# La Somme des Puissances à exposant constant des premiers Entiers consécutifs

## 1. OBJECTIFS

Soit $w \in \{0;1\}$. Posons $SP(r,n) = \sum_{x=w}^{n} x^r$,

avec $r, n \in \mathbf{N}$, $SP(0,n) = n+1-w$ pour $n > 0$ et $SP(0,0) = 0$.

Je me propose d'établir des formules pour SP(r,n), d'abord récursives ensuite directes, en faisant usage des **nombres de Bernoulli**, des **nombres de Stirling** et des **nombres Eulériens**. Ces formules me permettront en outre :

- d'exprimer tout nombre de Bernoulli en fonction :
    - des nombres de Stirling de première espèce
    - des nombres de Stirling de seconde espèce
    - des nombres Eulériens

- d'exprimer tout nombre de Stirling de seconde espèce en fonction :
    - des nombres Eulériens

- d'exprimer tout nombre Eulérien en fonction :
    - des nombres de Stirling de seconde espèce.

Je n'utiliserai que des **méthodes d'algèbre élémentaire**, d'où seront absents les outils du Calcul différentiel et intégral.

## 2. QUELQUES FORMULES RECURSIVES

Partant de : $\sum_{j=0}^{r+1} \binom{r+1}{j} x^j = (x+1)^{r+1}$ et sommant sur x, de 0 à n, il vient : $\sum_{j=0}^{r+1} \binom{r+1}{j} SP(j,n) = SP(r+1,n) + (n+1)^{r+1}$ d'où, en éliminant SP(r+1,n) :

| | |
|---|---|
| (2.1) | $\sum_{j=0}^{r} \binom{r+1}{j} SP(j,n) = (n+1)^{r+1}$ |

Partant de : $\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}(-1)^{r+1-j}x^j=(x-1)^{r+1}$ et sommant sur x, de 1 à n, il vient : $\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}(-1)^{r+1-j}SP(j,n)=SP(r+1,n)-n^{r+1}$ d'où, en éliminant SP(r+1,n) :

| | |
|---|---|
| (2.2) | $\sum_{j=0}^{r}\binom{r+1}{j}(-1)^{r-j}SP(j,n)=n^{r+1}$ |

Partant de : $x^r+(n+x)^r=2x^r+\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}n^{r-j}x^j$ et sommant sur x, de 1 à n, il vient :

| | |
|---|---|
| (2.3) | $SP(r,2n) = 2SP(r,n) + \sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}n^{r-j}SP(j,n)$ |

Partant de : $(n-x)^r=(-1)^r x^r+\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}(-1)^j n^{r-j}x^j$ et sommant sur x, de 0 à n, il vient : $SP(r,n)=(-1)^r SP(r,n)+\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}(-1)^j n^{r-j}SP(j,n)$ d'où :

| | |
|---|---|
| (2.4) | $SP(r,n)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}(-1)^j n^{r-j}SP(j,n)$ pour r impair |

Partant de : $((n+1)-x)^r=(-1)^r x^r+\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}(-1)^j(n+1)^{r-j}x^j$ et sommant sur x, de 1 à n, il vient : $SP(r,n)=(-1)^r SP(r,n)+\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}(-1)^j(n+1)^{r-j}SP(j,n)$ d'où :

| | |
|---|---|
| (2.5) | $SP(r,n)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}(-1)^j(n+1)^{r-j}SP(j,n)$ pour r impair |

En développant le carré de SP(r,n), on trouve :

$$(SP(r,n))^2 = SP(2r,n) + 2 \sum_{1\le y<z\le n} y^r z^r .$$

Or :

$$\sum_{1\le y<z\le n} y^r z^r = 1^r(2^r + 3^r + \ldots + n^r) + 2^r(3^r + 4^r + \ldots + n^r) + \ldots + (n-1)^r n^r$$

$$= n^r(1^r + \ldots + (n-1)^r) + (n-1)^r(1^r + \ldots + (n-2)^r) + \ldots + 2^r 1^r = \sum_{p=2}^{n} p^r SP(r,p-1) \quad \text{donc :}$$

| | |
|---|---|
| (2.6) | $SP(2r,n) = (SP(r,n))^2 - 2\sum_{p=2}^{n} p^r SP(r,p-1)$ |

