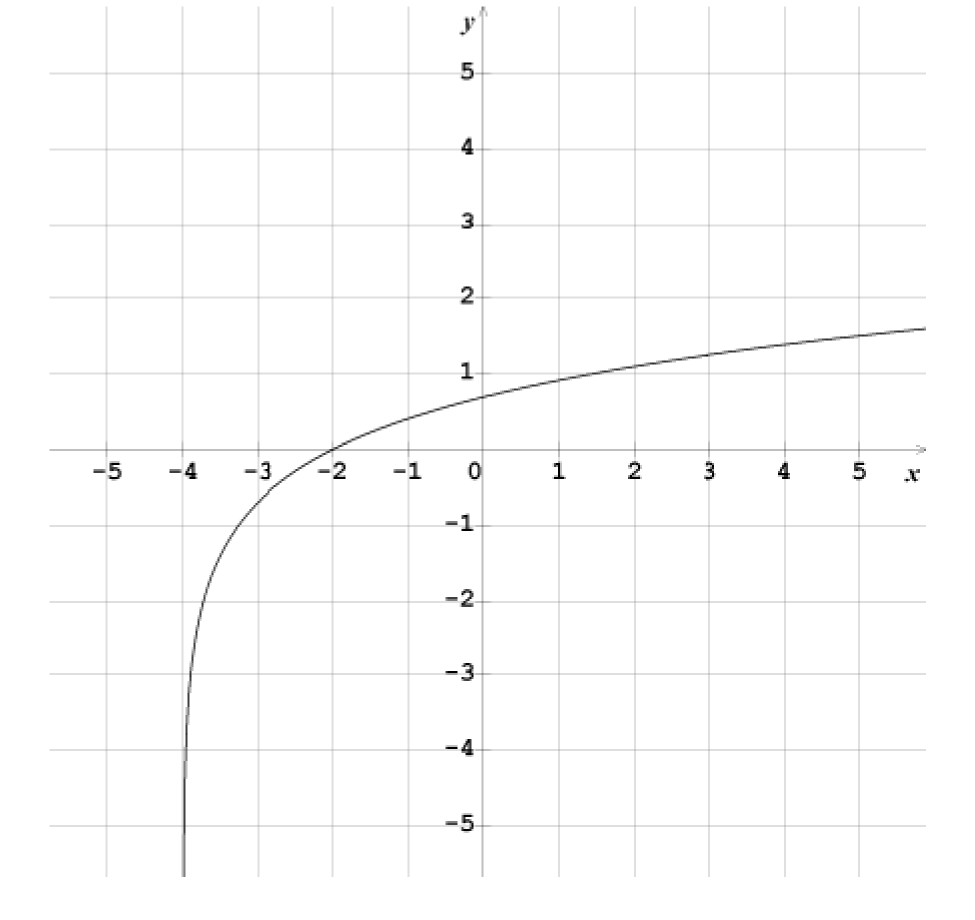
b) $40 = (60-18) \cdot e^{-0.08\mathrm{t}} + 18 \;\rightarrow\; e^{-0.08\mathrm{t}} = \frac{40-18}{60-18} = \frac{22}{42} = \frac{11}{21} \;\rightarrow\; x = \frac{\ln\left(\frac{11}{21}\right)}{-0.08} = 8.08284$

$\rightarrow\; x = 8$ min 5 sec

Exercice 46 $f(x) = \ln(0.5x + 2)$

a)

x	*f*(x)
−3.9	−3
−3.5	−1.4
−3	−0.7
−2	0
−1	0.4
0	0.7
1	0.9
2	1.1
3	1.3
4	1.4
5	1.5



b) D'après le graphique, quelle est approximativement la valeur de x pour laquelle *f*(x) égale 1. Répondre à 0.1 près et montrer la valeur sur le graphique.

1.5

c) À l'aide d'une équation, calculer au millième près la solution de la question b).

$$\ln(0.5x + 2) = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{e - 2}{0.5} = 1.437$$

Exercice 47

$$k = \frac{\ln(2)}{T} = \frac{\ln(2)}{1590} = 4.36 \cdot 10^{-4}$$

Exercice 48

$(1+i)^t = 1/3 \;\rightarrow\; 0.995^t = 1/3 \;\rightarrow\; t = \log_{0.995}(1/3) = 219.17$ ans

Exercice 49

$$1000\cdot1.02^t=600\cdot1.03^t \;\rightarrow\; \frac{1.02^t}{1.03^t}=\frac{600}{1000} \;\rightarrow\; \left(\frac{1.02}{1.03}\right)^t=0.6 \;\rightarrow\; t=\log_{\frac{1.02}{1.03}}(0.6)=52.36 \text{ ans}$$

