Pandigitalisations en base b

par Pascal Kaeser, juin 1999.

1. Introduction

Soit B = {0 ; 1 ; 2 ; ... ; b – 1}.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 1.

x est dit *pandigital* (en base b) si et seulement si
chaque élément de B apparaît au moins une fois dans son développement en base b :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} x_j b^{-j} = .x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots \text{ (où chaque } x_j \in B\text{)}.$$

Une *pandigitalisation minimale* de x est une troncation $.x_1x_2x_3 \ldots x_m$ de son développement, telle que chaque élément de B apparaît au moins une fois et l'un d'entre eux apparaît pour la première fois en position m.

Par exemple (en base 10) :

√2/10 = .1414213562373095048801688... est pandigital
et .1414213562373095048 est sa pandigitalisation minimale.

Une *pandigitalisation optimale* est une pandigitalisation minimale pour laquelle m = b.
Une *pandigitalisation optimale exacte* est une pandigitalisation optimale égale à x au sens strict (c'est-à-dire telle que $x_j = 0$ pour tout j supérieur à b).

Par exemple (en base 10) :

106966800000001/256000000000000 = .4178390625... est une pandigitalisation optimale.
Mais elle n'est pas exacte, car le développement complet de cette fraction est :
.41783906250000390625.
Par contre : 94617/64000 = .1478390625 est une pandigitalisation optimale exacte.

Enfin, l'on parlera de *pandigitalisation optimale périodique* lorsque le développement infini de x est tel que ses b premiers digits forment une pandigitalisation optimale et $x_j = x_k$ si et seulement si j = k mod b.

Par exemple (en base 10) :

13717421/1111111111 = $.\overline{0123456789}$ est une pandigitalisation optimale périodique.

2. Exemples en base 6 et 26

Notation : pour toute base b jusqu'à 10, je noterai les digits avec nos chiffres arabes usuels ; pour toute base b supérieure à 10 (mais au plus égale à 26), je noterai les digits avec les majuscules de l'alphabet latin (c'est-à-dire : A = 0, B = 1, C = 2, etc.). J'écrirai aussi en base b le numérateur et le dénominateur des fractions x dont je donne une pandigitalisation. Ainsi, par exemple, l'égalité (ici écrite en base 10) :

$$15/32 = 1/4 + 3/4^2 + 2/4^3 + 0/4^4$$

sera notée : 33/200 = .1320 (écriture en base 4).

<u>Base 6</u> :

pandigitalisation minimale (non optimale) :

12/155 = .040201003013043214 05...

pandigitalisation optimale (non exacte et non périodique) :

3353/231043 = .012354...

pandigitalisation optimale exacte :

5/144 = .024513

pandigitalisation optimale périodique :

$$11/51 = .\overline{120435}$$

<u>Base 26</u> :

pandigitalisation minimale (non optimale) :

π/BA = .DDRSQLOLYRTRODNLHNQTGKUDQGTUIRXNEQBCKBSZIVQQVGDMEL MUEXROIQIYALVUZVEBMIJPQQXLKPLRNCFW...

pandigitalisation optimale (non exacte et non périodique) :

WEZ/YBA = .YABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXZ...

pandigitalisation optimale exacte :

CEGIKMOQSUWZZXVTRPNLJHFD/CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
 = .ABCDEFGHIJKLMZYXWVUTSRQPON

pandigitalisation optimale périodique :

$$\mathrm{BDGKPWDLVFRDRFVMDWQLHECB/BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB} = .\overline{\mathrm{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}}$$

3. Pandigitalisations optimales

Appelons *taille* d'une fraction (en base b) la somme du nombre de digits de son numérateur et du nombre de digits de son dénominateur. Pour chaque base b, définissons les ensembles :

F = l'ensemble des fractions de taille minimale offrant une pandigitalisation optimale périodique
G = l'ensemble des fractions de taille minimale offrant une pandigitalisation optimale exacte
H = l'ensemble des fractions de taille minimale offrant une pandigitalisation optimale

Notons $\chi(...)$ la taille des fractions de l'un ou l'autre de ces ensembles. Il va de soi que :
$\chi(H) \le \chi(F)$ et $\chi(H) \le \chi(G)$.

Concernant G, il est relativement facile de montrer les résultats suivants :

- $\chi(G) \le 2b - 1$
- Si b est premier, alors $\chi(G) = 2b - 1$
  et G est formé des $(b-1)!$ fractions de la forme
  $\dfrac{\sum_{j=1}^{b-1} x_j b^{b-j-1}}{b^{b-1}}$, où $(x_1, x_2, ..., x_{b-1})$ est une permutation de $(1, 2, ..., b-1)$.
- Si b est une puissance (supérieure à 1) d'un nombre premier, alors $\chi(G) \ge 2b - 3$.

Concernant F et G :

Soit x une fraction offrant une pandigitalisation optimale périodique en base b : $.\overline{x_1 x_2 ... x_b}$,
alors $y = \left(1 - \dfrac{1}{b^b}\right)x$ offre une pandigitalisation optimale exacte : $.x_1 x_2 ... x_b$
et tout z tel que $0 \le z - y < \dfrac{1}{b^b}$ offre une pandigitalisation optimale dont les b premiers digits coïncident avec ceux de y.