Notons :

$$F(r,x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)$$
$$\widetilde{F}(r,x) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+r-1)$$
$$G(r,x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)(x-r)$$
$$\widetilde{G}(r,x) = (x-1)x(x-2)(x+1)\ldots(x+r-1)$$

On vérifie que :

$$G(r,x) - G(r,x+1) = -(r+1)F(r,x)$$
$$\widetilde{G}(r,x) - \widetilde{G}(r,x+1) = -(r+1)\widetilde{F}(r,x)$$
$$G(r,1) = \widetilde{G}(r,1) = 0$$

Donc $\displaystyle\sum_{x=1}^{n} F(r,x) = \frac{1}{r+1} G(r,n+1) = r!\binom{n+1}{r+1}$

$$\sum_{x=1}^{n} \widetilde{F}(r,x) = \frac{1}{r+1} \widetilde{G}(r,n+1) = r!\binom{n+r}{r+1}$$

Développons F(r,x) et $\widetilde{F}(r,x)$, il vient :

$$F(r,x) = \sum_{j=1}^{r} s(r,j)x^j \quad \text{et} \quad \widetilde{F}(r,x) = \sum_{j=1}^{r} \widetilde{s}(r,j)x^j$$

avec $s(r,j) = (-1)^{r-j}\widetilde{s}(r,j)$ et $\widetilde{s}(r,j) = (-1)^{r-j}s(r,j)$

Les s(r,j) sont les nombres de Stirling standards de première espèce.
Les $\widetilde{s}(r,j)$ sont les nombres de Stirling modifiés de première espèce.
En particulier, l'on a : $s(r,r) = \widetilde{s}(r,r) = 1$ $\quad s(r,1) = (-1)^{r-1}(r-1)!$ $\quad \widetilde{s}(r,1) = (r-1)!$

En reprenant les sommes de F(r,x) et de $\widetilde{F}(r,x)$, on obtient :

| | |
|---|---|
| (2.7) | $\sum_{j=1}^{r} s(r,j)SP(j,n) = r!\binom{n+1}{r+1}$ |
| (2.8) | $\sum_{j=1}^{r} \widetilde{s}(r,j)SP(j,n) = r!\binom{n+r}{r+1}$ |

## 3. FORMULE DE REARRANGEMENT

J'appelle ainsi la formule suivante :

$$\sum_{j=w}^{r}\pi_j\sum_{i=w}^{j}p(j,i)\lambda_i = \sum_{j=w}^{r}\lambda_j\sum_{i=j}^{r}p(i,j)\pi_i$$

preuve : $\sum_{j=w}^{r}\pi_j\sum_{i=w}^{j}p(j,i)\lambda_i =$

$$\begin{aligned}
&\pi_w p(w,w)\lambda_w \\
&+\pi_{w+1}p(w+1,w)\lambda_w + \pi_{w+1}p(w+1,w+1)\lambda_{w+1} \\
&+\ldots.. \\
&+\pi_r p(r,w)\lambda_w + \pi_r p(r,w+1)\lambda_{w+1}+\ldots..+\pi_r p(r,r)\lambda_r \\
&= \text{ (en sommant par colonnes)} \\
&\lambda_w\sum_{i=w}^{r}p(i,w)\pi_i + \lambda_{w+1}\sum_{i=w+1}^{r}p(i,w+1)\pi_i+\ldots..+\lambda_r\sum_{i=r}^{r}p(i,r)\pi_i \\
&= \sum_{j=w}^{r}\lambda_j\sum_{i=j}^{r}p(i,j)\pi_i
\end{aligned}$$

## 4. LEMME D'INVERSION

Soit $\sum_{j=w}^{r}\pi(j,r)S_j = \lambda_r$ avec r entier variable, où π(x,y) est une fonction de $\mathbf{N}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie pour $w \le x \le y \le r$ telle que $\forall\, z \in \mathbf{N} : \pi(z,z) \neq 0$.