Exercice 51

a) $5x+7<3 \;\rightarrow\; x<\frac{3-7}{5} \;\rightarrow\; x<-0.8 \;\rightarrow\; x\in]-\infty;-0.8[$

b) $-2x-9\geqslant1 \;\rightarrow\; x\leqslant\frac{1+9}{-2} \;\rightarrow\; x\leqslant-5 \;\rightarrow\; x\in]-\infty;-5]$

c) $4-10x\leqslant0 \;\rightarrow\; x\geqslant0.4 \;\rightarrow\; x\in[0.4;\infty[$

d) $3x+8>-x+1 \;\rightarrow\; 4x>-7 \;\rightarrow\; x>-1.75 \;\rightarrow\; x\in]-1.75;\infty[$

e) $-4x-5\leqslant6x \;\rightarrow\; -5\leqslant10x \;\rightarrow\; -0.5\leqslant x \;\rightarrow\; x\in[-0.5;\infty[$

f) $\frac{x}{2}+7>3 \;\rightarrow\; x>(3-7)\cdot2 \;\rightarrow\; x>-8 \;\rightarrow\; x\in]-8;\infty[$

g) $5-\frac{x}{4}>11 \;\rightarrow\; 5-11>\frac{x}{4} \;\rightarrow\; (5-11)\cdot4>x \;\rightarrow\; -24>x \;\rightarrow\; x\in]-\infty;-24[$

Exercice 52

a) Soit f : $y=3\sqrt{5-x}$.

a1)	L’image de −31	18
a2)	L’image de 1	6
a3)	L’image de 21	pas d’image
a4)	La pré-image de 24	−59
a5)	La pré-image de −6	pas de pré-image
	ordonnée à l’origine	6.708
	zéro	5

b) Soit g : $y=(x+5)^2+7$.

b1)	L’image de −20	232
b2)	Les pré-images de 151	7 et −17
b3)	Les pré-images de 3	pas de pré-images
	ordonnée à l’origine	32
	zéros	pas de zéros

c) Soit h : $y = 2\log(3x-8)$.

c1)	L'image de 54	4.375
c2)	L'image de 2	pas d'image
c3)	La pré-image de 5	108.076
c4)	La pré-image de −1	2.772
	ordonnée à l'origine	pas d'ordonnée à l'origine
	zéro	3

d) Soit i : $y = 3e^{-2x}$.

d1)	L'image de 0.7	0.74
d2)	L'image de −0.8	14.859
d3)	La pré-image de 15	−0.805
d4)	La pré-image de −3	pas de pré-image
	ordonnée à l'origine	3
	zéro	pas de zéro

<u>Exercice 53</u>

a) f : $y = \sqrt{x+8}$ Dom(f) = [−8 ; +∞[

b) g : $y = \sqrt{-9-x}$ Dom(g) =]−∞ ; −9]

c) h : $y = \log(x-5)$ Dom(h) =]5 ; +∞[

d) i : $y = \ln(2x-6)$ Dom(i) =]3 ; +∞[

e) j : $y = \log(-7-x)$ Dom(j) =]−∞ ; −7[

f) k : $y = \ln(5-2x)$ Dom(k) =]−∞ ; 2.5[

Exercice 55

a) f : $y=5-4x$ f^{-1} : $y=\dfrac{x-5}{-4}$

b) g : $y=x^{2/3}$ g^{-1} : $y=x^{3/2}$

c) h : $y=4-\sqrt{3-5x}$ h^{-1} : $y=\dfrac{(4-x)^2-3}{-5}$ restreinte à $x\leqslant 4$

d) i : $y=\dfrac{3x+2}{5x-7}$ i^{-1} : $y=\dfrac{7x+2}{5x-3}$

e) j : $y=8+\log(4x-1)$ j^{-1} : $y=\dfrac{10^{x-8}+1}{4}$

f) k : $y=\ln(5x+2)-4$ k^{-1} : $y=\dfrac{e^{x+4}-2}{5}$

g) l : $y=-2\cdot e^{4x+3}$ l^{-1} : $y=\dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{-2}\right)-3}{4}$

h) m : $y=5\cdot 10^{7-2x}$ m^{-1} : $y=\dfrac{\log\left(\dfrac{x}{5}\right)-7}{-2}$

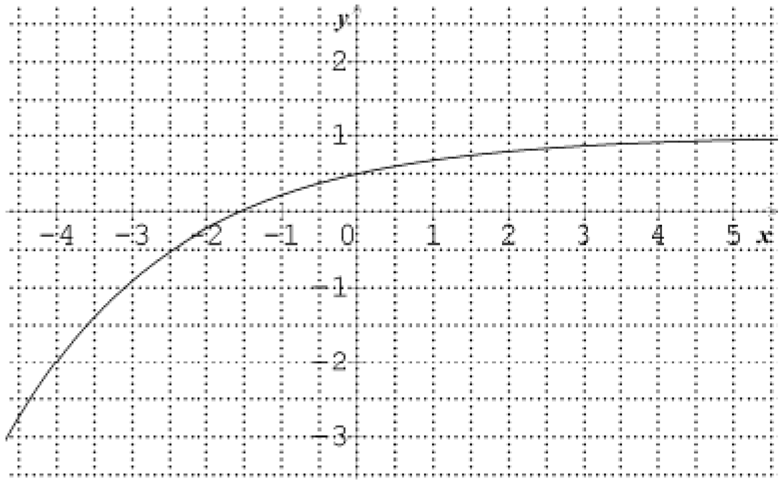
Exercice 60

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–2	–0.9	–0.2	0.2	0.5	0.7	0.8	0.9	0.9