Posons : $t = \sum_{j=1}^{b} x_j b^{b-j}$,

$$t_{\min} = \sum_{j=1}^{b} (j-1) b^{b-j} = \frac{b^b - b^2 + b - 1}{(b-1)^2}, \quad t_{\max} = \sum_{j=1}^{b} (b-j) b^{b-j} = \frac{b(b^{b+1} - 2b^b + 1)}{(b-1)^2}$$

On a :

- t est un entier dont les x_j forment le développement en base b.
- t_{min} et t_{max} sont des entiers qui encadrent t.
- $x = \dfrac{t}{b^b - 1}$ et $y = \dfrac{t}{b^b}$.

Soit f un diviseur (plus grand que 1) de $b^b - 1$.
Posons $g = \dfrac{b^b - 1}{f}$.

Soit c = dg un multiple de g compris entre t_{min} et t_{max} (c'est-à-dire : $\dfrac{t_{min}}{g} \le d \le \dfrac{t_{max}}{g}$).

Convertissons c en base b : $c = \sum_{j=1}^{b} c_j b^{b-j}$.

Si $\{c_1 ; c_2 ; ... ; c_b\} = B$, alors : $\dfrac{c}{b^b - 1} = \dfrac{dg}{fg} = \dfrac{d}{f}$ offre une pandigitalisation optimale périodique : $.\overline{c_1 c_2 ... c_b}$.

Le même procédé, en remplaçant $b^b - 1$ par b^b, offre une pandigitalisation optimale exacte.

Intérêt : En parcourant les plus petits diviseurs f de $b^b - 1$ (respectivement de b^b), on a des chances de capturer assez rapidement les plus simples fractions d/f offrant une pandigitalisation optimale périodique (respectivement exacte).

Détermination de F, G et H pour quelques valeurs de b :

Base 2 :

$F = \{1/11 = .\overline{01}\}$ G = {1/10 = .10} $H = F \cup G$

Base 3 :

$F = \{12/222 = .\overline{012} ; 21/222 = .\overline{021}\}$
G = {12/100 = .120 ; 21/100 = .210}
H = {1/12 = .012... ; 2/21 = .021...}

Base 4 :

$F = \{2/101 = .\overline{0132} ; 3/101 = .\overline{0231}\}$
G = {33/200 = .1320}
H = {2/31 = .0213... ; 3/32 = .0312...}

Base 5 :

F = { $14/1032 = .\overline{01243}$; $21/1032 = .\overline{01432}$ }
G comporte 24 éléments (le plus petit est 1234/10000 = .12340)
H = {1/12 = .03241... ; 2/14 = .10234...}

Base 6 :

F = { $2/51 = .\overline{021534}$; $4/51 = .\overline{043512}$ }
G = {5/144 = .024513 ; 23/52 = .245130}
H = {1/34 = .013452... ; 4/21 = .150243...} ∪ F

Base 7 :

F = { $524/36412 = .\overline{0123465}$; $632/36412 = .\overline{0143256}$; $634/36412 = .\overline{0143625}$ }
G comporte 720 éléments (le plus petit est 123456/1000000 = .1234560)
H = {1/36 = .0154632... ; 2/45 = .0265341... ; 4/43 = .0621543... ; 5/45 = .1026534...}

Base 8 :

F = { $5/335 = .\overline{01345267}$; $5/361 = .\overline{01247653}$; $6/361 = .\overline{01457632}$ }
$\chi(G) = 13$
H = {3/141 = .01765342... ; 7/121 = .05417632... ; 14/53 = .21670435... ;
37/53 = .56107342...} ∪ F

Base 9 :

F = { $25/608 = .\overline{036842175}$; $32/608 = .\overline{046713852}$; $87/608 = .\overline{138520467}$;
$12/635 = .\overline{016428375}$; $27/635 = .\overline{038157624}$; $36/635 = .\overline{051387246}$;
$52/635 = .\overline{073126485}$; $83/635 = .\overline{126485073}$ }
$\chi(G) = 15$
H = {7/55 = .123047658...}

Base 10 :

$5 \le \chi(F) \le 10$ $4 \le \chi(G) \le 10$ H = {1/38 = .0263157894...}

Base 11 :

$4 \le \chi(F) \le 20$
G comporte 3’628’800 éléments de taille 21
H = {B/BC = .AJDECFKBHGI...}

Base 12 :

$F = \{ J / FFF = .\overline{ABHJIKCGFELD} \}$
$6 \leq \chi(G) \leq 17$
$H = \{L/FI = .BLDGECJKHAIF...\}$

Base 13 :

$4 \leq \chi(F) \leq 21$
G comporte 479’001’600 éléments de taille 25.
$H = \{F/DK = .BEDCFAGLIJKHM...\}$

Base 14 :

$4 \leq \chi(F) \leq 12$ $6 \leq \chi(G) \leq 22$ $H = \{J/IH = .BALHFKJMENCGID...\}$

Base 15 :

$4 \leq \chi(F) \leq 24$ $10 \leq \chi(G) \leq 24$ $4 \leq \chi(H) \leq 24$

Base 16 :

$F = \{ H / CIB = .\overline{ACMLKOIGPNDEFBHJ} \}$ $\chi(G) = 29$ $\chi(H) = 4$ $(F \subset H)$

4. Conclusion et références

Jusqu’à preuve du contraire, les pandigitalisations peuvent être considérées comme un sujet qui relève de la théorie des nombres, des curiosités mathématiques et de l’exploration sur ordinateur.

A la source de cet article figurent le chapitre 2 du livre de Jean-Paul Delahaye : *Le fascinant nombre π*, Belin, 1997, ainsi qu’un e-mail d’Eric Angelini : *Pangrammatisation de pi*, Liste Oulipo, 11/06/99.