Soit p(x,y) la fonction de $\mathbf{N}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie pour $w \le y \le x \le r$ par la condition :

$$\sum_{i=j}^{r}p(i,j)\pi(i,r) = \delta_{jr} \text{ avec } r \ge j \ge w \text{ et } \delta_{jr} = \begin{cases}1 \text{ si } j = r\\ 0 \quad \text{sinon}\end{cases}$$

Elle est parfaitement définie à partir de π(x,y), en effet :

$p(r,r)\,\pi(r,r) = 1 \Rightarrow p(r,r) = \dfrac{1}{\pi(r,r)}$

$p(r-1,r-1)\,\pi(r-1,r) + p(r,r-1)\,\pi(r,r) = 0 \Rightarrow p(r,r-1) = \dfrac{-\pi(r-1,r)}{\pi(r-1,r-1)\pi(r,r)}$ etc.

D'après la formule de réarrangement, on a :

$$\sum_{j=w}^{r} \pi(j,r) \sum_{i=w}^{j} p(j,i)\lambda_i = \sum_{j=w}^{r} \lambda_j \delta_{jr} = \lambda_r$$

Mais l'on a aussi, par hypothèse, $\sum_{j=w}^{r} \pi(j,r) S_j = \lambda_r$

J'affirme que $S_r = \sum_{i=w}^{r} p(r,i)\lambda_i$

Prouvons-le par récurrence sur r.
L'affirmation est vraie pour r = w :

$\sum_{j=w}^{r} \pi(j,r) S_j = \lambda_r$ devient $\pi(w,w)S_w = \lambda_w$ d'où $S_w = \frac{1}{\pi(w,w)} \lambda_w = p(w,w)\lambda_w$

Supposons l'affirmation vraie pour j, avec $w \le j < r$. Alors :

$$0 = \sum_{j=w}^{r} \pi(j,r)\Big(S_j - \sum_{i=w}^{j} p(j,i)\lambda_i\Big) = \pi(r,r)\Big(S_r - \sum_{i=w}^{r} p(r,i)\lambda_i\Big)$$

Donc l'affirmation est vraie aussi pour r, car $\pi(r,r) \neq 0$.

## 5. SP(r,n) EN FONCTION DES NOMBRES DE BERNOULLI

Appliquons le lemme d'inversion aux formules (2.1) et (2.2). Il vient :

| | |
|---|---|
| (5.1) | $SP(r,n) = \sum_{j=0}^{r} b(r,j)(n+1)^{j+1}$ avec b(r,j) défini par : $\sum_{i=j}^{r} b(i,j)\binom{r+1}{i} = \delta_{jr}$ |

| | |
|---|---|
| (5.2) | $SP(r,n) = \sum_{j=0}^{r} \tilde{b}(r,j) n^{j+1}$ avec $\tilde{b}(r,j)$ défini par : $\sum_{i=j}^{r} \tilde{b}(i,j)\binom{r+1}{i}(-1)^{r-i} = \delta_{jr}$ |

Afin de préciser les quantités b(r,j) et $\tilde{b}(r,j)$, définissons au préalable les nombres de Bernoulli, standards et modifiés.

Les nombres de Bernoulli standards $B_i$ sont définis par la condition : $\sum_{i=0}^{t} \binom{t+1}{i} B_i = \delta_{t0}$

Les nombres de Bernoulli modifiés $\tilde{B}_i$ sont définis par la condition : $\sum_{i=0}^{t} \binom{t+1}{i} (-1)^{t-i} \tilde{B}_i = \delta_{t0}$

A partir de ces définitions, on peut remonter jusqu'aux b(i,j) et $\tilde{b}(i,j)$.
Voici comment (pour b(i,j)) :

Posons $t = r - j$ et effectuons le changement d'indice : nouveau $i :=$ ancien $i + j$.

Cela donne : $\sum_{i=j}^{r}\binom{r-j+1}{i-j}B_{i-j} = \delta_{jr}$

Il ne reste plus qu'à travailler avec $\binom{r-j+1}{i-j}$ pour faire apparaître $\binom{r+1}{i}$.

On trouve : $\binom{r-j+1}{i-j} = \frac{(r+1-j)}{\binom{r+1}{j+1}}\frac{1}{i+1}\binom{i+1}{j+1}\binom{r+1}{i}$

Mais la première fraction ne dépend pas de i et vaut 1 quand $j = r$, on peut donc l'écarter de la somme et écrire :

$\sum_{i=j}^{r}\frac{1}{i+1}\binom{i+1}{j+1}B_{i-j}\binom{r+1}{i} = \delta_{jr}$ .