AH : $y=1$

Domaine : R

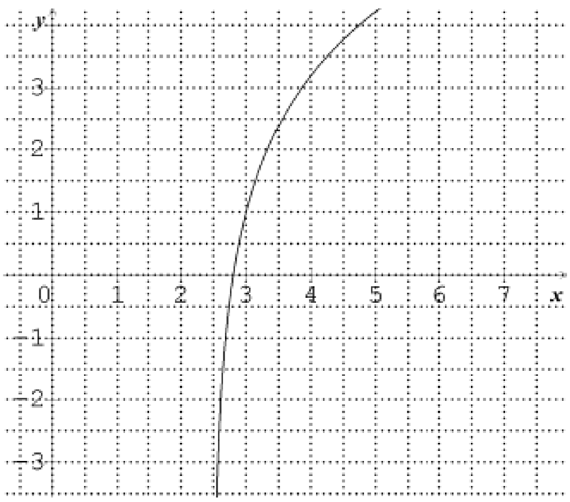


b)

x	2.7	3	3.5	4	4.5	5			
y	–0.8	1	2.4	3.2	3.8	4.2			

AV : $x=2.5$

Domaine : $x>2.5$

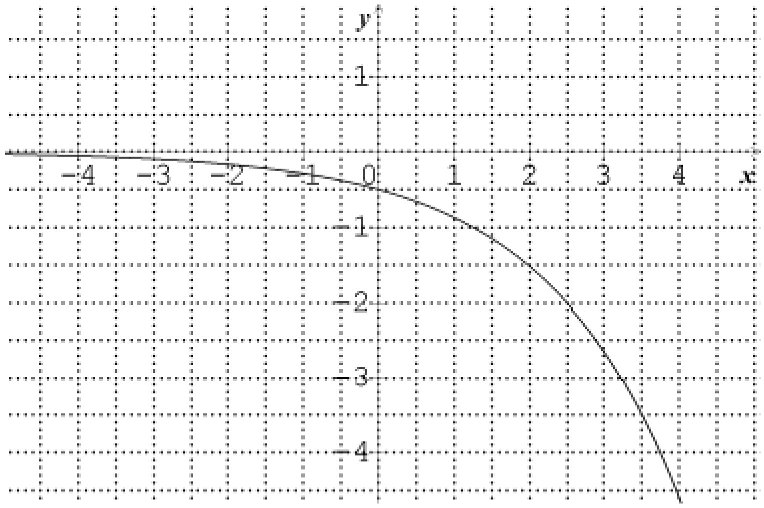


c)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–0.05	–0.09	–0.16	–0.29	–0.5	–0.87	–1.52	–2.64	–4.59

AH : $y = 0$

Domaine : R

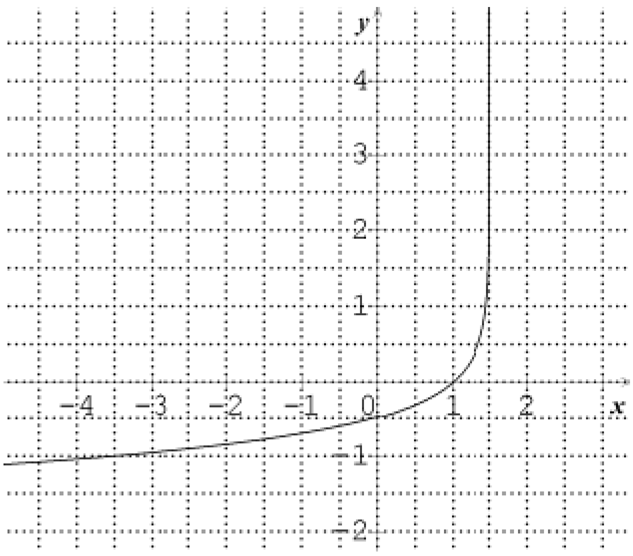


d)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	1.2	1.3	1.4
y	–1	–0.95	–0.85	–0.7	–0.5	0	0.2	0.4	0.7

AV : $x = 1.5$

Domaine :
$x < 1.5$

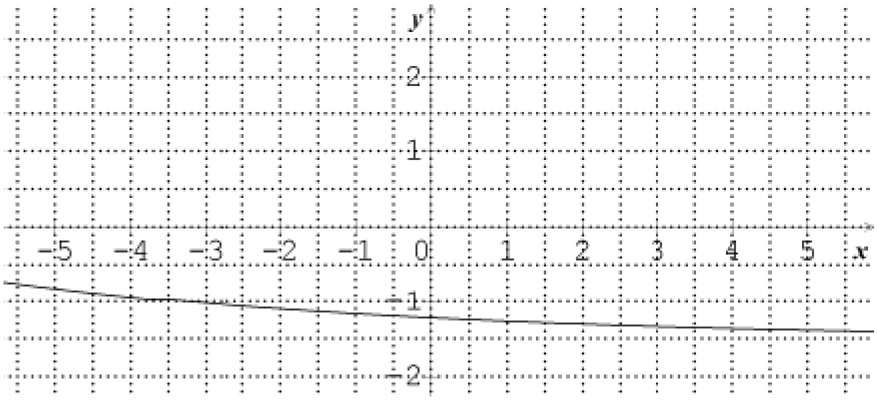


e)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–0.9	–1	–1.1	–1.2	–1.2	–1.3	–1.3	–1.3	–1.4

AH : $y=-1.5$

Domaine : R

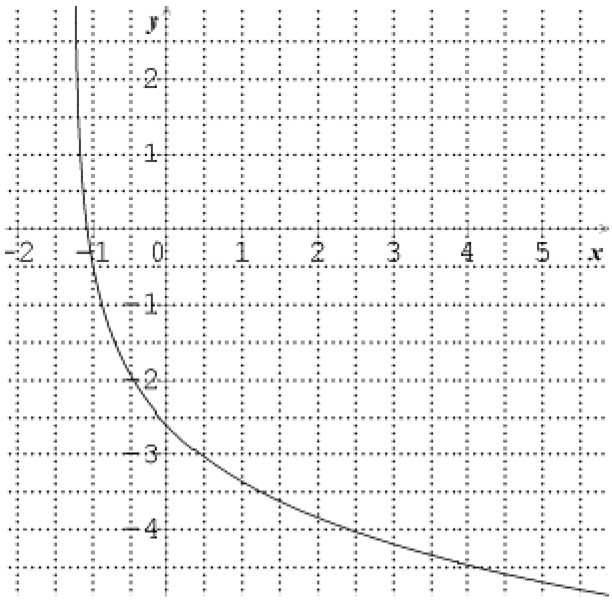


f)

x	–1.24	–1.2	–1.1	–1	0	1	2	3	4
y	3.7	1.6	0.2	–0.5	–2.6	–3.4	–3.8	–4.2	–4.5

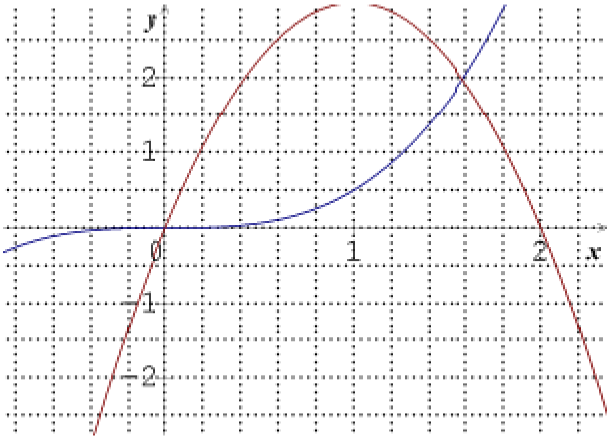
AV : $x=-1.25$

Domaine : $x>-1.25$



Exercice 61

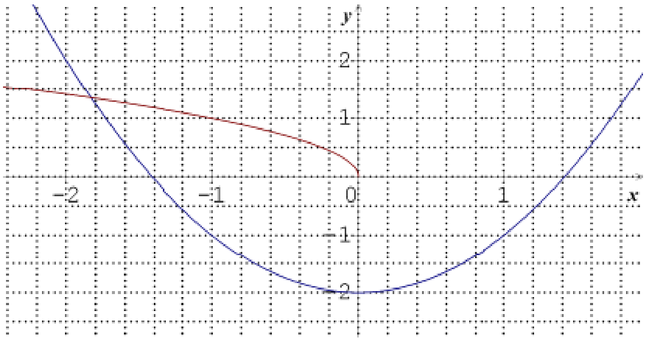
a) $0.5x^3 = -3x^2 + 6x$



Les deux solutions sont :

0 et environ 1.6

b) $x^2 - 2 = \sqrt{-x}$



La solution est environ –1.82

c) $2 \cdot e^{0.7x} = \log(2x+5)+0.7$ solution détaillée :

Posons $f(x)=2 \cdot e^{0.7x}$ et $g(x)=\log(2x+5)+0.7$

f présente une asymptote horizontale $y=0$
g présente une asymptote verticale $x=-2.5$
g est définie pour $x>-2.5$

Premier tableau de valeurs :

x	-3	-2.4	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.24	0.37	0.49	0.99	2	4.03	8.11	16.33
$g(x)$	/	0	0.7	1.18	1.4	1.55	1.65	1.74

Graphes approximatifs :

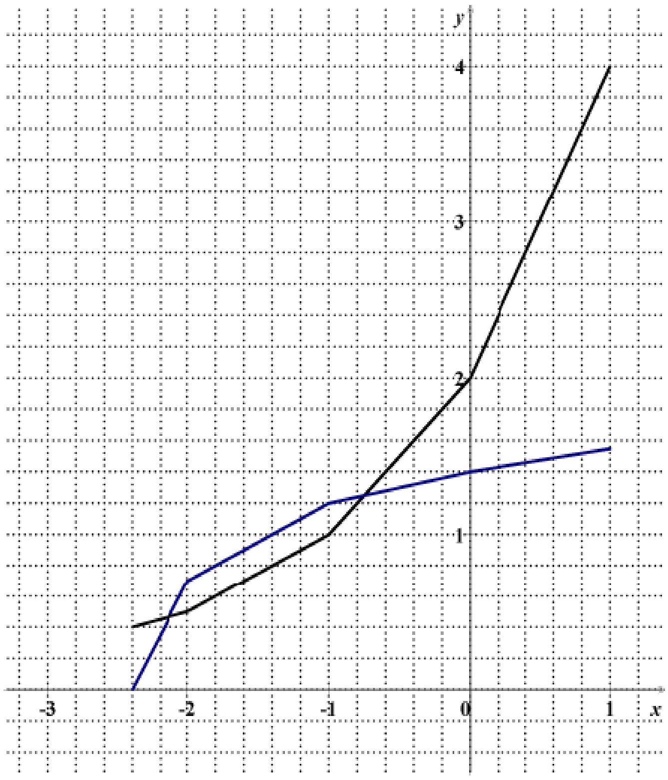
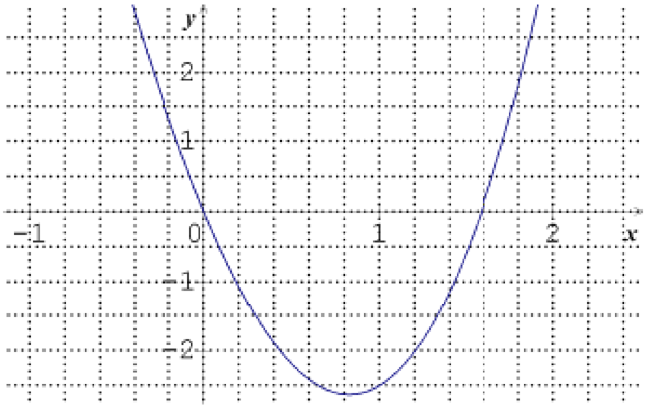