En comparant avec la définition de $b(i,j)$, on obtient :

| | |
|---|---|
| (5.3) | $b(i,j) = \frac{1}{i+1}\binom{i+1}{j+1}B_{i-j}$ |

De même, en partant de $\widetilde{B}_i$ , on obtient :

| | |
|---|---|
| (5.4) | $\widetilde{b}(i,j) = \frac{1}{i+1}\binom{i+1}{j+1}\widetilde{B}_{i-j}$ |

## 6. RELATION ENTRE NOMBRES DE BERNOULLI STANDARDS ET MODIFIES

Comme $SP(r,n) = SP(r,n+1) - (n+1)^r$, on a :

$\sum_{j=0}^{r} b(r,j)(n+1)^{j+1} = (\sum_{j=0}^{r}\widetilde{b}(r,j)(n+1)^{j+1}) - (n+1)^r$

d'où, par identification des coefficients :

| | | |
|---|---|---|
| (6.1) | $\widetilde{b}(r,j) = b(r,j)$ si $j \neq r - 1$, | $\widetilde{b}(r,r-1) = b(r,r-1) + 1$ |

et, par conséquent :

| | | |
|---|---|---|
| (6.2) | $\widetilde{B}_i = B_i$ si $i \neq 1$, | $\widetilde{B}_1 = -B_1 = \frac{1}{2}$ |

## 7. SP(r,n) EN FONCTION DES NOMBRES DE STIRLING DE 2e ESPECE

Appliquons le lemme d'inversion aux formules (2.7) et (2.8). Il vient :

(7.1) $$SP(r,n)=\sum_{j=1}^{r} S(r,j)j!\binom{n+1}{j+1} \text{ avec } S(r,j) \text{ défini par } \sum_{i=j}^{r} S(i,j)s(r,i)=\delta_{jr}$$

(7.2) $$SP(r,n)=\sum_{j=1}^{r} \widetilde{S}(r,j)j!\binom{n+j}{j+1} \text{ avec } \widetilde{S}(r,j) \text{ défini par } \sum_{i=j}^{r} \widetilde{S}(i,j)\widetilde{s}(r,i)=\delta_{jr}$$

Les $S(r,j)$ sont les nombres de Stirling standards de deuxième espèce.
Les $\widetilde{S}(r,j)$ sont les nombres de Stirling modifiés de deuxième espèce.

On a évidemment : $S(r,j) = (-1)^{r-j}\,\widetilde{S}(r,j)$ , $\widetilde{S}(r,j) = (-1)^{r-j}\,S(r,j)$ .

Sans démonstrations, voici quelques propriétés utiles :

(7.3)
$$S(r+1,j+1)=S(r,j)+(j+1)S(r,j+1)$$
$$\widetilde{S}(r+1,j+1)=\widetilde{S}(r,j)-(j+1)\widetilde{S}(r,j+1)$$
$$S(r,j)=\frac{1}{j!}\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+j}\binom{j}{i}i^r$$
$$S(r,r)=S(r,1)=1$$

## 8. DERIVATION DE FORMULES PROCHES

En transformant (7.1) à l'aide de $\binom{n+1}{j+1}=\binom{n}{j+1}+\binom{n}{j}$ ,en distribuant puis en changeant l'indice de la seconde somme, enfin en utilisant la première relation de (7.3), on aboutit à :

(8.1) $$SP(r,n)=\sum_{j=0}^{r} S(r+1,j+1)j!\binom{n}{j+1}$$

De même, à partir de (7.2), en utilisant $\binom{n+j}{j+1}=\binom{n+j+1}{j+1}-\binom{n+(j-1)+1}{(j-1)+1}$ , on obtient :

(8.2) $$SP(r,n)=\sum_{j=0}^{r} \widetilde{S}(r+1,j+1)j!\binom{n+j+1}{j+1}$$

## 9. NOMBRES DE BERNOULLI EN FONCTION DES NOMBRES DE STIRLING DE 2[e] ESPECE

$$\binom{n}{j+1}=\frac{1}{(j+1)!}n(n-1)(n-2)...(n-j)=\frac{1}{(j+1)!}\sum_{i=1}^{j+1}s(j+1,i)n^{i}=\frac{1}{(j+1)!}\sum_{i=0}^{j}s(j+1,i+1)n^{i+1}$$