Tableau plus précis pour trouver les solutions au dixième :

x	-2.3	$-2,2$	-2.1	-2	...	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6
$f(x)$	0.4	0.43	0.46	0.49	...	1.07	1.14	1.23	1.31
$g(x)$	0.3	0.48	0.6	0.7	...	1.21	1.23	1.26	1.28

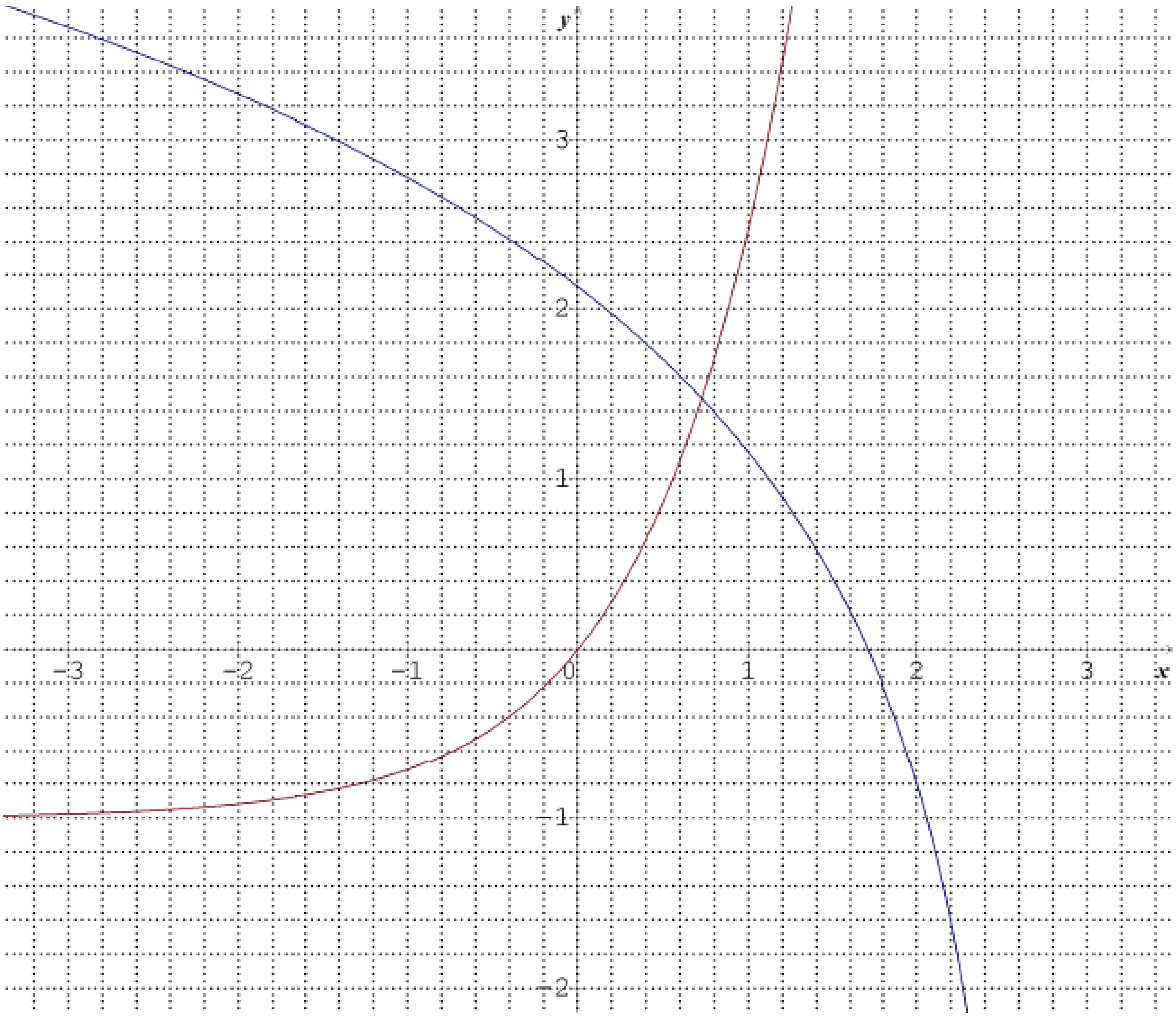
Une solution est $x=-2.2$ et l'autre solution est comprise entre -0.7 et -0.6

Exercice 62



Les zéros de $f(x) = 0.5x^3 + 3x^2 - 6x$ sont 0 et environ 1.6

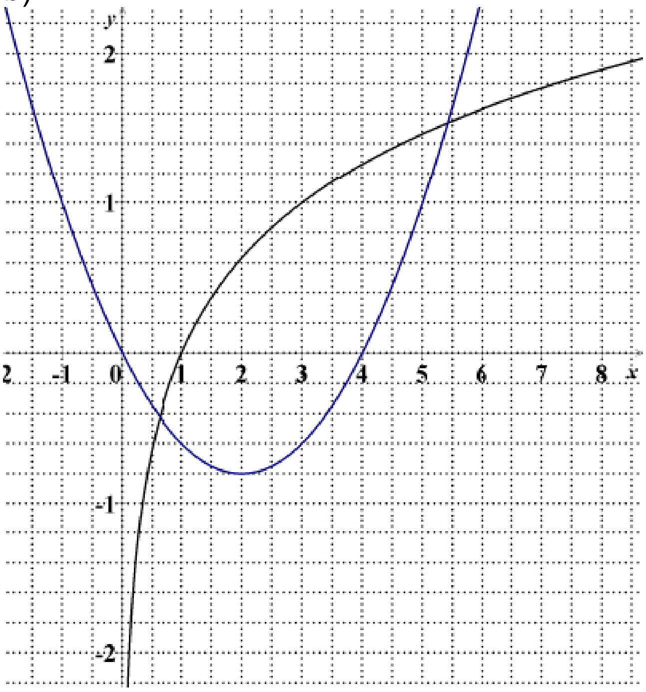
Exercice 63



La solution est environ 0.73

<u>Exercice 64</u>

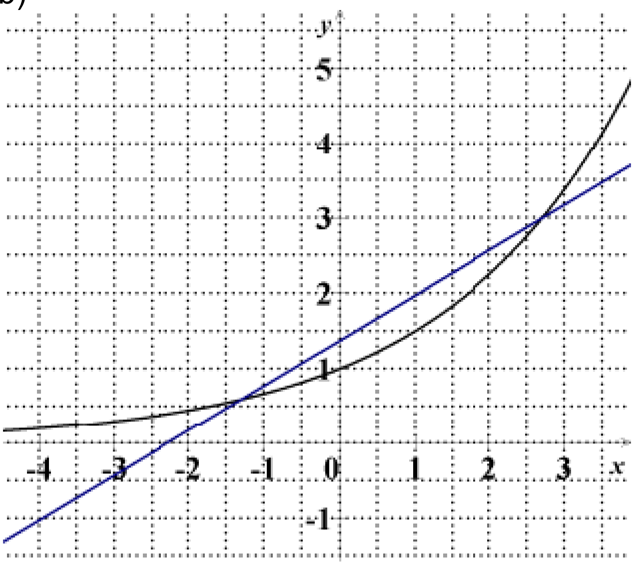
a) a vaut 3
b)



Les solutions sont environ 0.7 et 5.4

<u>Exercice 65</u>

a) a vaut 1.5
b)

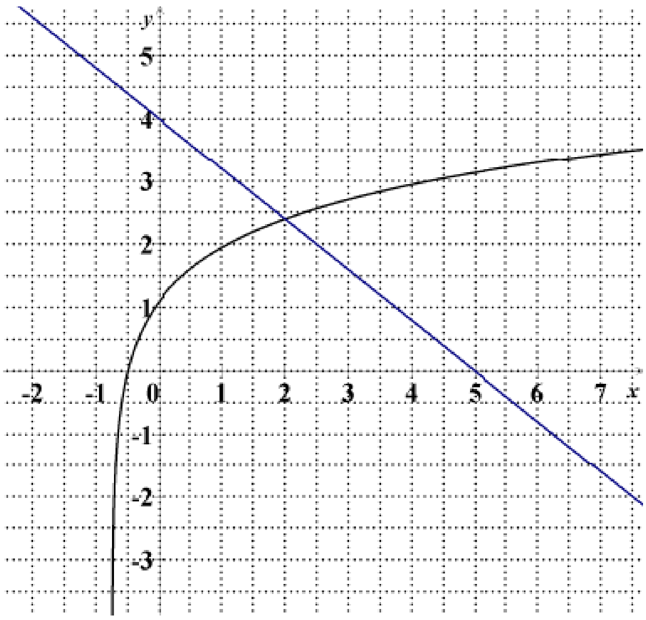


Les solutions sont environ −1.3 et 2.7

Exercice 66

Soit la fonction définie par $f(x)=\ln(4x+3)$

a) $4x+3>0 \rightarrow x>-0.75$ → Dom(f) =]−0.75 ; +∞[
b) Représenter graphiquement cette fonction
c) AV : x = −0.75
d) Ordonnée à l'origine = $f(0)=\ln(3)=1.0986$
e) Zéro = solution de $\ln(4x+3)=0 \rightarrow x=\dfrac{1-3}{4}=-0.5$
f) Image de 403 = $f(403)=\ln(1615)=7.387$
g) Pré-image de 4.25 = solution de $\ln(4x+3)=4.25 \rightarrow x=\dfrac{e^{4.25}-3}{4}=16.776$
h) Réciproque de f : $x=\ln(4y+3) \rightarrow y=\dfrac{e^{x}-3}{4}$
i) Résoudre graphiquement l'équation $\ln(4x+3)=4-0.8x$