Substituons dans (8.1), il vient :

$$SP(r,n)=\sum_{j=0}^{r}S(r+1,j+1)\frac{j!}{(j+1)!}\sum_{i=0}^{j}s(j+1,i+1)n^{i+1}=\sum_{j=0}^{r}\left(\sum_{i=j}^{r}\frac{s(i+1,j+1)S(r+1,i+1)}{i+1}\right)n^{j+1}$$

D'où, par comparaison avec (5.2) :

| | |
|---|---|
| (9.1) | $\tilde{b}(r,j)=\sum_{i=j}^{r}\frac{s(i+1,j+1)S(r+1,i+1)}{i+1}$ |

En particulier, pour j = 0, cela nous donne :

| | |
|---|---|
| (9.2) | $\tilde{B}_r=\sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^{i}i!}{i+1}S(r+1,i+1)$ |

De même :

$$\binom{n+j+1}{j+1}=\frac{1}{(j+1)!}(n+1)[(n+1)+1][(n+1)+2]...[(n+1)+j]=\frac{1}{(j+1)!}\sum_{i=1}^{j+1}\tilde{s}(j+1,i)(n+1)^{i}$$

$$=\frac{1}{(j+1)!}\sum_{i=0}^{j}\tilde{s}(j+1,i+1)(n+1)^{i+1}$$

nous conduit, par substitution dans (8.2) et par comparaison avec (5.1), à :

| | |
|---|---|
| (9.3) | $b(r,j)=\sum_{i=j}^{r}\frac{\tilde{s}(i+1,j+1)\tilde{S}(r+1,i+1)}{i+1}$ |

et, en particulier pour j = 0 :

| | |
|---|---|
| (9.4) | $B_r=\sum_{i=0}^{r}\frac{i!}{i+1}\tilde{S}(r+1,i+1)=\sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^{r-i}i!}{i+1}S(r+1,i+1)$ |

En comparant (9.2) et (9.4), on tire : $B_r=(-1)^{r}\tilde{B}_r$ . Et puisque l'on sait par ailleurs que $B_r=\tilde{B}_r$ sauf pour r = 1, on en déduit :

| | |
|---|---|
| (9.5) | pour r impair > 1 : $B_r=\tilde{B}_r=0$ |

Si l'on préfère exprimer $B_r$ en fonction de S(r, i), il suffit d'utiliser la relation récursive de (7.3) :

$$B_r = \sum_{i=1}^{r} \frac{(-1)^{r-i} i!}{i+1} S(r,i) + \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i} i! S(r,i+1) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \left[ \frac{i!}{i+1} - (i-1)! \right] S(r,i)$$ . D'où :

| | |
|---|---|
| (9.6) | $B_r = (-1)^{r+1} \sum_{i=1}^{r} \frac{(-1)^i i!}{i(i+1)} S(r,i)$ |

Et donc, en utilisant la formule donnée en (7.3) :

$$B_r = (-1)^{r+1} \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j j!}{j(j+1)} \frac{1}{j!} \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i+j} \binom{j}{i} i^r = (-1)^{r+1} \sum_{j=1}^{r} \left( \sum_{i=j}^{r} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} \frac{(-1)^i}{i(i+1)} \right) j^r$$ . Ainsi :

| | |
|---|---|
| (9.7) | $B_r = (-1)^{r+1} \sum_{j=1}^{r} \left( \sum_{i=j}^{r} \binom{i}{j} \frac{1}{i(i+1)} \right) (-1)^j j^r$ |

## 10. EXPRESSION DES COEFFICIENTS BINOMIAUX PRESENTS DANS LES FORMULES (7.1), (7.2), (8.1) ET (8.2) EN FONCTION DE COEFFICIENTS BINOMIAUX AVEC r + 1 COMME TERME INFERIEUR

Posons ε = 0 ou 1. Un petit calcul faisant appel à la traditionnelle formule récursive pour les coefficients binomiaux nous permet d'obtenir :

| | |
|---|---|
| (10.1) | $\binom{n+\varepsilon}{j+1} = \sum_{i=j}^{r} (-1)^{i-j} \binom{r-j}{i-j} \binom{n+\varepsilon+r-i}{r+1}$ |

| | |
|---|---|
| (10.2) | $\binom{n+j+\varepsilon}{j+1} = \sum_{i=j}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r-j}{i-j} \binom{n+\varepsilon+i}{r+1}$ |