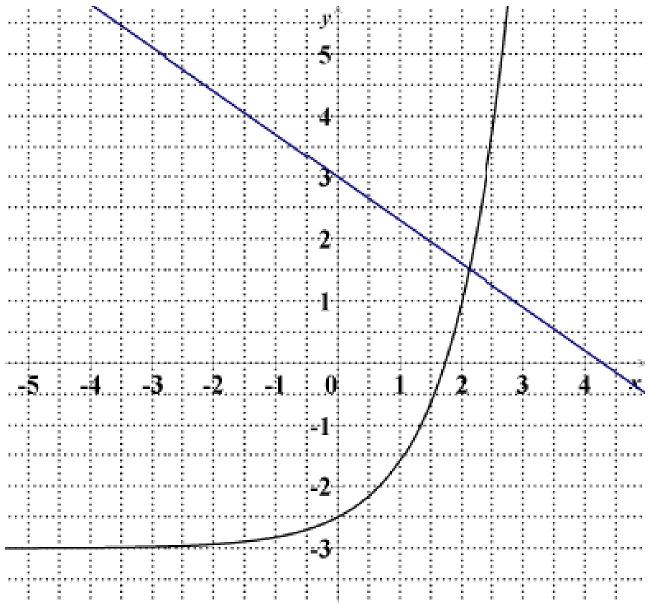


La solution vaut environ 2

Exercice 67

Soit la fonction définie par $f(x)=2^{1.5x-1}-3$

a) Dom(f) = R
b) Représenter graphiquement cette fonction
c) AH : y = −3
d) Ordonnée à l'origine = $f(0)=2^{-1}-3=-2.5$
e) Zéro = solution de $2^{1.5x-1}-3=0 \rightarrow x=\dfrac{\log_2(3)+1}{1.5}=1.723$
f) Image de 4.5 = $f(4.5)=2^{6.75-1}-3=50.817$
g) Pré-image de 150 = solution de $2^{1.5x-1}-3=150 \rightarrow x=\dfrac{\log_2(153)+1}{1.5}=5.505$
h) Réciproque de f : $x=2^{1.5y-1}-3 \rightarrow y=\dfrac{\log_2(x+3)+1}{1.5}$
i) Résoudre graphiquement l'équation $2^{1.5x-1}-3=3-0.7x$



La solution vaut environ 2.1

Résumé du cours

Puissances et racines

Soient p et q des entiers strictement positifs ; r et s des nombres réels.

$a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$ $\quad a^p = aa...a$ (a écrit p fois)

$a^{-q} = \dfrac{1}{a^q}$ $\quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ $\quad a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ $\quad a^{-\frac{1}{q}} = \dfrac{1}{\sqrt[q]{a}}$

$a^{r+s} = a^r a^s$ $\quad a^{r-s} = \dfrac{a^r}{a^s}$ $\quad a^{rs} = (a^r)^s$ $\quad a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$ $\quad (ab)^r = a^r b^r$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

Remarque : Certaines de ces définitions ou propriétés nécessitent des restrictions sur a ou sur b (il faut parfois exclure 0 ou les valeurs négatives).

Équations avec des puissances et des racines

Soit l'équation $x^r = a$, avec $a \neq 0$ et $r \neq 0$

Cette équation a pour solution : $x = a^{1/r}$, sauf dans les cas suivants :

si $a > 0$ et r est un nombre rationnel qui, sous forme de fraction réduite, possède un numérateur pair, alors $x = \pm a^{1/r}$

si $a < 0$ et r n'est pas un nombre rationnel qui, sous forme de fraction réduite, possède un numérateur impair et un dénominateur impair, alors l'équation n'a pas de solution.

Équations de la forme : $a \cdot (f(x))^r + b = c$

poser : $y = f(x)$

résoudre : $y^r = \dfrac{c-b}{a}$

puis résoudre : $f(x) = y$

Une <u>exponentielle de base a</u> est une fonction de la forme a^x , avec $a>0$ et $a\neq 1$

L'<u>exponentielle naturelle</u> est la fonction e^x , obtenue par limite de $\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]^x$ quand l'entier *n* tend vers l'infini.