## 11. SUBSTITUTION DE (10.1) ET (10.2) DANS (7.1), (7.2), (8.1) ET (8.2)

Les formules (7.1), (7.2), (8.1) et (8.2) deviennent respectivement, après substitution de (10.1) et (10.2) et application de la formule de réarrangement :

$$SP(r,n)=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{j}(-1)^{j-i}\binom{r-i}{j-i}S(r,i)i!\right)\binom{n+1+r-j}{r+1}$$

$$SP(r,n)=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{j}(-1)^{r-j}\binom{r-i}{j-i}\widetilde{S}(r,i)i!\right)\binom{n+j}{r+1}$$

$$SP(r,n)=\sum_{j=0}^{r}\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{r-i}{j-i}S(r+1,i+1)i!\right)\binom{n+r-j}{r+1}$$

$$SP(r,n)=\sum_{j=0}^{r}\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^{r-j}\binom{r-i}{j-i}\widetilde{S}(r+1,i+1)i!\right)\binom{n+1+j}{r+1}$$

qui, moyennant changements d'indices et conversion de $\widetilde{S}$ en S, nous livrent :

(11.1) $$SP(r,n)=\sum_{j=1}^{r}A^{1}(r,j)\binom{n+j}{r+1}\quad\text{avec}\quad A^{1}(r,j)=\sum_{i=1}^{r+1-j}(-1)^{r+1}(-1)^{i+j}\binom{r-i}{j-1}S(r,i)i!$$

(11.2) $$SP(r,n)=\sum_{j=1}^{r}A^{2}(r,j)\binom{n+j}{r+1}\quad\text{avec}\quad A^{2}(r,j)=\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+j}\binom{r-i}{r-j}S(r,i)i!$$

(11.3) $$SP(r,n)=\sum_{j=0}^{r}A^{3}(r,j)\binom{n+j}{r+1}\quad\text{avec}\quad A^{3}(r,j)=\sum_{i=0}^{r-j}(-1)^{r}(-1)^{i+j}\binom{r-i}{j}S(r+1,i+1)i!$$

(11.4) $$SP(r,n)=\sum_{j=1}^{r+1}A^{4}(r,j)\binom{n+j}{r+1}\quad\text{avec}\quad A^{4}(r,j)=\sum_{i=0}^{j-1}(-1)(-1)^{i+j}\binom{r-i}{r+1-j}S(r+1,i+1)i!$$

## 12. ETUDE DES $A^v(r,j)$ POUR v = 1, 2, 3, 4

Voici tout d'abord quelques observations simples sur les formules précédentes :

| | | |
|---|---|---|
| (12.1) | $A^1(r,j) = A^2(r,j)$ | |
| (12.2) | $A^1(r,r+1-j) = A^2(r,j)$ | $A^2(r,r+1-j) = A^1(r,j)$ |
| (12.3) | $A^3(r,r+1-j) = A^4(r,j)$ | $A^4(r,r+1-j) = A^3(r,j)$ |

(12.4) Posons :

$$\tau^1(i,j,r) = (-1)^{r+1}(-1)^{i+j} i! \binom{r-i}{j-1} S(r,i)$$

$$\tau^2(i,j,r) = (-1)^{i+j} i! \binom{r-i}{r-j} S(r,i)$$

Alors :

(12.5) $$A^1(r,j) = \sum_{i=1}^{r+1-j} \tau^1(i,j,r)$$

(12.6) $$A^2(r,j) = \sum_{i=1}^{j} \tau^2(i,j,r)$$

(12.7) $$A^3(r-1,j-1) = \sum_{i=1}^{r+1-j} \frac{\tau^1(i,j,r)}{i}$$

(12.8) $$A^4(r-1,j) = \sum_{i=1}^{j} \frac{\tau^2(i,j,r)}{i}$$

Je me propose de démontrer que $A^1(r,j) = A^3(r-1,j-1)$ et $A^2(r,j) = A^4(r-1,j)$.
Pour cela, j'aurai besoin de : $S(r,i) = \frac{1}{i!}\sum_{k=1}^{i}(-1)^{i+k}\binom{i}{k}k^r$
et du résultat suivant qui se démontre facilement par récurrence sur r :

(12.9) $$\sum_{k=i}^{j} g(k)\binom{k}{i}\binom{r-k}{r-j} = \binom{r+1}{j-i} \quad \text{avec } r \ge j \ge i \ge 1 \text{ et } g \text{ une fonction telle que } g(1) = 1$$

En modifiant un peu (12.9), on obtient aussi :

(12.10)
$$\sum_{k=i}^{r+1-j} g(k)\binom{k}{i}\binom{r-k}{j-1} = \binom{r+1}{j+i} \quad \text{avec } r \ge j \ge 1,\ r+1-j \ge i \ge 1 \text{ et } g \text{ une fonction telle que } g(1) = 1$$

Enfin, l'utilisation de la formule de réarrangement pour développer (12.5) à (12.8), conjointe au développement de S(r,i) et aux simplifications apportées par (12.9) et (12.10), nous livrent :

(12.11) $$A^1(r,j) = A^3(r-1,j-1) = \sum_{i=1}^{r+1-j}(-1)^{r+1}(-1)^{i+j}\binom{r+1}{j+i} i^r$$

(12.12) $$A^2(r,j) = A^4(r-1,j) = \sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+j}\binom{r+1}{j-i} i^r$$

## 13. SP(r,n) EN FONCTION DES NOMBRES EULERIENS

Définissons :

| | |
|---|---|
| (13.1) | $A(r,j)=\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+j}\binom{r+1}{j-i}i^r \quad \text{pour } r\geq j\geq 1$ |

A partir de (12), il est facile de vérifier que :

(13.2) $A(r,1) = A(r,r) = 1$ et $A(r,j) = jA(r-1,j) + (r+1-j)A(r-1,j-1)$ pour $1 < j < r$, ce qui constitue la définition usuelle des nombres Eulériens.

On peut aussi démontrer (13.2) directement à partir de (13.1).

Dès lors, les formules (11.1) à (11.4) peuvent se récrire :

| | |
|---|---|
| (13.3) | $SP(r,n)=\sum_{j=1}^{r}A(r,j)\binom{n+j}{r+1}$ |
| (13.4) | $SP(r,n)=\sum_{j=0}^{r}A(r+1,j+1)\binom{n+j}{r+1}$ |
| (13.5) | $SP(r,n)=\sum_{j=1}^{r+1}A(r+1,j)\binom{n+j}{r+1}$ |

## 14. NOMBRES EULERIENS EN FONCTION DES NOMBRES DE STIRLING DE 2^e^ ESPECE

Il résulte de (11.2) que :

| | |
|---|---|
| (14.1) | $A(r,j)=\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+j}i!\binom{r-i}{r-j}S(r,i)$ |

## 15. NOMBRES DE STIRLING DE 2^e^ ESPECE EN FONCTION DES NOMBRES EULERIENS

Deux formules de décomposition de $\binom{n+j}{r+1}$, faciles à obtenir par récurrence, vont nous permettre de mener à bien cette tâche :

| | |
|---|---|
| (15.1) | $\binom{n+j}{r+1}=\sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}\binom{n+1}{(r-i+1)+1}$ |
| (15.2) | $\binom{n+j}{r+1}=\sum_{i=j}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r-j}{r-i}\binom{n+i}{i+1}$ |

Remplaçons (15.1) et (15.2) dans (13.3), il vient, après réarrangements et changements d'indices :

| | |
|---|---|
| (15.3) | $\mathrm{SP}(r,n)=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{j}\binom{r-i}{r-j}A(r,r+1-i)\right)\binom{n+1}{j+1}=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{j}\binom{r-i}{r-j}A(r,i)\right)\binom{n+1}{j+1}$ |
| (15.4) | $\mathrm{SP}(r,n)=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{j}(-1)^{r-j}\binom{r-i}{r-j}A(r,i)\right)\binom{n+j}{j+1}$ |

Par comparaison avec (7.1) et (7.2), on en déduit :

| | |
|---|---|
| (15.5) | $S(r,j)=\frac{1}{j!}\sum_{i=1}^{j}\binom{r-i}{r-j}A(r,i)$ |