Un <u>logarithme en base *a* de *y*</u>, avec $a>0$ et $a\neq 1$, est défini par l'équivalence suivante :

$$\boxed{\log_a(y)=x \qquad \leftrightarrow \qquad a^x=y}$$

En d'autres termes, $\log_a(y)$ est la solution *x* de l'équation $a^x=y$

Cas particuliers :

en base 10 : <u>logarithmes décimaux</u> $\log_{10}(x)$ ou noté simplement $\log(x)$
en base *e* : <u>logarithmes naturels</u> $\log_e(x)$ ou noté simplement $\ln(x)$

<u>Propriétés des logarithmes</u>

$$\log_a(x)=\frac{\log(x)}{\log(a)}$$

$$\log_a(x^r)=r\log_a(x)$$

$$\log_a(u)+\log_a(v)=\log_a(u\,v)$$

$$\log_a(u)-\log_a(v)=\log_a(\frac{u}{v})$$

$$\log_a(1)=0$$

Domaine de définition de $\log_a(x)$: $x>0$

Équations exponentielles

L'équation $a^x = b$ a pour unique solution $x = \log_a(b)$ si $b > 0$
et n'a pas de solution réelle si $b \leqslant 0$

Équations de la forme : $p \cdot a^{f(x)} + q = r$

poser : $y = f(x)$

résoudre : $a^y = \dfrac{r-q}{p}$

puis résoudre : $f(x) = y$

Équations de la forme : $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

résoudre : $f(x) = g(x)$

Équations de la forme : $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

résoudre : $f(x) \cdot \log(a) = g(x) \cdot \log(b)$

Équations de la forme : $p \cdot a^{2x} + q \cdot a^x + r = 0$

poser : $y = a^x$

résoudre : $p\,y^2 + q\,y + r = 0$

puis résoudre : $a^x = y$

Équations logarithmiques

L'équation $\log_a(x)=b$ a pour unique solution $x=a^b$

Équations de la forme : $\log_x(p)=q$

résoudre : $x^q=p$

Équations de la forme : $p\cdot\log_a(f(x))+q=r$

poser : $y=f(x)$

résoudre : $\log_a(y)=\dfrac{r-q}{p}$

puis résoudre : $f(x)=y$

Équations de la forme : $\log_a(f(x))=\log_a(g(x))$

résoudre : $f(x)=g(x)$

puis éliminer les éventuelles valeurs de x pour lesquelles $f(x)\leqslant 0$ ou $g(x)\leqslant 0$

Équations de la forme : $\log_a(f(x))+\log_a(g(x))=\log_a(h(x))$

résoudre : $f(x)g(x)=h(x)$

puis éliminer les éventuelles valeurs de x pour lesquelles $f(x)\leqslant 0$ ou $g(x)\leqslant 0$ ou $h(x)\leqslant 0$

Équations de la forme : $\log_a(f(x))-\log_a(g(x))=\log_a(h(x))$

résoudre : $\dfrac{f(x)}{g(x)}=h(x)$

puis éliminer les éventuelles valeurs de x pour lesquelles
$f(x)\leqslant 0$ ou $g(x)\leqslant 0$ ou $h(x)\leqslant 0$

Lois exponentielles

Intérêts composés :

$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$	$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$	$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$	$n = \log_{1+i}\left(\frac{C_n}{C_0}\right)$

Croissance exponentielle d'une quantité en fonction du temps :

$Q(t) = Q_0 \cdot a^t$ ou $Q(t) = Q_0 \cdot e^{k \cdot t}$ avec $a > 1 \quad , \quad e^k = a \quad , \quad k = \ln(a)$	Période de doublement $T = \log_a(2)$ ou $T = \frac{\ln(2)}{k}$	Constantes *a* et *k* en fonction de la période de doublement $a = 2^{\frac{1}{T}}$ $k = \frac{\ln(2)}{T}$

Décroissance exponentielle d'une quantité en fonction du temps :

$Q(t) = Q_0 \cdot a^{-t}$ ou $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ avec $a > 1 \quad , \quad e^k = a \quad , \quad k = \ln(a)$	Demi-vie $T = \log_a(2)$ ou $T = \frac{\ln(2)}{k}$	Constantes *a* et *k* en fonction de la demi-vie $a = 2^{\frac{1}{T}}$ $k = \frac{\ln(2)}{T}$

Exemples classiques : croissance bactérienne, décroissance radioactive, décroissance d'un médicament ou d'une substance toxique dans le sang, décroissance de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude, loi du refroidissement de Newton.

Lois logarithmiques

Exemples classiques : décibels, pH, datation par radio-isotopes, magnitude d'une étoile, magnitude d'un séisme, entropie.

Études de fonctions

Les fonctions de la forme : $f(x)=C\cdot a^{px+q}+D$

ont pour domaine de définition l'ensemble des nombres réels

ont pour ensemble des images l'intervalle]D ; + ∞[ou l'intervalle]−∞ ; D[(selon les valeurs des paramètres)

ont pour ordonnée à l'origine $f(0)=C\cdot a^{q}+D$

ont pour zéro l'éventuelle solution de $a^{px+q}=-\frac{D}{C}$

ont une asymptote horizontale $y=D$
(à gauche ou à droite, selon les valeurs des paramètres)

Les fonctions de la forme : $g(x)=C\cdot\log_a(px+q)+D$

ont pour domaine de définition l'intervalle qui est solution de l'inéquation $px+q>0$

ont pour ensemble des images l'ensemble des nombres réels

ont pour ordonnée à l'origine l'éventuelle valeur de $g(0)=C\cdot\log_a(q)+D$

ont pour zéro $\dfrac{a^{-\frac{D}{C}}-q}{p}$

ont une asymptote verticale $x=-\frac{q}{p}$
(en haut ou en bas, selon les valeurs des paramètres)

Résolution graphique d'équation

Les solutions d'une équation de la forme $f(x)=g(x)$

sont les abscisses des points d'intersection des graphes de f et de g

sont les zéros de $f-g$