## 16. NOMBRES DE BERNOULLI EN FONCTION DES NOMBRES EULERIENS ET DES NOMBRES DE STIRLING DE 1^re^ ESPECE

Tout d'abord, en injectant (15.5) dans (9.6), on obtient :

| | |
|---|---|
| (16.1) | $B_r=(-1)^{r+1}\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=j}^{r}\frac{(-1)^i}{i(i+1)}\binom{r-j}{r-i}\right)A(r,j)$ |

Développons $\binom{n+j}{r+1}$ en polynômes, respectivement en $(n+1)^{i+1}$ et en $n^{i+1}$, mais d'abord en $(n+j)^{i+1}$ :

$$\binom{n+j}{r+1}=\frac{1}{(r+1)!}(n+j)[(n+j)-1][(n+j)-2]...[(n+j)-r]=\frac{1}{(r+1)!}\sum_{i=0}^{r}s(r+1,i+1)(n+j)^{i+1}$$

Or $(n+j)^{i+1}=[(n+1)+(j-1)]^{i+1}=(j-1)^{i+1}+\sum_{k=0}^{i}\binom{i+1}{k+1}(j-1)^{i-k}(n+1)^{k+1}$ (avec la convention : $(j-1)^{i-k}=1$ quand $j=1$ et $i=k$ ) . On a aussi :

$$(n+j)^{i+1}=j^{i+1}+\sum_{k=0}^{i}\binom{i+1}{k+1}j^{i-k}n^{k+1}$$

Cela permet d'obtenir les deux formules suivantes :

$$\binom{n+j}{r+1}=\frac{1}{(r+1)!}\sum_{i=0}^{r}s(r+1,i+1)(j-1)^{i+1}+\frac{1}{(r+1)!}\sum_{i=0}^{r}\left(\sum_{k=i}^{r}\binom{k+1}{i+1}(j-1)^{k-i}s(r+1,k+1)\right)(n+1)^{i+1}$$

$$\binom{n+j}{r+1}=\frac{1}{(r+1)!}\sum_{i=0}^{r}s(r+1,i+1)j^{i+1}+\frac{1}{(r+1)!}\sum_{i=0}^{r}\left(\sum_{k=i}^{r}\binom{k+1}{i+1}j^{k-i}s(r+1,k+1)\right)n^{i+1}$$

Injectons-les dans (13.3) et comparons avec (5.1) et (5.2), il vient :

(16.2) $$b(r,i)=\frac{1}{(r+1)!}\sum_{k=i}^{r}\binom{k+1}{i+1}s(r+1,k+1)\sum_{j=1}^{r}A(r,j)(j-1)^{k-i}$$

et $$\sum_{j=1}^{r}A(r,j)\sum_{i=0}^{r}s(r+1,i+1)(j-1)^{i+1}=0$$

(16.3) $$\tilde{b}(r,i)=\frac{1}{(r+1)!}\sum_{k=i}^{r}\binom{k+1}{i+1}s(r+1,k+1)\sum_{j=1}^{r}A(r,j)j^{k-i}$$

et $$\sum_{j=1}^{r}A(r,j)\sum_{i=0}^{r}s(r+1,i+1)j^{i+1}=0$$

En particulier, pour i = 0 :

(16.4) $$B_r=\frac{1}{(r+1)!}\sum_{k=0}^{r}(k+1)s(r+1,k+1)\sum_{j=1}^{r}A(r,j)(j-1)^{k}$$

(16.5) $$B_r=\frac{(-1)^r}{(r+1)!}\sum_{k=0}^{r}(k+1)s(r+1,k+1)\sum_{j=1}^{r}A(r,j)j^{k}$$

Ou encore, en remplaçant A(r,j) par (13.1) dans (16.5) :

(16.6) $$B_r=\frac{(-1)^r}{(r+1)!}\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)s(r+1,k+1)\sum_{i=j}^{r}(-1)^{i+j}\binom{r+1}{i-j}i^{k}\right)j^{r}$$

## <u>**BIBLIOGRAPHIE :**</u>

C’est un article de Jean-Claude Martzloff, intitulé « Li Shanlan », paru dans le dossier hors-série « Les Mathématiciens » de la revue « Pour la Science » , en janvier 1994, qui m’a stimulé à entreprendre cette petite recherche.